Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2012

Guía 7: *Bosones*

1. Un gas ideal de N bosones está confinado en una región bidimensional de área A. Escriba el número de partículas en los estados excitados, N_e, y el número de partículas en el estado fundamental, N_0, en términos de z, T y A, y muestre que no hay condensación de Bose–Einstein a menos que $T \longrightarrow 0$.

2. Considere un gas ideal de Bose–Einstein cuyas partículas tienen grados de libertad internos. Asuma que sólo es necesario tomar en cuenta el primer nivel interno excitado, con energía ϵ_1 por encima del nivel fundamental de energía $E = 0$. Si la temperatura crítica del gas sin grados de libertad internos es T_c^0, muestre que en los límites en que $\epsilon_1 \gg kT_c^0$ y $\epsilon_1 \ll kT_c^0$ la temperatura crítica del gas que sí tiene grados de libertad internos es, respectivamente,
$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 1 - \frac{2e^{-\epsilon_1/kT_c^0}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}, \qquad \frac{T_c}{T_c^0} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\left[1 + \frac{2^{4/3}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\pi\epsilon_1}{kT_c^0}\right)^{1/2}\right].$$
Fórmulas útiles:
$$g_\nu(z) = z + \frac{z^2}{2^\nu} + \ldots, \qquad g_\nu\left(e^{-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(\nu-n)\,\alpha^n.$$

3. Considere un gas de bosones de espín 1, a temperatura T y densidad $1/v$. Si se aplica un campo magnético H, la energía de las partículas adquiere una contribución $-Hm_0s$, donde s puede tomar los valores -1, 0 y 1. Asumir que H y m_0 son mayores que cero.

   (a) Escribir las energías de los autoestados de las partículas y los correspondientes números de ocupación, definiendo fugacidades efectivas $z_s = \exp[\beta(\mu + Hm_0s)] = ze^{sx}$.

   (b) Escribir la ecuación de estado en forma paramétrica, es decir, βPV y N como funciones de z y T. Tener en cuenta que puede haber una fase condensada. Interpretar los límites $x \longrightarrow 0$ y $x \longrightarrow \infty$.

   (c) Escribir la ecuación que determina la temperatura de condensación T_c y resolverla de modo aproximado en los casos en que x, evaluada en T_c, sea mucho mayor que 1 o muy próxima a cero. [Las fórmulas del problema anterior también pueden ser útiles aquí.]

4. Demostrar que la entropía y el calor específico de un gas de bosones de espín cero están dados por:
$$\frac{S}{kN} = \begin{cases} \dfrac{5}{2}\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z, \\[2ex] \dfrac{5}{2}\dfrac{v}{\lambda^3}\,g_{5/2}(1). \end{cases} \qquad \frac{C_V}{kN} = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \dfrac{9}{4}\dfrac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & T > T_c \\[2ex] \dfrac{15}{4}\dfrac{v}{\lambda^3}\,g_{5/2}(1), & T < T_c \end{cases}$$

5. La condensación de Bose–Einstein fue experimentalmente obtenida por primera vez en 1995, confinando a las partículas mediante potenciales armónicos. En este problema estudiaremos este tipo de confinamiento. Para hallar la densidad de estados cuánticos de una partícula que se halla sometida a un potencial de la forma $(1/2)m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)$ será útil primeramente considerar el caso unidimensional. Sabemos que en 1-D el espectro de energías resulta equiespaciado, de manera que la densidad de estados será una constante. Este resultado puede deducirse alternativamente de la siguiente manera:

(a) La energía de la partícula ε puede escribirse en la forma $R^2 = X^2 + Y^2$, siendo $R^2 = \varepsilon$, $X^2 = m\omega^2 x^2/2$ e $Y^2 = p^2/2m$. Así, el número de estados $dxdp/h$ resulta igual, a menos de un factor, al elemento de área en cartesianas $dXdY$. A su vez el número de estados que nos interesa $D(\varepsilon)d\varepsilon$ resultará igual, *a menos del mismo factor*, al elemento de área en polares, $2\pi RdR$. Halle la densidad de estados mediante este argumento y verifique que se obtiene el resultado correspondiente al espectro equiespaciado.

(b) El tratamiento anterior puede extenderse fácilmente al caso 3-D, donde el número de estados $D(\varepsilon)d\varepsilon$ resultará así proporcional al elemento de volumen correspondiente a un cascarón esférico en 6-D. Sabiendo que el volumen de una esfera en 6-D vale $\pi^3 R^6/6$, calcule entonces la densidad de estados.

(c) Cuando el potencial químico se aproxima arbitrariamente a la energía del nivel fundamental, el número de partículas en dicho estado se vuelve macroscópico: ¿por qué? Calcule bajo esas condiciones cuántas partículas se encontrarán por encima del nivel fundamental.

(d) Halle la temperatura crítica y discuta el límite termodinámico.

(e) Calcule la energía del gas para temperaturas por debajo de la crítica.

6. Considere un sólido de n dimensiones con excitaciones que tienen una relación de dispersión $\omega = \alpha k^s$, donde ω es la frecuencia angular, k el módulo del vector de onda y α una constante. Cada excitación contribuye a la energía con $\epsilon = \hbar\omega$.

   (a) Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ en la aproximación de Debye, es decir considerando al sólido como continuo. Escriba la expresión para la energí a del sistema.

   (b) Demuestre que para temperaturas muy bajas la dependencia del calor específico con la temperatura es $C_v \sim T^{\,n/s}$.

   (c) ¿Cuál es la dependencia de C_v con la temperatura en el límite de temperaturas altas? En el mismo límite, ¿cómo depende de $\hbar$? No hace falta hacer cuentas.

7. Se tiene un monocristal de sodio metálico. Cada sodio tiene un solo electrón que contribuye a la conducción. Haremos la aproximación de que los electrones no interactúan entre sí y tampoco con el cristal, de forma tal que pueden considerarse como libres. La única contribución al calor específico que tendremos en cuenta será la proveniente de las vibraciones de la red y de la energía cinética de los electrones de conducción.

   (a) Encuentre la temperatura de Debye.

   (b) Encuentre la temperatura de Fermi.

   (c) ¿Cómo será la dependencia de C_V con la temperatura cuando $T \longrightarrow 0$?

   (d) ¿Cuánto valdrá aproximadamente C_V a temperatura ambiente?

   Datos:

   Densidad del sodio metálico $= 1.6 \times 10^{23}$ cm^{-3}. Velocidad del sonido en el sodio metálico $=$ 5000 m/s. $k = 1.4 \times 10^{-23}$J/K, $\hbar = 10^{-34}$ J s. Masa del electrón $= 9.1 \times 10^{-28}$ g.