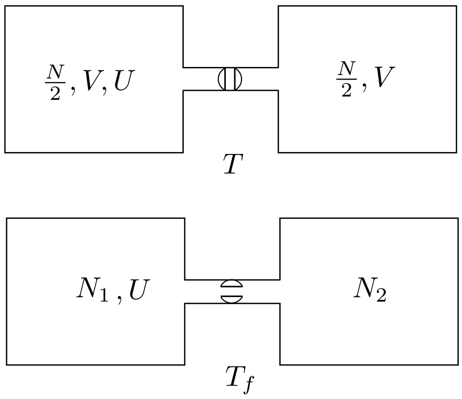
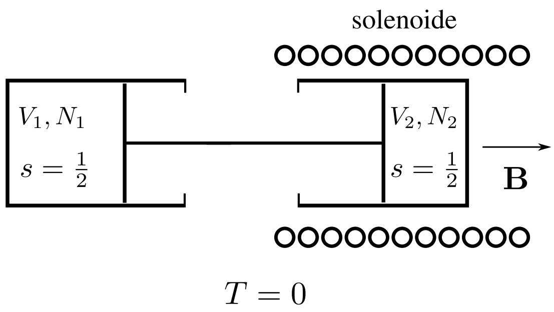
Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2012

Segundo parcial, con soluciones



problema 1



problema 2

Problema 1. Dos recipientes de volumen V contienen cada uno $N/2$ bosones de la misma especie, de espín cero y masa m. Tanto N como V son arbitrariamente grandes, pero el cociente N/V es finito (límite termodinámico). Ambos recipientes están a temperatura T, la cual puede variarse. Uno de los recipientes está sometido a un potencial uniforme $U > 0$, como muestra la figura. Inicialmente el paso que comunica los dos recipientes está cerrado y la temperatura es lo suficientemente alta como para que no exista condensado en ninguno de los recipientes.

(a) Si la temperatura se baja lentamente, ¿en qué orden aparecen los condensados en cada recipiente? ¿Cuál o cuáles son las temperaturas críticas?

(b) Suponga que la temperatura se ha disminuido hasta un valor T_f lo suficientemente bajo como para que haya condensado en los dos recipientes. Entonces se abre el paso que los comunica y se espera a que se alcance el equilibrio. Dependiendo del valor de T_f, ¿qué pasa con los condensados?, ¿sobreviven los dos, alguno de ellos o ninguno? Para cada alternativa posible dé los números de partículas N_1 y N_2 en cada recipiente.

Solución. (a) En la primera parte del problema cada recipiente puede considerarse independientemente del otro. El hecho de que en uno de los recipientes las partículas del gas tengan una energía potencial uniforme no afecta en nada a la condensación, simplemente cambia el valor crítico de la fugacidad, pero no la densidad ni la temperatura crítica.

En el recipiente que está a potencial U el número de partículas en los estados excitados es

$$N_{1e} = \frac{V}{h^3} \int d^3p \, \frac{1}{z_1^{-1} \exp\left[\beta\left(\dfrac{p^2}{2m} + U\right)\right] - 1} = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}\left(z_1 e^{-\beta U}\right).$$

La saturación de los estados excitados ocurre cuando $z_1 e^{-\beta U} = 1$. La condición sobre la temperatura y la densidad críticas nunca llega a enterarse de que hay un potencial,

$$\frac{N}{2} = \frac{V}{\lambda_c^3} \, g_{3/2}(1).$$

En el segundo recipiente la transición se produce cuando $z_2 = 1$, pero la condición crítica es la misma

$$\frac{N}{2} = \frac{V}{\lambda_c^3}\, g_{3/2}(1) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_c^3} = \frac{N}{2V g_{3/2}(1)}. \tag{1}$$

La condensación empieza a producirse en los dos recipientes simultáneamente cuando la temperatura alcanza el valor

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k}\left(\frac{N}{2V}\right)^{2/3}.$$

Las ecuaciones para el recipiente a potencial U son equivalentes a las del otro si se reemplaza su fugacidad z_1 por $\tilde{z}_1 = z_1 e^{-\beta U}$. Uno no tiene control directo sobre las fugacidades sino sobre T. Por ejemplo, para el número de partículas en los estados excitados es

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(\tilde{z}_1),$$

$$\frac{N_2}{V_2} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z_2).$$

Estas ecuaciones son ecuaciones para $\tilde{z}_1$ y z_2. No tiene ningún interés aquí averiguar z_1 por sí mismo. Finalmente, al ser $N_1 = N_2$ y $V_1 = V_2$, en todo momento $\tilde{z}_1 = z_2$. Los dos gases evolucionan del mismo modo.

(b) Se supone ahora que la temperatura está por debajo del valor crítico calculado anteriormente. Si se abre el paso entre los dos recipientes, estos ya no pueden ser considerados de manera independiente. Cuando se alcanza el equilibrio, z debe ser el mismo en todo el sistema.

Consideremos el número total de partículas que están en los estados excitados a una temperatura T,

$$N_e = N_{1e} + N_{2e} = \frac{V}{\lambda^3}\left[g_{3/2}\left(z e^{-\beta U}\right) + g_{3/2}(z)\right].$$

Como la función $g_{3/2}$ es creciente, el valor máximo de N_e se alcanza en el valor máximo de z. Mientras estaban aislados uno del otro, el primer recipiente podía tener un z máximo igual a $e^{\beta U}$, mientras que el segundo saturaba en un valor menor, $z_{\max} = 1$. Cuando ambos recipientes están conectados, el máximo valor posible de z es el mínimo entre 1 y $e^{\beta U}$, es decir 1, debido a que, por hipótesis, $U > 0$. De manera que en el límite termodinámico el número de partículas en el estado fundamental del primer recipiente siempre es despreciable, porque es imposible acercarse arbitrariamente al valor de z que satura sus niveles excitados. A lo sumo

$$N_{10} = \frac{1}{e^{\beta U} - 1},$$

y al tomar el límite termodinámico

$$\frac{N_{10}}{V} \longrightarrow 0.$$

Esto implica que sólo puede haber condensado en el segundo recipiente. La condición crítica se obtiene evaluando N_e en $z = 1$ e igualando al número total de partículas,

$$N = \frac{V}{\lambda_c^3}\left[g_{3/2}(1) + g_{3/2}\left(e^{-\beta_c U}\right)\right].$$

Luego,

$$\frac{1}{\lambda_c^3} = \frac{N}{V g_{3/2}(1)} \left[1 + \frac{g_{3/2}\left(e^{-\beta_c U}\right)}{g_{3/2}(1)}\right]^{-1}.$$

Puesto que $g_{3/2}$ es una función creciente y U es mayor que cero,

$$1 + \frac{g_{3/2}\left(e^{-\beta_c U}\right)}{g_{3/2}(1)} < 2.$$

Por lo tanto, la nueva temperatura crítica es mayor que la encontrada cuando los recipientes estaban desconectados, (1). Si T_f era menor que la temperatura crítica original, también será menor que la nueva temperatura crítica. La conclusión es que sigue habiendo condensado en el segundo recipiente, mientras que el que había originalmente en el primero desaparece.

Esto es bastante intuitivo. La diferencia de potencial entre los dos recipientes significa que hay una fuerza que empuja las partículas del primer recipiente hacia el segundo. Una vez que los recipientes están comunicados, las partículas que son empujadas fuera del primer recipiente aumentan la densidad en el segundo recipiente. Si uno aumenta la densidad de un gas en donde ya existe un condensado, tiende a condensar más partículas aún. En el límite en que $U \longrightarrow \infty$, el primer recipiente se vacía completamente, la densidad en el segundo se duplica y la temperatura crítica toma un valor máximo. Por el contrario, si $U \longrightarrow 0$, se recupera la temperatura crítica inicial y nada ocurre al abrir el paso entre los dos recipientes, lo que debería ser obvio.

El número final de partículas en cada recipiente puede calcularse del siguiente modo: en el primer recipiente no hay condensado, de modo que

$$N_1 = \frac{V}{\lambda_f^3}\, g_{3/2}\left(e^{-\beta_f U}\right).$$

La diferencia $N - N_1$ da el número de partículas en el segundo recipiente, que incluye tanto a las que están en los estados excitados como a las que forman el condensado.

Problema 2. Considere dos recipientes rígidos comunicados por un pistón móvil, como muestra la figura. Uno de los recipientes se encuentra dentro de un solenoide que puede producir un campo magnético uniforme. En cada recipiente hay un gas de fermiones de espín $s = 1/2$ y masa m. El número de fermiones en cada recipiente es N_1 y N_2, respectivamente. Todo el sistema está a $T = 0$. Inicialmente el sistema está en equilibrio con $V_1 = 2V_2$ y $B = 0$.

(a) Calcular N_1/N_2. (**Ayuda:** Piense en el pistón. Será útil calcular la energía de Fermi de ambos gases.)

(b) Se enciende la corriente por el solenoide y el campo magnético se fija en un valor B tal que la energía de Fermi del gas 2 termina siendo $\varepsilon_2 = \frac{\mu_B B}{2}$. Calcular el nuevo valor de V_1/V_2. El volumen ocupado por el gas 2, ¿aumentó o disminuyó? ¿Qué pasó con la presión y con la energía interna?

(c) Muestre que la energía de Fermi del gas 2 disminuyó. ¿Le parece anti-intuitivo? Interprete en términos de p_F (en no más de 4 renglones y, de ser posible, sin cálculos adicionales).

Solución. Cuando el pistón está en equilibrio, la presión de los dos gases debe ser la misma. La pregunta inicial no requiere ninguna cuenta: a igual temperatura y presión, los dos gases deben tener la misma densidad,

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

Esto mismo puede verse explícitamente. Es necesario escribir las ecuaciones que dan N/V y P en función del potencial químico y de la temperatura; recién al final tomaremos $T \longrightarrow 0$. Definiendo $\epsilon_0 = p^2/2m$, resulta

$$\frac{N}{V} = 2 \cdot \int \frac{d^3p}{h^3} \, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_0} + 1} = 2 \cdot \frac{4\pi m(2m)^{1/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon_0 \, \frac{\epsilon_0^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_0} + 1}.$$

El factor 2 adelante de todo corresponde a la degeneración por el espín. Cuando $T \longrightarrow 0$, la función de distribución es un escalón que corta la integral en la energía de Fermi ϵ,

$$\frac{N}{V} = 2 \cdot \alpha\epsilon^{3/2},$$

donde

$$\alpha = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{3h^3}.$$

Para calcular la presión podemos usar la fórmula que relaciona P con la densidad de energía,

$$P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}.$$

Sin embargo, como después habrá campo magnético, conviene seguir los pasos más generales,

$$\beta PV = 2 \cdot V \int \frac{d^3p}{h^3} \, \log\left(1 + ze^{-\beta\epsilon_0}\right) = 2 \cdot \beta V \, \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} \int_0^\infty d\epsilon_0 \, \frac{\epsilon_0^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_0} + 1}.$$

Luego,

$$P = 2 \cdot \alpha \int_0^\infty d\epsilon_0 \, \frac{\epsilon_0^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_0} + 1}.$$

Cuando $T \longrightarrow 0$,

$$P = 2 \cdot \, \frac{2}{5}\alpha\epsilon^{5/2}.$$

Cuando no hay campo magnético, las cuatro ecuaciones necesarias son

$$\frac{N_1}{V_1} = 2 \cdot \alpha\epsilon_1^{3/2}, \qquad \frac{N_2}{V_2} = 2 \cdot \alpha\epsilon_2^{3/2};$$

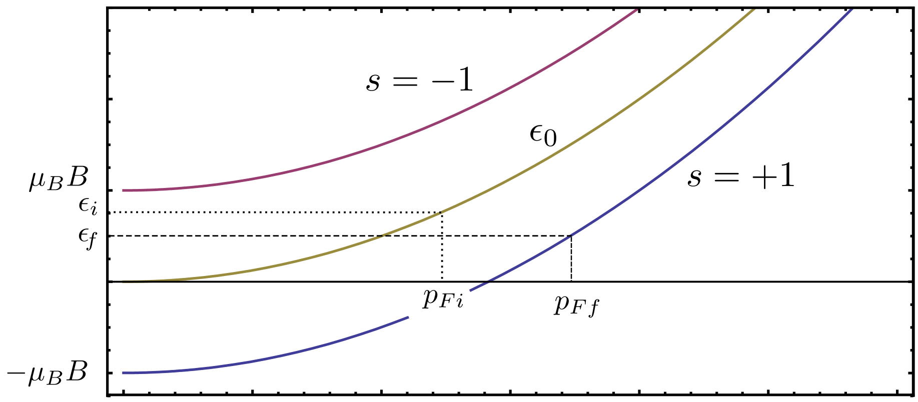
$$P_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}\alpha\epsilon_1^{5/2}, \qquad P_2 = 2 \cdot \frac{2}{5}\alpha\epsilon_2^{5/2}.$$

La igualdad de las presiones implica la igualdad de las energías de Fermi de cada gas, y a su vez esto implica que las densidades son iguales, como habíamos demostrado antes con argumentos más directos.

Cuando se enciende el campo magnético los dos estados de espín no son equivalentes. La energía de una partícula del gas en el segundo recipiente es

$$E(p, s) = \epsilon_0 - s\mu_B B,$$

donde $\epsilon_0 = p^2/2m$ y s toma los valores ± 1. Gráficamente,



El comportamiento del sistema depende mucho de la relación entre el potencial químico y la posición de los mínimos de las dos curvas. El dato del problema es que el potencial químico es $\epsilon = \mu_B B/2$, es decir, está por debajo de la rama superior de la energía. Como la temperatura es cero, esto implica que todas las partículas tienen la misma proyección del espín, ninguno de los niveles de la rama superior está ocupado. Si antes uno podía acomodar N fermiones con un impulso máximo p_F, ahora sólo podrá acomodarse la mitad. Como el número de partículas es proporcional al producto Vp_F^3, esto significa que a igual número de partículas, el producto Vp_F^3 debe aumentar.

En general las ecuaciones para N/V y P en el caso en que $B > 0$ serían

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d^3p}{h^3} \left[\frac{1}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 - \mu_B B)} + 1} + \frac{1}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 + \mu_B B)} + 1} \right],$$

$$= \frac{4\pi m (2m)^{1/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon_0 \left[\frac{\epsilon_0^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 - \mu_B B)} + 1} + \frac{\epsilon_0^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 + \mu_B B)} + 1} \right].$$

$$P = kT \int \frac{d^3p}{h^3} \left\{ \log\left[1 + ze^{\beta(\epsilon_0 - \mu_B B)}\right] + \log\left[1 + ze^{\beta(\epsilon_0 + \mu_B B)}\right] \right\}$$

$$= \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{3h^3} \int_0^\infty d\epsilon_0 \left[\frac{\epsilon_0^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 - \mu_B B)} + 1} + \frac{\epsilon_0^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0 + \mu_B B)} + 1} \right].$$

El primer término en cada integral corresponde a los niveles con $s = +1$, y el segundo a $s = -1$. Según el enunciado $\epsilon = \mu_B B/2$. Cuando $T \longrightarrow 0$, el límite de integración efectivo para los niveles con $s = -1$ está en $\epsilon_0 = \epsilon - \mu_B B = -\mu_B B/2$. Como esta cantidad es menor que cero, y ϵ_0 es siempre mayor que cero, ocurre lo que notábamos antes, que ningún nivel con $s = -1$ está poblado. El límite de integración para los niveles con $s = +1$ está en $\epsilon_0 = \epsilon + \mu_B B = 3\mu_B B/2$. Definamos

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + \mu_B B = \frac{3}{2}\mu_B B.$$

Entonces

$$\frac{N}{V} = \alpha \tilde{\epsilon}^{3/2},$$

$$P = \frac{2}{5}\alpha \tilde{\epsilon}^{5/2}.$$

Formalmente estas ecuaciones son iguales a las que se obtienen sin campo magnético, salvo por el factor de degeneración.

Cuando el campo magnético está encendido tendremos las siguientes ecuaciones

$$\frac{N_1}{V_1} = 2 \cdot \alpha \epsilon_1^{3/2}, \qquad \frac{N_2}{V_2} = \alpha \tilde{\epsilon}^{3/2},$$

$$P_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}\alpha \epsilon_1^{5/2}, \qquad P_2 = \frac{2}{5}\alpha \tilde{\epsilon}^{5/2}.$$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones entre sí y recordando que $N_1/N_2 = 2$, se obtiene

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{\epsilon_1}{\tilde{\epsilon}}\right)^{3/2}.$$

Por otro lado, de la igualdad de las presiones resulta

$$\frac{\epsilon_1}{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2^{2/5}}.$$

Finalmente,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2^{3/5}}.$$

Esta cantidad es mayor que $1/2$, que era la relación inicial entre los dos volúmenes, por lo tanto, como habíamos previsto, V_2 aumenta al encender el campo.

La presión final puede calcularse usando cualquiera de los dos gases. Por ejemplo,

$$P_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}\alpha \left(\frac{N_1}{2\alpha V_1}\right)^{5/3}.$$

Esto debe compararse con la presión existente antes de encender el campo, que se calcula de igual manera

$$P_{1i} = 2 \cdot \frac{2}{5}\alpha \left(\frac{N_1}{2\alpha V_{1i}}\right)^{5/3}.$$

Debido a que en el estado final el volumen es menor, la presión final será mayor que la que había en un comienzo. Explícitamente, puesto que $V_1 + V_2 = V$ es constante, usando las relaciones entre los volúmenes de cada gas antes y después de encender el campo, se encuentra

$$V_{1i} = \frac{2}{3}V, \qquad V_1 = \frac{V}{1 + 2^{-3/5}}.$$

Así se obtiene

$$\frac{P_1}{P_{1i}} = \left[\frac{2}{3}\left(1+2^{-3/5}\right)\right]^{5/3} \approx 1.2$$

Respecto a la energía interna del gas dentro del solenoide, inicialmente es

$$U_i = \frac{3}{2}P_{2i}V_{2i} = \frac{3}{5}\frac{N_2^{3/5}}{(\alpha V/)^{2/3}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3},$$

y luego de encender el campo

$$U_f = V\int \frac{d^3p}{h^3}\,\left[\frac{\epsilon_0-\mu_B B}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0-\mu_B B)}+1}+\frac{\epsilon_0+\mu_B B}{z^{-1}e^{\beta(\epsilon_0+\mu_B B)}+1}\right],$$

$$U_f \longrightarrow V\frac{4\pi m(2m)^{1/2}}{h^3}\int_0^{\tilde{\epsilon}} d\epsilon_0\ \epsilon_0^{1/2}(\epsilon_0-\mu_B B) = \frac{3}{2}P_{2f}V_2-\mu_B B N_2$$

$$= -\frac{1}{15}\frac{N^{5/3}}{(\alpha V)^{2/3}}(1+2^{3/2})^{2/3}.$$

Para escribir esta última expresión se ha usado que $\mu_B B = 2\tilde{\epsilon}/3$. Notemos de paso que la relación entre la densidad de energía y la presión puede escribirse del mismo modo que en el gas sin campo, siempre que se reste el término constante asociado al campo magnético. En efecto,

$$P = \frac{2}{3}\frac{U_f'+}{V_2},$$

donde

$$U_f' = U_f + \mu_B B N_2.$$

Esto es esperable, porque la presión depende de la energía cinética de las partículas. El efecto del campo magnético es eliminar la degeneración; es como si los fermiones tuvieran espín 0 y se redefiniese el cero de la energía.

Para terminar, la energía de Fermi inicial del gas en el segundo recipiente está dada por

$$\epsilon_i = \left(\frac{N_2}{2\alpha V_{2i}}\right)^{2/3}.$$

La energía de Fermi final puede obtenerse en un par de pasos:

$$\epsilon = \frac{1}{3}\tilde{\epsilon} = \frac{1}{3}\left(\frac{N_2}{\alpha V_2}\right)^{2/3}.$$

Usando los resultados

$$V_{2i} = \frac{V}{3}, \qquad V_2 = \frac{V}{1+2^{3/5}},$$

resulta

$$\epsilon_i = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{N_2}{\alpha V}\right)^{2/3}, \qquad \epsilon = \frac{1}{3}\left(1 + 2^{3/5}\right)^{2/3} \left(\frac{N_2}{\alpha V}\right)^{2/3}.$$

Es fácil ver que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} > 1, \qquad \frac{1}{3}\left(1 + 2^{3/5}\right)^{2/3} < 1.$$

Es decir, la energía de Fermi disminuyó. Habíamos remarcado más arriba, que la reducción en la degeneración implicaba el aumento del producto $V p_F^3$ para el gas en el segundo recipiente. En verdad, la constancia del número de partículas implica

$$2 \cdot V_{2i} p_{Fi}^3 = V_2 p_F^3.$$

No es díficil comprobar que los resultados anteriores implican esta relación. Además, también puede verse que

$$\left(\frac{p_F}{p_{Fi}}\right)^3 = 2\,\frac{1 + 2^{3/5}}{3} > 1.$$

Para dar cuenta de la reducción a la mitad del factor de degeneración, no sólo aumenta el volumen sino también el impulso de Fermi.

Problema 3. Para un modelo de Ising unidimensional de N espines, con condiciones de contorno periódicas, acoplamiento a primeros vecinos J y campo externo B, calcule la función de correlación de dos espines vecinos en el límite $N \longrightarrow \infty$,

$$G(J, B, T) = \langle s_i s_{i+1} \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_{i+1} \rangle .$$

A partir del resultado general, estudie los casos particulares (i) $J \longrightarrow 0$ y (ii) $B \longrightarrow 0$.

[Este último problema está tomado del libro de Dalvit *et al*, es el 5.21; la solución puede consultarse ahí mismo.]