Física Teórica 3 − 1er. cuatrimestre de 2012

Segundo recuperatorio (23/7)

Problema 1. Los fermiones de Dirac son partículas de espín $1/2$ con la siguiente característica: sus estados, en ausencia de campo magnético, se dan en pares de energías positivas y negativas, independientes de la proyección del espín,

$$\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}.$$

Es decir, para cada proyección de espín y cada valor de $\mathbf{p}$ hay dos estados, uno con energía $\mathcal{E}_+(\mathbf{p})$ y otro con energía $\mathcal{E}_-(\mathbf{p}) = -\mathcal{E}_+(\mathbf{p})$.

(a) Para **cualquier** sistema de fermiones no interactuantes, con potencial químico μ, muestre que la probabilidad de encontrar ocupado un estado de energía $\mu + E$ es la misma que la de encontrar desocupado un estado de energía $\mu - E$ (esto es, asumiendo que ambos estados existan). Ilustre este resultado a partir de un gráfico de la distribución de Fermi−Dirac.

(b) Suponga que las partículas ocupan un volumen V. Calcule y grafique cualitativamente la densidad de estados para los fermiones de Dirac en función de la energía.

(c) Escriba una expresión integral para el número de fermiones de Dirac con energías positivas y negativas, $N_\pm$ respectivamente, de la forma

$$N_\pm(\mu) = \int_{\mathcal{E}_0}^{\infty} d\mathcal{E}\; g_\pm(\mathcal{E}, \mu),$$

donde $\mathcal{E}_0 = mc^2$. Trate de simplificar su resultado usando el ítem (a).

(d) El estado de los fermiones de Dirac a $T = 0$ es tal que todos los niveles con energía negativa están ocupados y todos los niveles con energía positiva están vacíos. Use esta información y los resultados anteriores para demostrar que $\mu = 0$ a cualquier temperatura. [*Ayuda*: en esencia, basta con un gráfico para demostrarlo, usando los ítems (a) y (b); pero puede recurrir también a las expresiones del ítem (c).]

Problema 2. Un gas bidimensional de N bosones está contenido en una caja de área A. En la caja hay un potencial no uniforme que hace que los niveles de energía de una partícula sean

$$\epsilon_0 = 0, \qquad \epsilon_{\mathbf{p}} = \Delta + \frac{p^2}{2m},$$

donde $\Delta > 0$ y $\mathbf{p}$ está cuantizado como en el caso usual de una caja a potencial cero.

(a) Escriba la ecuación que determina el potencial químico.

(b) Al tomar el límite termodinámico, en el caso 2D usual el condensado se produce en $T = 0$. ¿Qué ocurre para el gas en esta caja modificada?

Problema 3. Para una cadena de Ising unidimensional, periódica, con acoplamiento $J_1 > 0$ a primeros vecinos y $J_2 > 0$ a segundos vecinos:

(a) Halle el hamiltoniano efectivo de un par de espines vecinos teniendo en cuenta exactamente la interacción entre ellos pero usando campo medio para el resto de las interacciones.

(b) En la misma aproximación, calcule la función de partición y la distribución de probabilidad de los estados del par de espines.

(c) Halle la ecuación de autoconsistencia para el valor medio del espín y muestre que existe una T_c por debajo de la cual, en esta aproximación, el sistema presenta una fase ferromagnética.