Física Teórica 3 - 1er. cuatrimestre de 2012

Algunos problemas resueltos de la Guía 2

Problema 6

Cuatro cuadras separan de un bar la casa de un hombre. Si el hombre se encuentra en cualquiera las 3 esquinas intermedias, dirigirá su caminar hacia su casa o hacia el bar con igual probabilidad. Pero si llega a alguno de estos dos sitios, allí se detendrá.

(a) Encuentre la matriz de transición del problema. Exprésela en la forma canónica.

(b) ¿Cuánto tiempo vagará por las calles el buen hombre antes de detenerse?

(c) ¿Con qué probabilidad acabará en el bar?

Solución. (a) Llamando 0 a la posición de la casa, 4 a la posición del bar, y 1, 2 y 3 a las posiciones de las esquinas intermedias, la matriz de transición, en su forma canónica, es:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
=
\left(\begin{array}{c|c}
\mathbf{Q} & \mathbf{R} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{I}
\end{array}\right)
= \mathbf{M}.
$$

(b) El número de veces, en promedio, que cada posición transitoria j es ocupada si se parte desde el estado transitorio i está dado por el elemento ij de la matriz $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. En este caso es

$$
\mathbf{N} = \begin{pmatrix}
\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
1 & 2 & 1 \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}
\end{pmatrix}.
$$

La suma de los elementos de la fila i da el número medio de pasos que se dan antes de caer en un estado absorbente si se parte desde el estado transitorio i. Aquí esas sumas son 3, 4 y 3.

(c) Si se parte desde un estado transitorio i, se cae en el estado absorbente j con una probabilidad que es igual al elemento ij de la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{NR}$. En este caso es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 4 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\[2ex] 2 \\[2ex] 3 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\[2ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{array} = \mathbf{B}.$$

Partiendo desde 1, va al bar con probabilidad $1/4$ y a la casa con probabilidad $3/4$, etc. En un caso simétrico como éste, era inmediato decir que partiendo desde el sitio 2 se llegaba con probabilidad 1/2 a la casa o al bar. Aprovechando este hecho, sin escribir ninguna matriz, la probabilidad de llegar a la casa partiendo desde 1 podía escribirse como la suma de dos alternativas: dar con probabilidad $1/2$ el primer paso en la dirección a la casa, o dar, con la misma probabilidad, el primer paso en dirección al sitio 2 y desde ahí caer con probabilidad $1/2$ en la casa:

$$P_{1 \to 0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Problema 8

Un preso, de apellido Smith, se encuentra en prisión con 1 peso en su poder. Si tuviera 8 podría pagar su fianza. Un guardia accede a jugar una serie de apuestas con él. Si el preso apuesta A pesos, gana A pesos con probabilidad 0.4 o los pierde con probabilidad 0.6. Encuentre la probabilidad de que gane 8 pesos antes de perder todo su dinero cuando sigue cada uno de estos dos procedimientos:

(a) apuesta 1 peso cada vez

(b) apuesta cada vez lo máximo posible, pero no más de lo necesario para alcanzar los 8 pesos.

¿Cuál resulta, por lo tanto, la mejor estrategia? ¿Y si inicialmente tuviera 3 pesos?

Solución. Llamando p a la probabilidad de que pierda, y $q = 1 - p$ a la probabilidad de que gane, la matriz de transición para la primera estrategia, escrita en forma canónica, es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} = \mathbf{M}_1.$$

Respecto de la segunda estrategia, si sólo fuéramos a analizar el caso con la condición inicial de un peso, bastaría con tener en cuenta situaciones con 1, 2, 4, 8 y 0 pesos, ya que son los únicos valores accesibles: el sistema es cerrado respecto de ellos: si se empieza con 1, 2, 4, 8 o 0 pesos, nunca se alcanzan otros valores. Pero como el problema también pide analizar qué pasa si inicialmente Smith tiene 3 pesos, conviene escribir desde el comienzo la matriz de transición completa, que resulta:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{M}_2.$$

A partir de la matriz $\mathbf{M}$ de cada estrategia uno define las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline 0 & \mathbf{I} \end{array}\right),$$

que a su vez se usan para definir la matriz $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ y la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{NR}$. El elemento ij de la matriz $\mathbf{B}$ da la probabilidad de que, habiendo partido del sitio transitorio i, se caiga en el sitio absorbente j.

Los cálculos que siguen fueron hechos usando el programa *Mathematica*. Para cada estrategia resulta

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{128}{6305} & \frac{6177}{6305} \\ \frac{64}{1261} & \frac{1197}{1261} \\ \frac{608}{6305} & \frac{5697}{6305} \\ \frac{16}{97} & \frac{81}{97} \\ \frac{1688}{6305} & \frac{4617}{6305} \\ \frac{532}{1261} & \frac{729}{1261} \\ \frac{4118}{6305} & \frac{2187}{6305} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{125} & \frac{117}{125} \\ \frac{4}{25} & \frac{21}{25} \\ \frac{32}{125} & \frac{93}{125} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{62}{125} & \frac{63}{125} \\ \frac{16}{25} & \frac{9}{25} \\ \frac{98}{125} & \frac{27}{125} \end{pmatrix}.$$

La primera columna corresponde al sitio absorbente con 8 pesos, y la segunda al sitio con 0 pesos. Si empieza con \$1 (pesos 1) y sigue la primera estrategia, Smith tiene $128/6305 \approx 0.02$ probabilidades de conseguir los

8 pesos; si sigue la segunda estrategia, sus probabilidades son $8/125 \approx 0.06$, es decir, las triplica respecto de la primera estrategia. Si empieza con \$3 (pesos 3), la primera estrategia le da $608/6305 \approx 0.1$ probabilidades de ganar los 8 pesos, contra $32/125 \approx 0.25$ de la segunda estrategia.

Problema 9

En una urna $\mathcal{A}$ se colocan dos bolas blancas, mientras que en una urna $\mathcal{B}$ se colocan cuatro bolas rojas. A cada paso del proceso se selecciona al azar una bola de cada urna y se intercambian.

(a) Encuentre la matriz de transición, sus autovalores y autovectores.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar dos bolas rojas en la urna $\mathcal{A}$ luego de tres pasos? ¿Y luego de varios pasos?

(c) Expresar el vector probabilidad $\mathbf{P}(s)$ en términos de los autovectores a izquierda y derecha.

Solución. (a) Cada realización del sistema puede identificarse por el número de bolas blancas de la primera urna. La matriz de transición es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{M}.$$

El sistema de autovalores y autovectores por izquierda, $\mathbf{vM} = \lambda\mathbf{v}$, se resuelve fácilmente. Los autovalores son $\{1/2, 1/4, -1/4\}$, con autovectores

$$\mathbf{v}_1 = (6, 8, 1)\,, \quad \mathbf{v}_2 = (-3, 2, 1)\,, \quad \mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)\,. \tag{1}$$

En tanto que el sistema por derecha, $\mathbf{Mw} = \lambda\mathbf{w}$, para los mismos autovalores, tiene los siguientes autovectores

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1)\,, \quad \mathbf{w}_2 \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 1\right)\,, \quad \mathbf{w}_3 = \left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{4}, 1\right)\,.$$

Puede demostrarse que, en general, los autovectores por derecha y por izquierda satisfacen $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i \propto \delta_{ij}$, y que siempre hay al menos un autovector por derecha con autovalor 1 y con todas sus componentes iguales. Este último hecho se deduce de la condición de suma de probabilidades igual a 1,

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, \dim \mathbf{M}.$$

En efecto, si se define $\mathbf{w}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, la ecuación anterior puede reescribirse como $\mathbf{Mw}_1 = \mathbf{w}_1$.

Definiendo $\mathbf{w}_1$ como acabamos de decir, es conveniente normalizar el resto de los autovectores de modo que las n componentes del autovector por izquierda $\mathbf{v}_1$ sumen 1 y que $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j = \delta_{ij}$. De acuerdo con esta convención, en el problema de la urna reemplazaremos los autovectores por izquierda (1) por estos otros:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{8}{15}, \tfrac{1}{15}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\tfrac{3}{5}, -\tfrac{6}{5}, \tfrac{3}{5}\right).$$

(b) y (c) Para encontrar el vector de probabilidad del sistema luego de tres pasos hay que calcular $\mathbf{M}^3$,

$$\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} & \frac{17}{32} & \frac{1}{16} \\ \frac{51}{128} & \frac{17}{32} & \frac{9}{128} \\ \frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

El enunciado pregunta por la probabilidad de que haya dos bolas rojas en la urna $\mathcal{A}$ si inicialmente había dos bolas blancas. Esta probabilidad es el elemento 31 de $\mathbf{M}^3$, es decir, $3/8$.

Es evidente que extender este tipo de cálculos a cualquier n resultará muy trabajoso si no se tiene un método más simple que calcular $\mathbf{M}^n$ directamente. Tal método existe. Se puede demostrar que cualquier vector de probabilidad $\mathbf{p}$ puede expandirse como

$$\mathbf{p} = \sum_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

El efecto de multiplicar $\mathbf{p}$ por la matriz de transición, para obtener el estado luego de un paso, es

$$\mathbf{pM} = \sum_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)(\mathbf{v}_i\mathbf{M}) = \sum_i \lambda_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

Asimismo, el estado luego de dos pasos es

$$(\mathbf{pM})\mathbf{M} = \mathbf{pM}^2 = \sum_i \lambda_i^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

Ya se ve la lógica del asunto. Luego de n pasos el estado de probabilidad del sistema será

$$\mathbf{P}(n) \equiv \mathbf{pM}^n = \sum_i \lambda_i^n (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

En el ejemplo del problema, inicialmente es $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, pues la primera urna tiene dos bolas blancas con probabilidad 1. Importa calcular el producto escalar de este vector por los autovectores $\mathbf{w}_i$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_1 = 1, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_2 = 1, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_3 = 1.$$

Así, puesto que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = 1/4$, resulta

$$\mathbf{pM}^n = \mathbf{v}_1 + \frac{1}{4^n}\left[\mathbf{v}_2 + (-1)^n \mathbf{v}_3\right].$$

Una característica importante de este tipo de problemas es que $|\lambda_i| \leq 1$ y que $\lambda = 1$ siempre es un autovalor. Al construir la suma

$$\mathbf{pM}^n = \sum_i \lambda_i^n (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i,$$

los términos proporcionales a λ_i^n con $|\lambda_i| < 1$ tenderán a cero cuando n tienda a infinito.

Existe una clase especial de matrices de transición, llamadas *regulares*. Una matriz M pertenece a esta clase si para algún entero N todos los elementos de la matriz M^N son distintos de cero. (Vimos más arriba que, para el problema de la urna, M^3 cumple con esto.) Esta condición significa que a partir de cualquier realización inicial de la variable estocástica, luego de N pasos puede llegarse a cualquiera otra con probabilidad distinta de cero. Para esta clase de matrices existe un único par de autovectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{w}_1$ asociados al autovalor $\lambda = 1$. El autovector por derecha $\mathbf{w}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ es el que definimos antes. Además, los otros autovectores tienen autovalores con módulo estrictamente menor que 1. Separando el término que corresponde al autovector con $\lambda = 1$, resulta

$$\mathbf{pM}^n = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{v}_1 + \sum_{i>1} \lambda_i^n (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

Debido a que $\mathbf{w}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, el primer término se simplifica:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_1) = \left(\sum_i p_i w_{1i} \right) \mathbf{v}_1 = \left(\sum_i p_i \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1,$$

así que, en definitiva,

$$\mathbf{pM}^n = \mathbf{v}_1 + \sum_{i>1} \lambda_i^n (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)\mathbf{v}_i.$$

Al hacer tender n a infinito, salvo el primer término, todos los otros tienden a cero, puesto que $|\lambda_i| < 1$ para $i > 1$. El estado asintótico del sistema es

$$\mathbf{p}_\infty = \mathbf{v}_1.$$

El estado $\mathbf{p}_\infty$ es el estado de equilibrio y resulta independiente del estado inicial.

En la práctica, pueden bastar muy pocos pasos para que, con suficiente precisión, pueda decirse que el sistema está en equilibrio. En el caso de la urna, con la condición inicial $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, luego de 7 pasos el estado es $\mathbf{pM}^7 \approx (0.400, 0.533, 0.067)$, y con 3 dígitos de precisión de ahí en adelante ya no se modifica.

Problema 10

Cada segundo una bacteria tiene probabilidad 2/3 de reproducirse dividiéndose en dos. Si el número de bacterias n es mayor o igual a 4, la falta de alimento produce una gran mortalidad, sólo logra sobrevivir una bacteria y la población vuelve a $n = 1$. Analizando el proceso como una cadena de Markov:

(a) Escribir la matriz de transición.

(b) Encontrar el estado estacionario.

(c) Si inicialmente tenemos 2 bacterias, ¿cuál es el estado del sistema 2 segundos después?

(d) Si modificamos el problema diciendo que cada segundo las bacterias tienen además cierta probabilidad p de morir ¿cuál es el estado estacionario y qué características tiene? (En este caso no es necesario hacer cuentas).

Solución. Si n es la variable que representa el número de bacterias, únicamente puede tomar los valores enteros del uno al seis. Si hay una bacteria, un segundo después puede haber dos; si hay dos, podrá haber luego tres o cuatro; si hay 3, un segundo después puede haber también cinco o seis; pero nunca puede haber más, debido a que los estados con cuatro, cinco y seis bacterias decaen al estado con una bacteria con probabilidad uno.

Sea q la probabilidad de que una bacteria se divida; en el enunciado $q = \frac{2}{3}$. La matriz de transición es

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-q)^3 & 3q(1-q)^2 & 3q^2(1-q) & q^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{M}.$$

Para ejemplificar el modo en que se obtuvo cada elemento, consideremos la transición de 3 a 5. Para pasar de 3 a 5 bacterias 2 deben dividirse y una no. Hay 3 formas de elegir a la bacteria que no se divide. Las dos que sí se dividen lo hacen con probabilidad q^2, y la probabilidad de que la tercera no se divida es $1-q$. Así, $P_{3\to5} = 3q^2(1-q)$.

(b) El estado estacionario es un vector de probabilidades $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{vM} = \mathbf{v}$. La probabilidad no se modifica con el paso del tiempo. Si uno prepara una colección de placas de Petri asignando un número dado de bacterias a cada una, de modo que el número de placas con j bacterias represente inicialmente una proporción $(\mathbf{v})_j$ del total de placas, al pasar el tiempo esa proporción de mantendrá. No es necesario en este punto resolver todo el problema de autovalores y autovectores, puesto que lo único que interesa son los autovectores con autovalor 1. No es necesario plantear ningún determinante, sino que basta con escribir el sistema de ecuaciones $\mathbf{v} = \mathbf{vM}$, que en este caso no es tan complicado de resolver:

$$\begin{aligned} (1-q)v_1 + v_4 + v_5 + v_6 &= v_1, \\ qv_1 + (1-q)^2 v_2 &= v_2, \\ 2q(1-q)v_2 + (1-q)^3 v_3 &= v_3, \\ q^2 v_2 + 3q(1-q)^2 v_3 &= v_4, \\ 3q^2(1-q)v_3 &= v_5, \\ q^3 v_3 &= v_6. \end{aligned}$$

Al resolver conviene mantener v_3 como variable independiente; todos los elementos de $\mathbf{v}$ serán entonces proporcionales a v_3. La condición $\sum v_i = 1$ fija v_3 (en verdad, esta suma representa la parte más laboriosa del cálculo; se sugiere usar algún programa). Para $q = \frac{2}{3}$ el resultado es

$$\mathbf{v} = \left\{ \frac{156}{431}, \frac{117}{431}, \frac{54}{431}, \frac{64}{431}, \frac{24}{431}, \frac{16}{431} \right\} \approx \{0.36, 0.27, 0.13, 0.15, 0.06, 0.04\}.$$

(c) Si inicialmente hay 2 bacterias, luego de 2 pasos el estado de probabilidad del sistema será

$$(0,1,0,0,0,0)\cdot\mathbf{M}^2 = \left(\frac{4}{9},\frac{1}{81},\frac{16}{243},\frac{4}{27},\frac{16}{81},\frac{32}{243}\right) \approx (0.44, 0.01, 0.07, 0.15, 0.20, 0.13)$$

(d) Supongamos que se modifica el problema asignando una probabilidad p, distinta de cero, de que cada bacteria muera. El estado con cero bacterias es absorbente. Además, debido a que desde cualquier estado es posible llegar al estado con cero bacterias con probabilidad no nula, la propia cadena de Markov es del tipo absorbente. Para este tipo de cadenas, sin importar el estado inicial, eventualmente la cadena llega a un estado absorbente. En el problema de las bacterias, hay un sólo estado absorbente. No hay otro estado estacionario que éste.

Problema 11

Las ecuaciones maestras que dependen de variables estocásticas discretas generalmente son más fáciles de resolver utilizando la denominada función generatriz, definida como:

$$F(z,t) = \sum_n p(n,t) z^n,$$

donde $P(n,t)$ es la probabilidad regida por la ecuación maestra en cuestión.

(a) Demostrar que

$$F(1,t) = 1, \qquad \partial_z F(1,t) = \langle n \rangle_t\,, \qquad \partial_{zz} F(1,t) = \left\langle n^2 \right\rangle_t - \langle n \rangle_t\,.$$

(b) La ecuación maestra

$$\dot{p}_n = p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n \qquad (-\infty < n < \infty)$$

representa la denominada caminata aleatoria simétrica. Hallar la ecuación diferencial que rige la evolución de la función generatriz correspondiente y resolver dicha ecuación para un estado inicial con probabilidad 1 para $n = 0$. Expandiendo $F(z,t)$ en potencias de z, demostrar que

$$p_n(t) = e^{-2t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+|n|}}{l!\,(l+|n|)!}.$$

[Al margen de lo que se pide demostrar, conocido el desarrollo de las funciones de Bessel I_n, uno podría también escribir $p_n(t) = e^{-2t} I_n(2t)$.]

▪ **Solución**. (a) Para todo t, la suma $\sum_n p(n,t)$ tiene que ser igual a 1. Evaluando $F(z,t)$ en $z=1$ se obtiene, justamente, esta suma:

$$F(1,t) = \sum_n p(n,t) = 1.$$

Para demostrar la segunda igualdad, de manera directa se calcula

$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=1} = \sum_n p(n,t) n z^{n-1}\Big|_{z=1} = \sum_n p(n,t) n = \langle n \rangle \, .$$

Del mismo modo,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big|_{z=1} = \sum_n p(n,t) n(n-1) z^{n-2}\Big|_{z=1} = \sum_n p(n,t)(n^2-n) = \left\langle n^2 \right\rangle - \langle n \rangle \, .$$

(b) Derivando F respecto del tiempo y usando la ecuación maestra para $p(n,t)$, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_n \dot{p}_n z^n = \sum_n (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n) z^n.$$

Mediante un cambio de la variable de la sumatoria, el primer término puede escribirse del siguiente modo

$$\sum_n p_{n+1} z^n = \sum_n p_n z^{n-1} = z^{-1} F.$$

Análogamente, $\sum_n p_{n-1} z^n = zF$. En definitiva

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{1}{z} + z - 2\right) F.$$

La integración es inmediata,

$$F(z,t) = A(z) \exp\left[\left(\frac{1}{z} + z\right) t\right] e^{-2t},$$

donde $A(z)$ es una función de z que debe determinarse a partir de la condición inicial,

$$A(z) = F(z,0) = \sum_n p_n(0) z^n.$$

Para el caso particular en que a tiempo cero la probabilidad de estar en el origen es 1,

$$A(z) = \sum_n \delta_{n,0} z^n = 1,$$

y entonces

$$F(z,t) = \exp\left[\left(\frac{1}{z} + z\right) t\right] e^{-2t}. \tag{2}$$

Conocida $F(z,t)$, para obtener $p_n(t)$ hay que desarrollar F en potencias de z. Los coeficientes de este desarrollo son las probabilidades $p_n(t)$. Para la función (2), hay que hacer el desarrollo de la exponencial

$$g(z) \equiv \exp\left[\left(\frac{1}{z} + z\right) t\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{1}{z} + z\right)^k.$$

A su vez

$$\left(\frac{1}{z}+z\right)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z^{k-2l}.$$

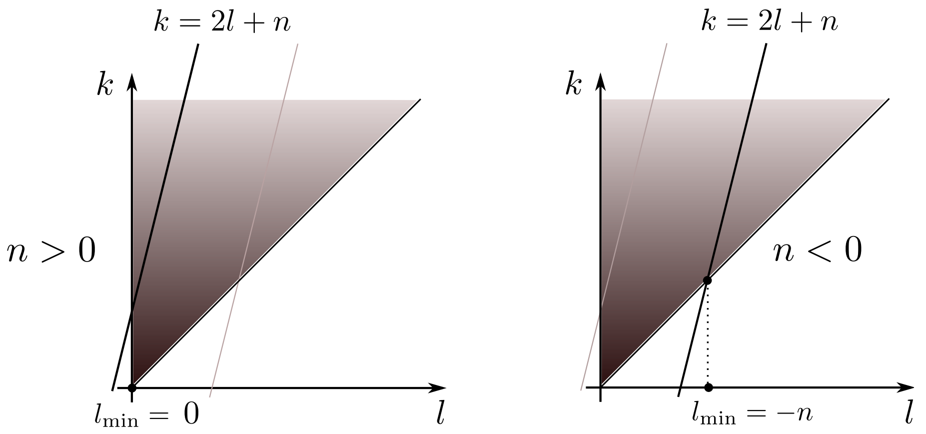
Luego,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{t^k}{k!} \binom{k}{l} z^{k-2l}.$$

Todo el trabajo que queda es organizar la doble sumatoria de modo de leer fácilmente el coeficiente que acompaña a cada potencia de z. Hay varias maneras de hacer esto. El camino más directo es definir una nueva variable $n = k - 2l$ y escribir la doble sumatoria eliminando k o l en términos de n. Por ejemplo, eliminando k,

$$g(z) = \sum_{n} \sum_{l} \frac{t^{n+2l}}{(n+2l)!} \binom{n+2l}{l} z^n.$$

A propósito no están escritos aquí los límites de las sumas, pues esa es la parte que requiere más elaboración. La región original sobre la que se sumaba en el plano lk se muestra en la figura, junto con las rectas sobre las cuales $n = k - 2l$ toma valores constantes.



Fácilmente se ve que para $n \geq 0$, los valores permitidos de l van entre 0 e infinito, pero para $n < 0$, tiene que ser $l \geq -n$. Así,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{l=-n}^{\infty}.$$

Aun se puede redefinir la variable de la última sumatoria para que comience en 0. Hecho esto queda

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{n+2l}}{(n+2l)!} \binom{n+2l}{l} + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{-n+2l}}{(-n+2l)!} \binom{-n+2l}{l}.$$

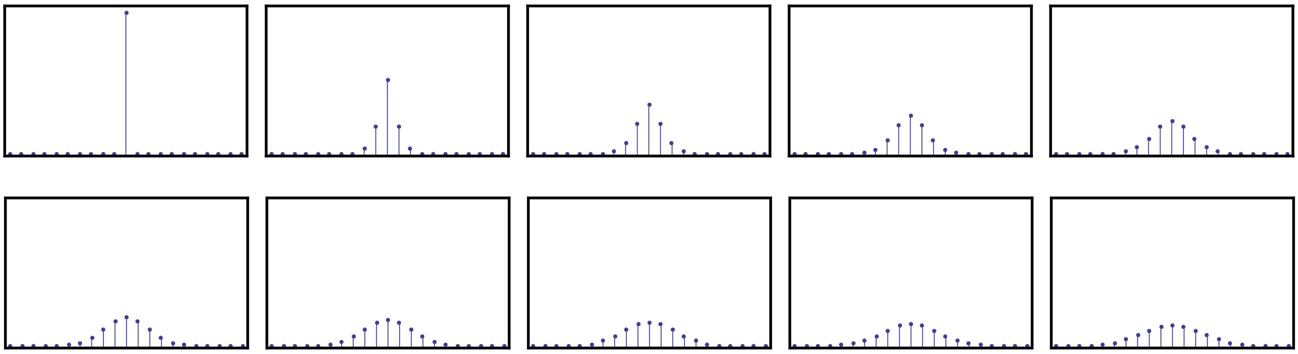
El cambio de n a $-n$ en la última sumatoria corresponde al cambio $l \longrightarrow l - n$ mencionado antes para ajustar el inicio de la segunda sumatoria en $l = 0$. Notando que en las sumas sobre l lo que aparece siempre es $|n|$, todo puede resumirse en un sólo término:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{|n|+2l}}{(|n|+2l)!} \binom{|n|+2l}{l} \right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{|n|+2l}}{l!(l+|n|)!} \right] z^n.$$

Lo que aparece entre corchetes no es otra que la función de Bessel $I_n(2t)$. Finalmente,

$$p_n(t) = e^{-2t} I_n(2t).$$

Abajo se muestra la función $p_n(t)$ con $|n| \leq 10$, para varios valores de t consecutivos empezando en $t = 0$.



Problema 12

En una caminata unidimensional al azar, la probabilidad de moverse hacia la derecha es α y hacia la izquierda es β. Escribir la ecuación maestra correspondiente. Utilizando la transformación

$$p_n(t) = q_n(t) \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{n/2} \exp\left[-\left(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \right) t \right],$$

encuentre la ecuación que satisface $q_n(t)$. A partir de ahí, encuentre la solución para $p_n(t)$ en el caso en que $p_n(0) = \delta_{n,0}$, y calcule $\langle n \rangle$. ¿A qué situación física corresponde este proceso?

Solución. La ecuación maestra en este caso es

$$\dot{p}_n = \alpha\, p_{n-1} + \beta\, p_{n+1} - (\alpha + \beta)\, p_n.$$

La transformación propuesta convierte esta ecuación en la de una caminata simétrica. En efecto, reemplazando p_n en términos de q_n en la ecuación maestra, luego de algunas simplificaciones queda

$$\dot{q}_n - \left(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \right) q_n = \alpha \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-1/2} q_{n-1} + \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2} q_{n+1} - (\alpha + \beta)\, q_n,$$

$$\longrightarrow \dot{q}_n = \sqrt{\alpha\beta}\, \big(q_{n-1} + q_{n+1} - 2q_n \big).$$

Para eliminar el factor $\sqrt{\alpha\beta}$ puede definirse una nueva variable temporal, $\tau = \sqrt{\alpha\beta}\,t$, o, de manera equivalente, introducirse una nueva función $s_n(t)$ definida por

$$s_n(t) = q_n\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha\beta}}\right),$$

que entonces satisface la ecuación de la caminata al azar simétrica del Problema 11:

$$\dot{s}_n = s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n.$$

La condición inicial $p_n(0) = \delta_{n,0}$ implica

$$q_n(0) = s_n(0) = \delta_{n,0}.$$

De acuerdo al Problema 11 la solución es

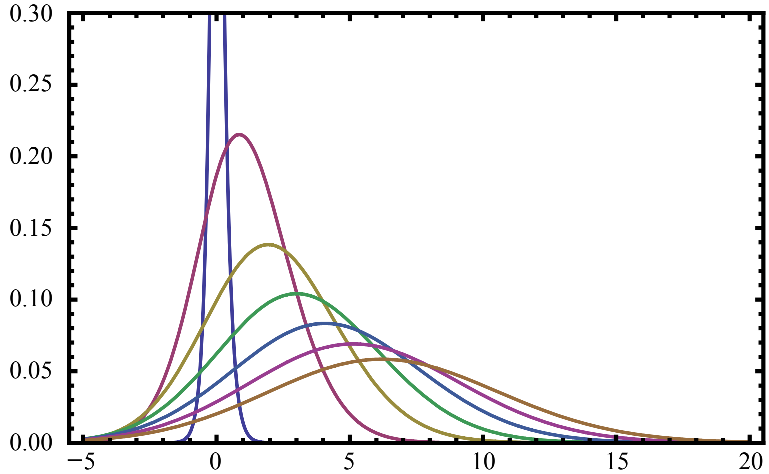
$$s_n(t) = e^{-2t} I_n(2t).$$

Deshaciendo la cadena de sustituciones, queda

$$p_n(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} \exp\left[-\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\,\right)t\right] s_n\left(\sqrt{\alpha\beta}\,t\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} \exp\left[-\left(\alpha+\beta\,\right)t\right]\, I_n\left(2\sqrt{\alpha\beta}\,t\right).$$

La figura muestra la evolución de la probabilidad cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. Las curvas corresponden a varios valores sucesivos de t entre 0 y 10.



Las funciones han sido graficadas considerando a n como variable continua, pero sólo los valores enteros son los que importan al problema.

Hay al menos dos maneras de calcular el valor medio $\langle n\rangle$. La primera es tratar de usar los resultados del problema anterior. Sabemos que

$$\langle n\rangle = \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=1}.$$

Escribiendo p_n en términos de s_n queda

$$F(z,t) = \sum_n p_n(t) z^n = \exp\left[-\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\,\right)t\right] \sum_n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} z^n s_n\!\left(\sqrt{\alpha\beta}\,t\right)$$

$$= \exp\left[-\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\,\right)t\right] F_s\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,z, \sqrt{\alpha\beta}\,t\right),$$

donde F_s es la función generatriz de la caminata simétrica, calculada en el problema anterior para la misma condición inicial,

$$F_s(z,t) = \sum_n z^n s_n(t) = \exp\left[\left(\frac{1}{z}+z\right)t\right] e^{-2t}.$$

Luego

$$F(z,t) = \exp\left[-\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\,\right)t\right] \exp\left[\left(\frac{\beta}{z}+\alpha z\right)t\right] e^{-2\sqrt{\alpha\beta}\,t}$$

$$= \exp\left[-\left(\alpha+\beta\,\right)t\right] \exp\left[\left(\frac{\beta}{z}+\alpha z\right)t\right].$$

Finalmente,

$$\langle n \rangle = \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{z=1} = (\alpha-\beta)t.$$

Otro método posible para calcular $\langle n \rangle$ es escribir y resolver su ecuación de movimiento. A partir de la ecuación maestra para p_n uno encuentra

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \sum_n n\dot{p}_n = \sum_n n\left[\alpha p_{n-1} + \beta p_{n+1} - (\alpha+\beta)p_n\right].$$

Sumas como las que aparecen aquí se calculan mediante un corrimiento del índice de sumación; por ejemplo,

$$\sum_n n p_{n-1} = \sum_n (n+1) p_n.$$

Haciendo eso, varios términos se cancelan y uno encuentra que

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = (\alpha-\beta)\sum_n p_n = \alpha-\beta.$$

Teniendo en cuenta que $\langle n \rangle_0 = 0$, entonces

$$\langle n \rangle = (\alpha-\beta)t.$$

Problema 13

Sea un proceso de Markov continuo en el tiempo cuyo rango consiste de enteros n y cuya matriz de transición es tal que sólo permite transiciones entre sitios adyacentes. Si r_n es la probabilidad por unidad de tiempo de que estando en n ocurra una transición hacia $n-1$, y g_n la correspondiente para que ocurra hacia $n+1$:

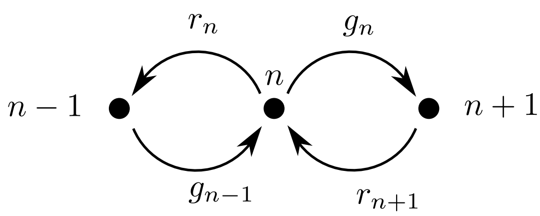
(a) Escriba la ecuación maestra correspondiente.

(b) Encuentre una ecuación para la evolución temporal de $\langle n \rangle$ (tenga en cuenta que tanto r_n como g_n pueden depender de n).

(c) Suponiendo que el rango está acotado a los enteros $n \geq 0$, resuelva la ecuación anterior para el caso $r_n = \alpha n$ y $g_n = \beta$ y halle la solución estacionaria. Discuta el caso $\beta = 0$.

Solución. (a) La ecuación maestra es

$$\dot{p}_n = r_{n+1}\, p_{n+1} + g_{n-1}\, p_{n-1} - (r_n + g_n)\, p_n.$$



(b) El valor medio de n es

$$\langle n \rangle = \sum_n n p_n.$$

La evolución temporal del valor medio se obtiene de manera directa:

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \sum_n n\dot{p}_n = \sum_n n\big[(r_{n+1}p_{n+1} + g_{n-1}p_{n-1} - (r_n + g_n)p_n\big].$$

Con un corrimiento adecuado de la variable n, cada término puede dejarse escrito de modo que aparezca siempre p_n,

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \sum_n \big[(n-1)r_n + (n+1)g_n - n(r_n + g_n)\big]p_n = \langle g - r \rangle\,,$$

donde

$$\langle g - r \rangle = \sum_n (g_n - r_n)p_n.$$

(c) En los pasos intermedios que llevaron a las expresiones anteriores aparecieron algunas cantidades evaluadas en $n-1$. Cuando el rango está restringido a $n \geq 0$, hay que tratar con cierto cuidado las sumas, para evitar términos donde aparezca p_{-1}. Al final el resultado para $d\langle n\rangle/dt$ termina siendo el mismo, con la salvedad de que debe ser necesariamente $r_0 = 0$, puesto que desde el sitio 0 no puede pasarse al sitio -1. El caso que propone el enunciado satisface esta condición, pues $r_n = \alpha n$ y $g_n = \beta$. Así, la ecuación maestra es

$$\dot{p}_n = (n+1)\alpha\, p_{n+1} + \beta p_{n-1} - (n\alpha + \beta)\, p_n,$$

y la expresión que aparece en el segundo miembro de la ecuación diferencial para $\langle n\rangle$ es

$$\langle g - r\rangle = \beta - \sum_{n\geq 0}^{\infty} \alpha n\, p_n = \beta - \alpha\langle n\rangle\,.$$

La ecuación para el valor medio termina siendo

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt} + \alpha\langle n\rangle = \beta,$$

que tiene por solución

$$\langle n\rangle = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\langle n\rangle_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}.$$

Cuando $t \longrightarrow \infty$ el valor medio tiende a $\langle n\rangle_\infty = \beta/\alpha$.

Si $\beta = 0$, las transiciones sólo pueden hacerse hacia la izquierda y $\langle n\rangle_\infty = 0$. Notar que un valor medio igual a cero de cantidades que son mayores que cero implica $p_n \longrightarrow 0$ para todo $n \neq 0$; el sistema siempre termina en el estado $p_n = \delta_{n,0}$, y esto podemos decirlo sin tener que resolver $p_n(t)$ explícitamente.

Problema 14

A tiempo $t = 0$, una muestra radioactiva tiene n_0 núcleos activos. Si la probabilidad de decaimiento de un núcleo activo por unidad de tiempo es α:

(a) Encontrar la ecuación maestra para el número de núcleos activos.

(b) Encontrar la ecuación de evolución para la función generatriz $F(z,t)$.

(c) Encontrar la condición inicial $F(z,0)$ y buscar una solución del tipo $F(z,t) = \phi\left[(1-z)\, e^{-\alpha t}\right]$.

(d) Calcular $\langle n\rangle$ y $\sigma = \left(\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2\right)^{1/2}$.

Solución. *Primer método*: Se sabe que la probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo decaiga es α. En un intervalo δt, la probabilidad de decaimiento de un núcleo es, por lo tanto, $\alpha\delta t$.

Supongamos que a tiempo t haya n núcleos. Entonces la probabilidad de que a tiempo $t + \delta t$ haya $n-1$ núcleos es igual a la probabilidad de que decaiga un sólo núcleo en el intervalo entre t y δt. Es decir, un núcleo debe decaer y $n-1$ núcleos deben permanecer. Hay n formas de elegir al núcleo que decae, de modo que la probabilidad de pasar de n a $n-1$ núcleos es

$$P_{n\rightarrow n-1} = n\,\alpha\delta t(1-\alpha\delta t)^{n-1} = n\alpha\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2).$$

En el mismo intervalo la probabilidad de pasar de n a $n-p$ núcleos, con $p>1$, es siempre una cantidad de orden mayor en δt, ya que con los mismos argumentos se obtiene que, en general,

$$P_{n\to n-p} = \binom{n}{p}(\alpha\delta t)^p(1-\alpha\delta t)^{n-p}.$$

A orden δt, la única transición relevante es la que va de n a $n-1$ núcleos, de modo que podemos escribir

$$p_n(t+\delta t) = p_{n+1}(t)P_{n+1\to n} + p_n(t)(1-P_{n\to n-1}) = (n+1)\alpha\delta t p_{n+1}(t) + (1-n\alpha\delta t)p_n(t).$$

Finalmente,

$$\dot{p}_n = (n+1)\alpha\, p_{n+1} - n\, p_n,$$

que es la misma ecuación que la del punto (c) del Problema 13. No es necesario hacer ninguna salvedad respecto al caso $n=0$, ya que está correctamente representado por esta misma ecuación.

La función generatriz $F(z,t)=\sum_n z^n p_n$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} z^n\big[(n+1)p_{n+1} - np_n\big] = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}p_n - z\alpha\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}p_n.$$

Las dos sumatorias representan la derivada de F respecto de z. Luego,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha(1-z)\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{3}$$

El enunciado sugiere buscar la solución en la forma $F(z,t)=\phi\left[(1-z)\,e^{-\alpha t}\right]$. Reemplazando en la Ec. (3) se ve que ésta se cumple independientemente de la elección de la función ϕ,

$$-\alpha(1-z)e^{-\alpha t}\phi\left[(1-z)\,e^{-\alpha t}\right] = -\alpha(1-z)e^{-\alpha t}\phi\left[(1-z)\,e^{-\alpha t}\right].$$

Lo que permitirá fijar ϕ es la condición inicial. Si a tiempo $t=0$ hay n_0 núcleos, entonces $p_n(0)=\delta_{n,n_0}$ y

$$F(z,0) = \sum_n z^n\delta_{n,n_0} = z^{n_0}.$$

Esto implica

$$\phi\left[(1-z)\right] = z^{n_0}.$$

Eligiendo $z=1-x$ se obtiene

$$\phi(x) = (1-x)^{n_0}.$$

En definitiva,

$$F(z,t) = \left[1-(1-z)e^{-\alpha t}\right]^{n_0}. \tag{4}$$

La probabilidad p_n es el coeficiente que acompaña a z^n en la expansión de F en potencias de z. Aquí esa expansión es sencilla,

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{n_0} \binom{n_0}{n} (1 - e^{-\alpha t})^{n_0 - n} e^{-n\alpha t} z^n.$$

Luego,

$$p_n(t) = \binom{n_0}{n} (1 - e^{-\alpha t})^{n_0 - n} e^{-n\alpha t}. \tag{5}$$

Nota respecto de la solución de la ecuación (3). Aun sin tener la inspiración de proponer para F la forma sugerida en el enunciado, es posible llegar a ella por otro camino. Lo primero que uno intentaría es separación de variables, buscando soluciones de la forma

$$f(z,t) = Z(z)T(t).$$

Reemplazando en la Ec. (3) y dividiendo por αf a ambos lados de la ecuación queda

$$\frac{T'}{\alpha T} = (1 - z)\frac{Z'}{Z}.$$

Una función de t igualada a una de z implica que ambas funciones son iguales a una constante,

$$\frac{T'}{\alpha T} = (1 - z)\frac{Z'}{Z} = -\lambda.$$

Buscamos una solución acotada en $t \geq 0$, eso nos obliga a restringir λ a valores mayores o iguales que cero. Luego resulta

$$f(z,t) = Ce^{-\lambda\alpha t}(1 - z)^\lambda = C\left[e^{-\alpha t}(1 - z)\right]^\lambda.$$

Una superposición de estas funciones sigue siendo solución. En particular, si λ se toma valores enteros pueden construirse soluciones de la forma

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[e^{-\alpha t}(1 - z)\right]^n.$$

Eligiendo convenientemente los coeficientes C_n, cualquier función ϕ bien comportada puede representarse por una serie de esa forma,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n.$$

Así, en general podrá decirse

$$F(z,t) = \phi\left[e^{-\alpha t}(1 - z)\right].$$

Segundo método: La idea de este método es la del Problema 1. Supongamos que inicialmente haya n_0 núcleos activos. La variable aleatoria X, que da el número de núcleos activos, puede pensarse como una suma de n_0 variables aleatorias. El estado de cada núcleo es una variable aleatoria x_i que puede tomar dos valores. Conviene elegir el valor 1 si el núcleo está activo y el valor 0 si ya decayó. Así,

$$X = \sum_i x_i.$$

Si los núcleos son independientes, cada uno podrá ser descripto por una probabilidad $q_m(t)$, donde m puede tomar dos valores, cero y uno: $q_0(t)$ da la probabilidad de que un núcleo haya decaído a tiempo t, y $q_1(t)$ la probabilidad de que aún no lo haya hecho. Como estas probabilidades son complementarias debe cumplirse $q_0(t) = 1 - q_1(t)$.

Si uno se pregunta entonces por la probabilidad de que a tiempo t haya n núcleos activos, hay que tener en cuenta que los n núcleos pueden elegirse de $\binom{n_0}{n}$ maneras, de modo que

$$p_n(t) = \binom{n_0}{n} q_1(t)^n \big[1 - q_1(t)\big]^{n_0 - n}. \tag{6}$$

Deben haber sobrevivido n núcleos y $n_0 - n$ deben haber decaído, de ahí el producto de probabilidades que aparece en esta expresión.

La ecuación maestra para q_m se escribe a partir de los datos del enunciado, que están referidos explícitamente a estas probabilidades individuales:

$$\dot{q}_1 = -\alpha q_1,$$

$$\dot{q}_0 = \alpha q_1.$$

Estas ecuaciones resultan mucho más fáciles de resolver que la ecuación maestra (3) de todos los núcleos tomados en conjunto, y en verdad basta con calcular $q_1(t)$, ya que $q_0 = 1 - q_1$,

$$q_1(t) = e^{-\alpha t} q_1(0),$$

$$q_0(t) = 1 - q_1(t) = 1 - e^{-\alpha t} q_1(0).$$

Inicialmente los n_0 núcleos están activos, lo que implica que $q_1(0) = 1$ para todos los núcleos. Reemplazando en la Ec. (6) se obtiene finalmente

$$p_n(t) = \binom{n_0}{n} e^{-n\alpha t} \big(1 - e^{-\alpha t}\big)^{n_0 - n},$$

en acuerdo con el resultado (5) obtenido por el primer método.

Para calcular $\langle n \rangle$ y $\sigma = \big(\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2\big)^{1/2}$ lo más sencillo es aplicar a la función generatriz de la Ec. (4) las fórmulas del Problema 11(a):

$$\langle n \rangle = \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{z=1} = n_0 e^{-\alpha t},$$

$$\big[\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2\big]^{1/2} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\bigg|_{z=1} + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2\right]^{1/2} = \langle n \rangle^{1/2} \big(1 - e^{-\alpha t}\big)^{1/2}.$$