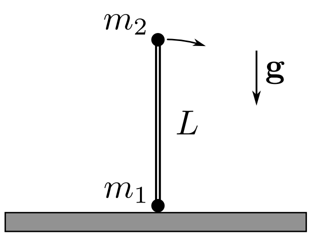
Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2011

Guía 1: *Ecuaciones de Newton. Fuerzas de vínculo.*
Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.

1. Dos masas, m_1 y m_2, de tamaño despreciable, están unidas por una barra rígida de longitud L. Se coloca la barra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como muestra la figura, y se la aparta levemente de la vertical. ¿En qué punto de la superficie golpea m_2?



2. Una partícula está sometida a una fuerza $F(x) = -kx + a/x^3$, con k y a mayores que cero.

   (a) Hallar el potencial $U(x)$. Discutir los tipos de movimiento posibles. Hallar las posiciones de equilibrio estable y encontrar la solución general $x(t)$.

   (b) Interpretar el movimiento en el límite $E^2 \gg ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones?

   (c) Interpretar el movimiento en el límite $E^2 \longrightarrow ka$ cuando $E^2 > ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones?

3. Hallar el vector velocidad y el vector aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas. Dentro de lo posible, interprete gráficamente cada término.

4. Un disco homogéneo de masa M y radio R está girando con velocidad angular ω. Una mosca de masa m, que inicialmente se encuentra en el centro del disco, camina radialmente hacia el borde del disco con velocidad radial constante.

   (a) Si el disco es obligado a girar con velocidad angular constante por un motor, ¿qué torque debe hacer éste para compensar el movimiento de la mosca? ¿Cuál es la fuerza de Coriolis que siente la mosca?

   (b) Si el disco gira libremente, ¿cuál será la velocidad angular del disco cuando la mosca esté a una distancia d del centro?

5. Un disco homogéneo de masa m y radio r rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto de la horizontal.

   (a) Halle su aceleración angular y la aceleración lineal de su centro.

   (b) Si en $t = 0$ el centro del disco estaba en reposo a una altura h respecto del suelo, ¿cuáles son su velocidad angular y lineal al llegar a éste? ¿Qué es lo que define la llegada del disco al suelo?

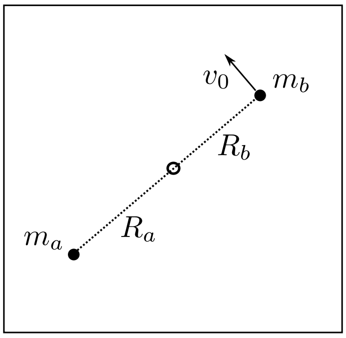
   (c) ¿Qué magnitudes se conservan en el movimiento del disco antes de tocar el suelo?

6. Dos partículas de masas m_a y m_b están sobre una mesa horizontal sin fricción, unidas por una cuerda tensa que pasa por un anillo pequeño, sin fricción, fijo a la mesa. Inicialmente las partículas están quietas, a distancias R_a y R_b del anillo. En $t = 0$, la masa m_b recibe un impulso perpendicular a la cuerda y adquiere una velocidad v_0.

   (a) ¿Qué magnitudes se conservan?

   (b) Dar las velocidades de las partículas en función de su distancia al anillo.

   (c) Hallar la tensión de la cuerda en función de la distancia de una masa al anillo.

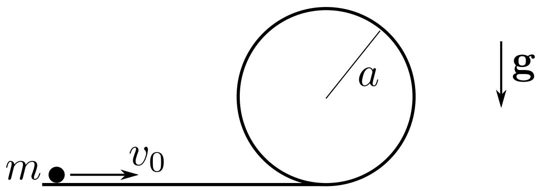


7. Se lanza con velocidad v_0 una partícula por el extremo horizontal de una vía sin rozamiento. La vía termina en un aro circular de radio a.

   (a) Calcular la fuerza de vínculo en función de la posición de la partícula y de su energía inicial.

   (b) En función de la velocidad inicial, encontrar en qué punto se despega la partícula del aro.

   (c) Describir las posibles trayectorias.



8. Una partícula de masa m puede deslizarse sobre una barra de longitud infinita y sin masa. La barra está sobre el plano xy y tiene libertad para girar alrededor de uno de sus puntos, que está siempre fijo al origen. La partícula puede deslizarse a todo lo largo de la barra, incluso a través del punto fijo al origen.

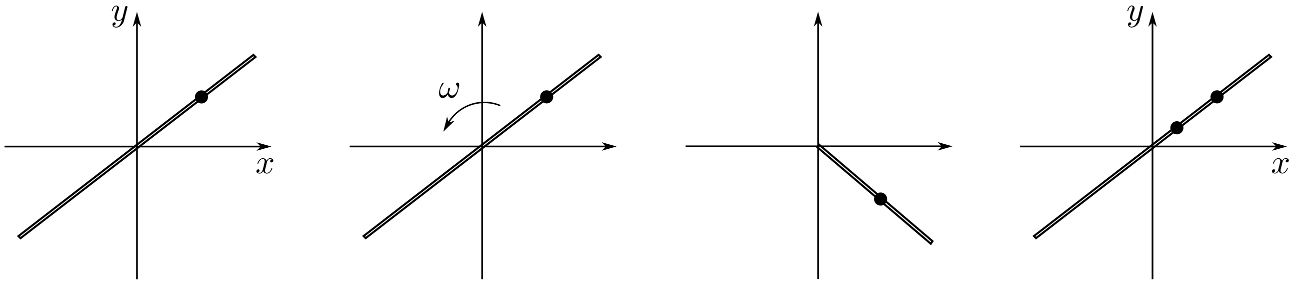
   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   (b) ¿Existen ecuaciones de vínculo?

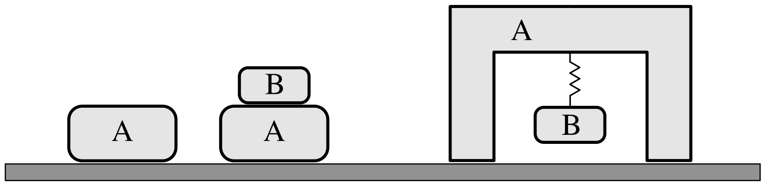
   (c) ¿Qué sucede con las cuestiones anteriores si en lugar de girar libremente la barra rotase con velocidad angular constante alrededor del origen?

   (d) ¿Qué sucede si la partícula no puede atravesar el punto de la barra fijo en el origen?

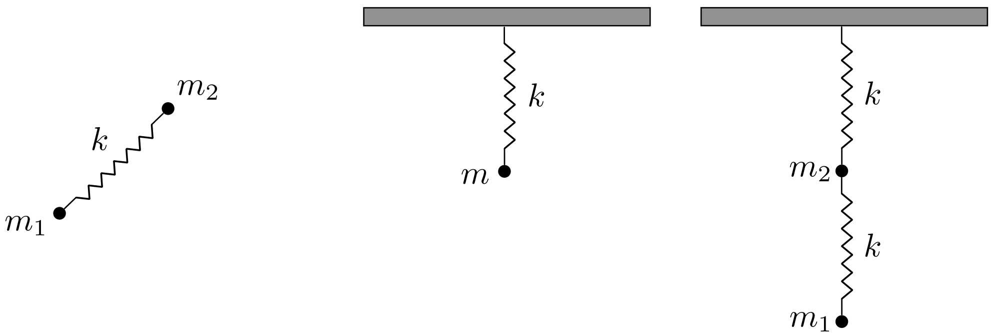
(e) ¿Qué sucede con todas las cuestiones anteriores si se agrega una segunda partícula, con la restricción de que una partícula no puede cruzar sobre la otra?



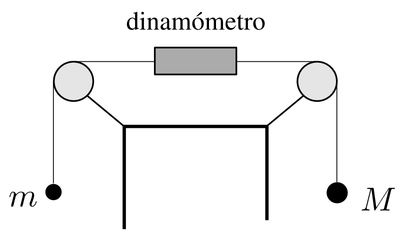
9. Para los sistemas (en equilibrio) de las figuras, indique todas las fuerzas aplicadas, qué interacciones representan y cuáles forman pares de acción y reacción.



10. ¿Tiene sentido decir que la fuerza de un resorte es conservativa? Si se verifica $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, ¿es $\mathbf{F}$ conservativa? Analice los siguientes ejemplos, indicando claramente cuál es el sistema mecánico cuya energía se considera.



11. ¿Cuánto marca el dinamómetro de la figura?



12. Dadas dos masas puntuales, expresar matemáticamente el hecho de que las fuerzas de interacción entre ambas estén sobre la recta que las une.

13. ¿Es posible que se conserve el impulso lineal y no se conserve la energía? ¿Y viceversa? Dé ejemplos.

14. ¿Pueden conservarse dos componentes del impulso angular de una partícula y no conservarse la tercera?

15. ¿$F_r = 0$ implica p_r constante? Justifique, dé ejemplos. ¿p_r constante implica $F_r = 0$? Justifique, dé ejemplos.

16. Un sistema de masas puntuales es descripto desde un sistema inercial, respecto del cual la masa m_i tiene posición $\mathbf{r}_i$ e impulso $\mathbf{p}_i$. Respecto del sistema centro de masa, las posiciones y los impulsos son $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{p}'_i$.

    (a) Compare las siguientes definiciones del impulso angular referido al centro de masa:

    i. $\mathbf{L}_1 = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$.

    ii. $\mathbf{L}_2 = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}'_i$.

    iii. $\mathbf{L}_3 = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}_i$.

    (b) Encuentre la relación entre el impulso angular referido al sistema inercial y aquel referido al sistema centro de masa.

17. Dos partículas aisladas interactúan entre sí.

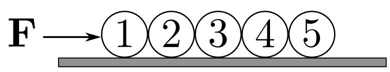
    (a) Si el impulso angular respecto del centro de masa, $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$, es constante, ¿es válido afirmar que el impulso angular respecto de cualquier otro punto, en reposo o en movimiento arbitrario, también se conserva? Dé un ejemplo físico.

    (b) Visto desde el sistema de centro de masa, ¿bajo qué condiciones el movimiento de las partículas es unidimensional, bidimensional o tridimensional?

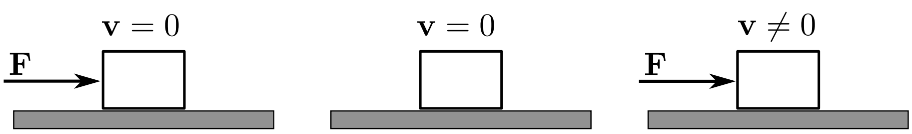
    (c) Si $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$ es constante, ¿entonces el movimiento respecto del CM será plano? ¿Por qué?

18. Si el centro de masa de un sistema está acelerado, ¿sigue siendo válida la relación $d\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}/dt = \mathbf{N}_{\mathrm{CM}}$?

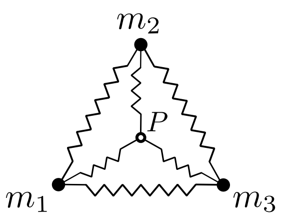
19. Las esferas de la figura se mueven sobre un carril horizontal sin rozamiento. Si se aplica una fuerza horizontal sobre la primera esfera, encuentre la fuerza neta sobre cada una de ellas y los valores de las fuerzas de contacto sobre la tercera y la quinta.

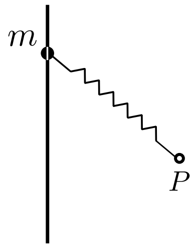


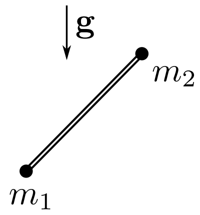
20. Para las condiciones de las figuras, indique cuánto vale la fuerza de rozamiento ($\mu_e \neq 0$).



21. Para cada uno de los ejemplos que se muestran, indique detalladamente qué magnitudes se conservan y por qué. En cada caso, hágalo para cada partícula y para todo el sistema. (En los dos primeros sistemas, P es un punto fijo.)



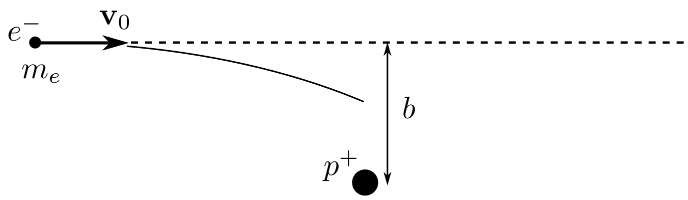




22. Considere un protón en reposo en un sistema fijo. Desde el infinito incide un electrón con velocidad v_0, y cuyo movimiento, cuando está muy lejos del protón, es aproximadamente rectilíneo y uniforme. Se define el parámetro de impacto b como la mínima distancia de acercamiento entre el protón y el electrón si éste no se desviara y aquél permaneciera en reposo. Al acercarse al protón, la trayectoria se curva debido a la interacción electromagnética entre ambos. Como la masa del protón es mucho mayor que la del electrón, puede asumirse que el protón está fijo y que el electrón se mueve en el potencial electrostático $U(r) = e^2/r$.

    (a) ¿Qué magnitudes se conservan?

    (b) A partir de las magnitudes conservadas, calcule la distancia de mínimo acercamiento.



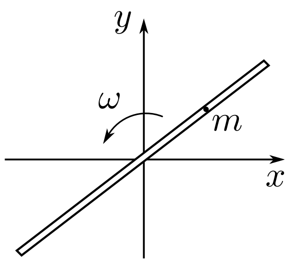
23. Utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas, obtenga las ecuaciones de movimiento para un péndulo plano y para uno esférico.

24. Una partícula de masa m está restringida a moverse sin fricción en el interior de un tubo cilíndrico muy delgado. El tubo rota con velocidad angular constante ω alrededor del origen.

    (a) ¿Qué magnitudes de conservan?

    (b) Hallar las ecuaciones de movimiento para la partícula en coordenadas cartesianas y en polares.

    (c) Hallar la fuerza de vínculo en función del tiempo si en el instante inicial la masa está quieta con respecto al tubo y a una distancia a del origen.



25. Sobre el eje x hay un conjunto infinito de partículas puntuales de igual masa, numeradas según los enteros 0, 1, 2, etc. La configuración inicial se muestra en la figura: para $t < 0$ todas las partículas están quietas: la partícula 0 está en $x_0 = 1$; la partícula 1, en $x_1 = 1/2$; la 2, en $x_2 = 1/4$; y, en general, la partícula n está en $x_n = 2^{-n}$. En $t = 0$ se da a la partícula 0 una velocidad $v = -1$, de manera que choca contra la partícula 1 en $t = 1/2$, iniciando una sucesión de choques perfectamente elásticos.

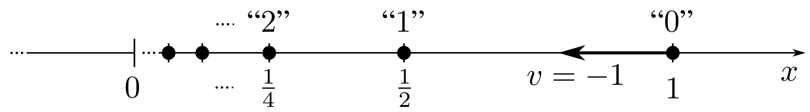
(a) ¿Cuál es el estado del sistema inmediatamente después de que la partícula 0 choca contra la 1?

(b) Encuentre la posición y la velocidad de la partícula 1 para todo t.

(c) Demuestre que, en general, la partícula n se mueve con velocidad v entre x_n y x_{n+1} durante el intervalo de tiempo comprendido entre ciertos t_n y t_{n+1}, pero que fuera de ese intervalo permanece en reposo. ¿A qué valor converge la suma de la longitud de todos los intervalos $t_{n+1} - t_n$?

(d) Muestre que para $t > 1$ todas las partículas están en reposo.

(e) Si a $t > 1$ todas las partículas están en reposo, y todos los choques han sido elásticos y no ha habido fuerzas externas ¿qué sucedió con la energía y el impulso iniciales?



$t = 0$