

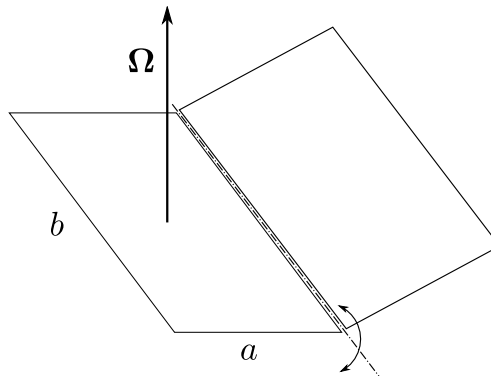
Algunos problemas resueltos de la Guía 6

Problema 8	1
Problema 10	6
Problema 11	9
Problema 16	13
Problema 20	17

Problema 8

Dos placas rectangulares de lados a y b tienen espesor despreciable. Una de ellas se mantiene horizontal y está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular constante Ω según el eje z . La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura.

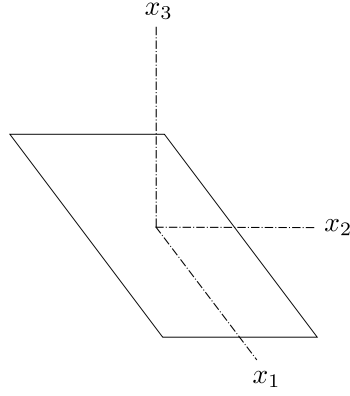
- (a) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.
- (b) ¿Existe algún punto de equilibrio estable?
- (c) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.
- (d) ¿Existe ahora algún punto de equilibrio estable?



■ **Solución.** La única placa que importa en este problema es la que puede girar alrededor de la bisagra. Su energía cinética puede escribirse como la suma de un término asociado al movimiento de su centro de masa más un término asociado a la rotación alrededor del centro de masa,

$$T = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{\text{cm}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

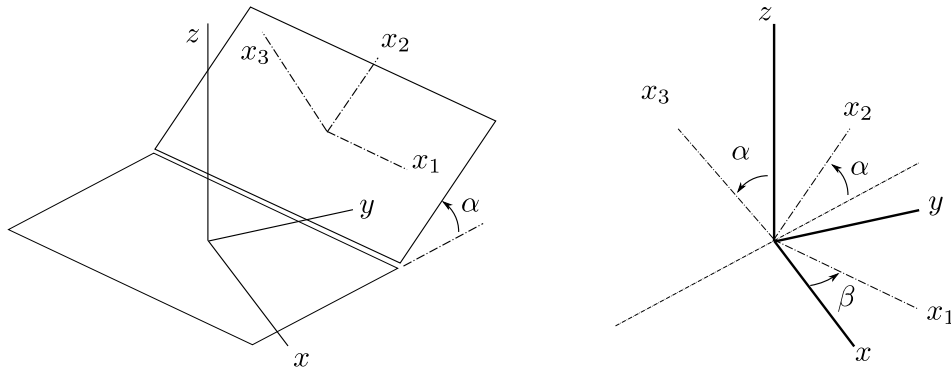
El tensor de inercia debe calcularse tomando como origen el centro de masa. Lo más cómodo en este caso es escribir $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{I}_{\text{cm}}$ según un sistema de coordenadas fijo al cuerpo y cuyos ejes coincidan con los ejes principales de inercia, mostrados en la figura siguiente.



El tensor de inercia se calcula fácilmente y es

$$\mathbf{I}_{\text{cm}} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

La figura de abajo muestra la definición de los ángulos que sirven para dar la posición de la placa.



Notar que el eje x_1 está siempre en el plano xy , además $\beta = \Omega t$. Es claro que si se conoce el ángulo α y el tiempo t la configuración del sistema queda completamente determinada. De esta forma, el ángulo α puede elegirse como la única coordenada generalizada del problema.

La cuestión principal es encontrar ω . Para eso notemos que una variación del ángulo α genera una velocidad angular dirigida según la dirección eje $\hat{x}_1$ y de valor $\dot{\alpha}$. Por otro lado, la variación del ángulo β da una velocidad angular según $\hat{z}$. El valor de esta velocidad angular está fijado externamente y vale Ω . Según se ve en la figura, el versor $\hat{z}$ puede descomponerse en las direcciones $\hat{x}_2$ y $\hat{x}_3$,

$$\hat{z} = \sin \alpha \hat{x}_2 + \cos \alpha \hat{x}_3.$$

De esta manera podemos escribir

$$\omega = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3,$$

donde

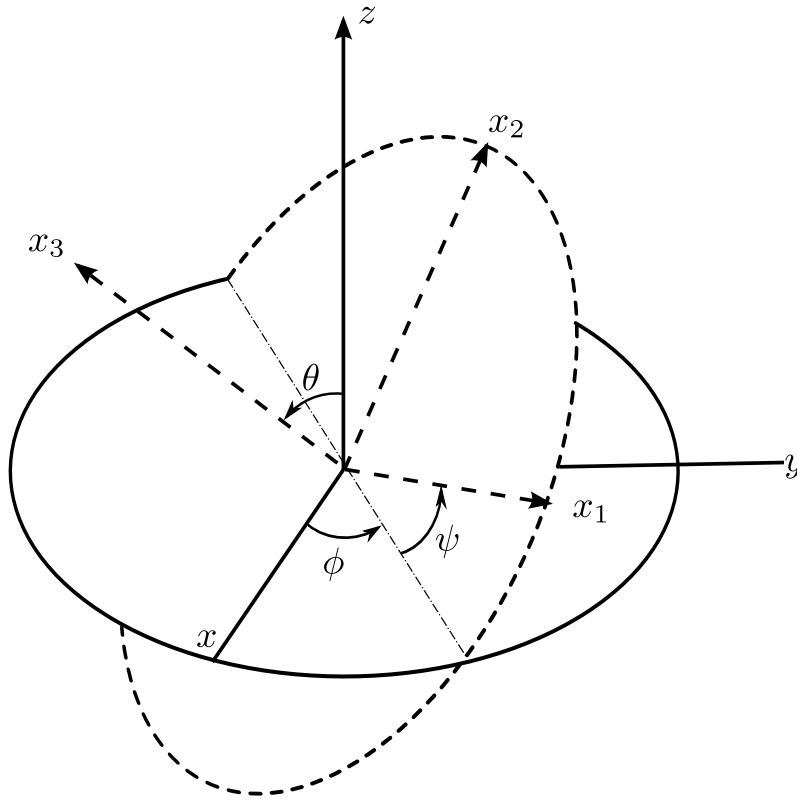
$$\omega_1 = \dot{\alpha}, \quad \omega_2 = \Omega \sin \alpha, \quad \omega_3 = \Omega \cos \alpha.$$

La energía cinética de rotación resulta entonces

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{\text{cm}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{m}{24} [(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 \cos^2 \alpha) a^2 + \Omega^2 b^2].$$

Al mismo resultado podemos llegar más sistemáticamente por medio de los ángulos de Euler y de la expresión general de $\boldsymbol{\omega}$ en términos de esos ángulos y de sus derivadas,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \tag{1}$$



El ángulo más fácil de leer es siempre el que forman el eje z del espacio y el eje x_3 del cuerpo. La posición general de la lámina en la figura de la página anterior muestra que $\theta = \alpha$. Por otra parte, el eje x_1 siempre está en el plano xy , lo que corresponde a tener $\psi = 0$. Así, el eje x_1 está en la línea de nodos y por lo tanto el ángulo ϕ corresponde al ángulo que hemos llamado β . Reemplazando en la Ec. (1) se obtienen las mismas expresiones que antes para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$.

Ahora debemos calcular la energía asociada al movimiento del centro de masa. La posición del centro de masa es

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{a}{2} [(1 + \cos \alpha) \hat{\varphi}(\beta) + \sin \alpha \hat{z}],$$

y su velocidad

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{a}{2} [-\dot{\alpha} \sin \alpha \hat{\varphi}(\beta) - \Omega(1 + \cos \alpha) \hat{\rho}(\beta) + \dot{\alpha} \cos \alpha \hat{z}].$$

Como es una suma de vectores ortonormales entre sí, el módulo al cuadrado se calcula de manera inmediata,

$$v_{\text{cm}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 [\dot{\alpha}^2 + \Omega^2(1 + \cos \alpha)^2] = \left(\frac{a}{2}\right)^2 [\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 + 2\Omega^2 \cos \alpha + \Omega^2 \cos^2 \alpha].$$

Finalmente, sumando los dos términos que componen la energía cinética, resulta

$$\begin{aligned} T &= \frac{ma^2}{8} [\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 + 2\Omega^2 \cos \alpha + \Omega^2 \cos^2 \alpha] + \frac{m}{24} [(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 \cos^2 \alpha) a^2 + \Omega^2 b^2] \\ &= \frac{ma^2}{12} [2(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 \cos^2 \alpha) + 3\Omega^2 \cos \alpha] + \frac{m\Omega^2}{24} (3a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Si hay gravedad, la energía potencial es $V = (1/2)mga \sin \alpha$ y el lagrangiano es

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{ma^2}{12} [2(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2 \cos^2 \alpha) + 3\Omega^2 \cos \alpha] - \frac{mga}{2} \sin \alpha.$$

Notar que hemos omitido los términos constantes que aparecen en T . Debido a que en la energía cinética aparecen términos que no dependen de $\dot{\alpha}$, es posible descomponer el lagrangiano separando un potencial efectivo y un término puramente cinético,

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{6}ma^2\dot{\alpha}^2 - \left[\frac{mga}{2} \sin \alpha - \frac{m\Omega^2 a^2}{12} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha) \right]. \quad (2)$$

El potencial efectivo sería

$$V_{\text{ef}}(\alpha) = \frac{mga}{2} \sin \alpha - \frac{m\Omega^2 a^2}{12} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha).$$

Si Ω es cero, el lagrangiano corresponde al de un péndulo físico, con su posición de equilibrio estable en $\alpha = -\pi/2$,

$$L(\alpha, \dot{\alpha})_{\Omega=0} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\alpha}^2 - \frac{mga}{2} \sin \alpha.$$

Cerca del punto de equilibrio estable $\alpha = -\pi/2 + \eta$ y $\sin \alpha \approx -1 + \eta^2/2$. El lagrangiano de pequeñas oscilaciones es entonces

$$L_0(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \left[\frac{ma^2}{3} \dot{\eta}^2 - \frac{mga}{2} \eta^2 \right].$$

La frecuencia de las oscilaciones se lee de ahí,

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2a}.$$

Este resultado puede obtenerse por medios más elementales: el torque del peso respecto del eje de la bisagra es $\tau = -(mga \cos \alpha)/2$, y el momento de inercia respecto de ese eje se calcula como

$$I = \frac{m}{a} \int_0^a dx x^2 = \frac{ma^2}{3}.$$

Así, la ecuación de movimiento para α es

$$\frac{ma^2}{3} \ddot{\alpha} = -\frac{mga}{2} \cos \alpha.$$

Para $\alpha = -\pi/2 + \eta$, con $\eta \ll 1$, el coseno de α puede aproximarse por $\cos \alpha \approx \eta$. Luego,

$$\frac{ma^2}{3} \ddot{\eta} = -\frac{mga}{2} \eta.$$

Esto corresponde a un movimiento armónico de frecuencia ω_0 igual a la que calculamos más arriba.

Volviendo a la expresión (2), podemos reescribirla como

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{ma^2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 - \left[\omega_0^2 \sin \alpha - \frac{\Omega^2}{4} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha) \right] \right\}.$$

La función que importa analizar aquí es el potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(\alpha) = \frac{ma^2}{3} \left[\omega_0^2 \sin \alpha - \frac{\Omega^2}{4} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha) \right].$$

Puede definirse una energía T_K que contenga únicamente el término proporcional a $\dot{\alpha}^2$, y escribir

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = T_K(\dot{\alpha}) - V_{\text{ef}}(\alpha),$$

donde

$$T_K(\dot{\alpha}) = \frac{ma^2}{3} \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2.$$

El análisis del potencial efectivo permite determinar las características principales del movimiento. En esencia todo el asunto pasa por estudiar una función de una variable que depende de un único parámetro,

$$V_{\text{ef}}(\alpha) = \frac{ma^2 \Omega^2}{12} f(\alpha, 4\omega_0^2/\Omega^2),$$

donde

$$f(\alpha, \lambda) = \lambda \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

donde λ debe identificarse con la relación entre las frecuencias $4\omega_0^2/\Omega^2$. Gravedad cero corresponde a $\lambda = 0$, y $\lambda \rightarrow \infty$ corresponde a $\Omega = 0$. El análisis de esta función se deja como ejercicio, para lo que se recomienda graficar la función usando algún programa como el *Mathematica*.

Una cosa para notar es que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo y por lo tanto se conserva h . Pero en este caso h no es la energía total, puesto que la energía cinética no es una función homogénea de grado dos en las velocidades generalizadas. En efecto, dentro de T está contenido el término que asociamos al potencial efectivo y que no depende de $\dot{\alpha}$. La energía total es

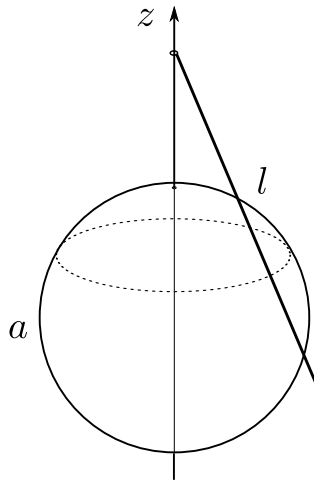
$$E = T(\alpha, \dot{\alpha}) + V(\alpha) = \frac{ma^2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + \left[\omega_0^2 \sin \alpha + \frac{\Omega^2}{4} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha) \right] \right\},$$

pero en cambio

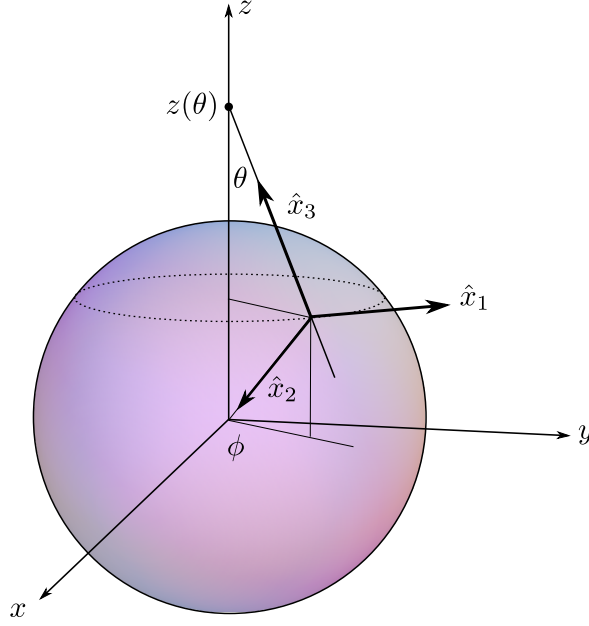
$$h = T_K(\dot{\alpha}) + V_{\text{ef}}(\alpha) = \frac{ma^2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + \left[\omega_0^2 \sin \alpha - \frac{\Omega^2}{4} (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha) \right] \right\}.$$

Problema 10

Uno de los extremos de una barra de longitud l y masa m puede deslizar a lo largo del eje z y tiene libertad para girar alrededor de este eje. La barra permanece apoyada sobre una esfera fija de radio a . Determinar el lagrangiano, las ecuaciones de movimiento y las magnitudes que se conservan.



■ **Solución.** La energía cinética puede escribirse como un término asociado al movimiento del centro de masa más un término de rotación alrededor del centro de masa. Para calcular la energía cinética de rotación lo más sencillo es considerar la posición de la barra en un instante dado y elegir un sistema de ejes fijos a la barra orientado como en la figura.



La velocidad angular puede pensarse compuesta por dos contribuciones independientes. Una rotación alrededor del eje z con velocidad $\dot{\phi}$ y una rotación alrededor del eje x_1 , con velocidad angular $\dot{\theta}$. Es necesario escribir la primera rotación según los ejes fijos al cuerpo. Es fácil ver que $\hat{z} = -\sin \theta \hat{x}_2 + \cos \theta \hat{x}_3$. Luego $\omega_2 = -\dot{\phi} \sin \theta$ y $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta$. La energía de rotación es entonces

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta). \quad (3)$$

Aquí se ha usado que $I_1 = I_2 = ml^2/12$, y que $I_3 = 0$. Vean ustedes cómo interpretar este resultado en términos de los ángulos de Euler.

Un poco más complicado es escribir la energía asociada al movimiento del centro de masa. Lo más sencillo es tratar a z y θ como variables independientes y recién al final imponer el vínculo que las relaciona. Lo que llamamos z aquí es la posición del extremo de la barra que se mueve sobre el eje z . La posición y velocidad del centro de masa son

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{l}{2} \sin \theta \hat{\rho}(\phi) + \left(z - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \hat{z}, \quad (4)$$

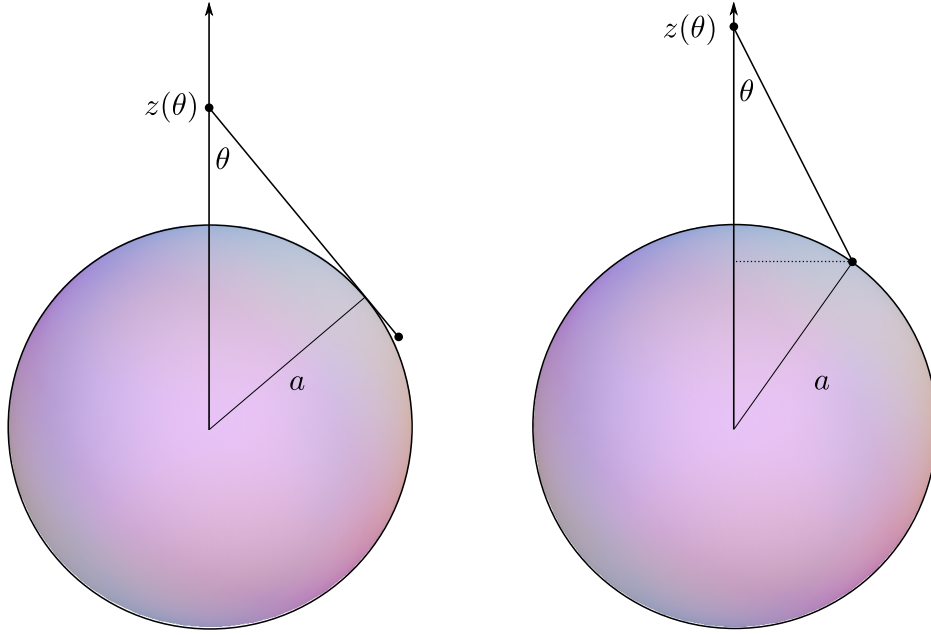
$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{l}{2} \dot{\theta} [\cos \theta \hat{\rho}(\phi) + \sin \theta \hat{z}] + \dot{z} \hat{z} + \frac{l}{2} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}(\phi).$$

Luego,

$$v_{\text{cm}}^2 = \left(\frac{l}{2} \right)^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \dot{z}^2 + l \dot{z} \dot{\theta} \sin \theta. \quad (5)$$

Ahora viene la cuestión de cómo están vinculadas las variables θ y z . Hay dos maneras en que la barra puede moverse sin perder contacto con la esfera y manteniendo siempre un extremo sobre el eje z . Si z es

relativamente pequeño la barra es tangente a la esfera, pero si z aumenta lo suficiente llegará un momento en que el extremo de la barra se apoyará directamente sobre la esfera.



En el primer caso el vínculo entre las variables z y θ puede escribirse como

$$z \sin \theta = a.$$

En el segundo caso es

$$z = l \cos \theta + \sqrt{a^2 - l^2 \sin^2 \theta}.$$

Aquí estudiaremos sólo el primer caso; el otro quedará como ejercicio. Cuando la barra es tangente a la esfera el vínculo $z \sin \theta = a$ implica

$$\dot{z} = -\frac{a\dot{\theta} \cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

A partir de las Ecs. (3) y (5), con un poco de trabajo se encuentra

$$T = \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{3} + \left(\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 - \frac{la \cos \theta}{\sin \theta} \right] m\dot{\theta}^2.$$

Al no haber ningún potencial aplicado $L = T = E$. Las ecuaciones de movimiento se calculan de manera directa.

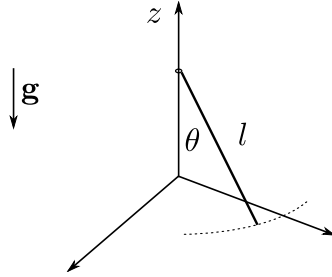
Como no hay dependencia explícita del tiempo E se conserva. Debido a que L no depende de ϕ , otra cantidad conservada es el impulso generalizado asociado a ϕ ,

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\phi} \sin^2 \theta.$$

Es fácil verificar que p_ϕ es el momento angular en la dirección z calculado respecto del centro de la esfera. Un método un poco rebuscado que se sugiere para ver esto es calcular el momento angular usando ejes fijos en el espacio, lo que implica calcular un tensor de inercia que depende del tiempo.

Problema 11

Un extremo de la barra de la figura puede moverse sobre el eje z mientras que el otro extremo permanece sobre el plano horizontal. En $t = 0$ la barra tiene una velocidad angular $\Omega = \omega_0 \hat{z}$, $\theta(0) = \pi/4$ y $\dot{\theta}(0) = 0$.



- (a) Encuentre Ω_z y $\dot{\theta}$ como funciones de θ .
- (b) Suponiendo que la barra inicialmente está en contacto con el piso, ¿cuál es el menor valor de ω_0 para el cual la barra abandona el piso?

■ **Solución.** Podemos usar en este problema algunos resultados del anterior. Llamando como antes z a la posición del extremo de la barra que se mueve sobre el eje z , las Ecs. (3) y (5) siguen siendo válidas, pero ahora la relación entre θ y z es $z = l \cos \theta$, lo que a su vez implica $\dot{z} = -l\dot{\theta} \sin \theta$. Haciendo estas sustituciones y teniendo en cuenta el potencial gravitatorio, se obtiene

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{6} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{mgl \cos \theta}{2}. \quad (6)$$

La energía $\mathcal{E}$ y el impulso generalizado p_ϕ se conservan,

$$\mathcal{E} = \frac{ml^2}{6} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{mgl \cos \theta}{2},$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{ml^2}{3} \dot{\phi} \sin^2 \theta.$$

Definiendo

$$\alpha = \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

y reemplazando en la expresión para la energía se llega a un problema unidimensional equivalente, definido por la siguiente ecuación de conservación

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta),$$

donde el potencial efectivo es

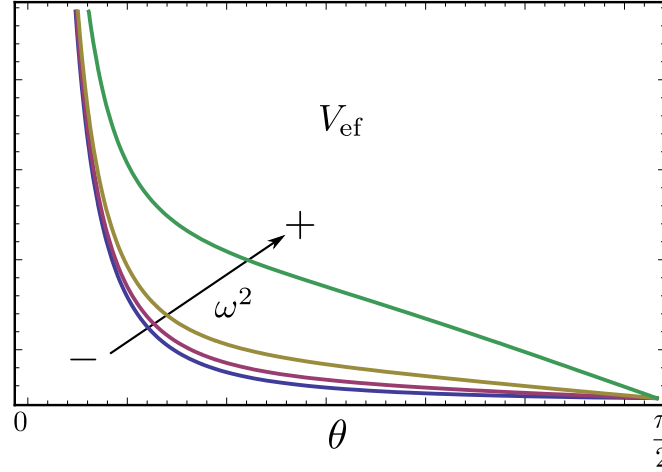
$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} + 3\omega^2 \cos \theta \right),$$

y donde

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{3\mathcal{E}}{ml^2}, \quad \omega^2 = g/l.$$

De la ecuación para la energía y de la definición de α no tendrán dificultad para escribir $\dot{\theta}$ y $\Omega_z = \dot{\phi}$ en función de θ , que es una de las cosas que pide el problema.

Asumiendo que $\alpha \neq 0$, el potencial efectivo se muestra en la figura de abajo para varios valores de ω^2 .



Inmediatamente se ve que todas las órbitas que comienzan en algún $\theta < \pi/2$ eventualmente alcanzan el punto $\pi/2$. Lo que pasa después depende de los detalles del choque de la barra con la mesa. Sin embargo, veremos que si la mesa sólo puede ejercer una fuerza normal positiva entonces, bajo ciertas circunstancias, el extremo de la barra se desprende de la mesa antes de alcanzar el punto $\theta = \pi/2$. Para calcular la fuerza normal en el extremo inferior de la barra escribamos la ecuación de Newton para la aceleración del centro de masa en la dirección z . Mientras la barra está en contacto con el suelo, el centro de masa está a una altura $z_{\text{cm}} = z/2$, de manera que

$$\frac{1}{2}m\ddot{z} = N - mg.$$

Si se conoce $\ddot{z}$ puede calcularse N . La ecuación de movimiento para z puede obtenerse a partir de la ecuación de movimiento para θ mediante las fórmulas que relacionan z con θ . Pero también se puede reescribir el lagrangiano usando z como coordenada generalizada y encontrar la ecuación de movimiento directamente de ahí: escribiendo θ y $\dot{\theta}$ en términos de $\zeta = z/l$ y $\dot{\zeta}$,

$$\cos \theta = \zeta, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{\zeta}}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

la Ec. (6) da

$$L(\zeta, \dot{\zeta}, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{6} \left[\frac{\dot{\zeta}^2}{1 - \zeta^2} + \dot{\phi}^2(1 - \zeta^2) \right] - \frac{mgl\zeta}{2}.$$

La ecuación de movimiento es

$$\frac{\ddot{\zeta}}{1 - \zeta^2} = -\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{\zeta}{(1 - \zeta^2)^2}(\alpha^2 + \dot{\zeta}^2).$$

Aquí hemos escrito de nuevo $\omega^2 = g/l$ y hemos usado la conservación de p_ϕ para reemplazar $\dot{\phi}$ por $\alpha/(1 - \zeta^2)$. La fuerza normal está dada por

$$\frac{N}{ml} = \frac{1}{2}\ddot{\zeta} + \frac{g}{l} = \frac{1}{2}\ddot{\zeta} + \omega^2.$$

Reemplazando el valor de $\ddot{\zeta}$ se obtiene

$$\frac{N}{ml} = \frac{1}{4}\omega^2(3\zeta^2 + 1) - \frac{1}{2}\frac{\zeta}{1 - \zeta^2}(\alpha^2 + \dot{\zeta}^2).$$

Si se usa la conservación de la energía y de p_ϕ , esta expresión puede dejarse en términos de ζ exclusivamente:

$$\frac{N}{ml} = \frac{1}{4}\omega^2(9\zeta^2 + 1) - \zeta\tilde{\mathcal{E}}.$$

Si la condición inicial es $\dot{\theta} = \dot{\zeta} = 0$, y $\alpha = \omega_0(1 - \zeta_0^2)$, entonces

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{3}{2}\omega^2\zeta_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2(1 - \zeta_0^2),$$

y resulta

$$\frac{N(\zeta)}{ml} = \frac{1}{4}\omega^2(9\zeta^2 - 6\zeta_0\zeta + 1) - \frac{1}{2}\omega_0^2(1 - \zeta_0^2)\zeta. \quad (7)$$

Inicialmente

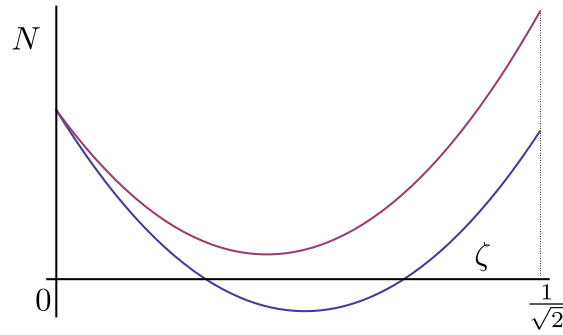
$$\frac{N(\zeta_0)}{ml} = \frac{1}{4}\omega^2(3\zeta_0^2 + 1) - \frac{1}{2}\omega_0^2(1 - \zeta_0^2)\zeta_0.$$

Esta cantidad puede ser mayor o menor que cero, dependiendo de la relación entre las frecuencias y del valor de ζ_0 . Según la condición dada en el problema $\zeta_0 = 1/\sqrt{2}$, y por lo tanto

$$\frac{N(\zeta_0)}{ml} = \frac{1}{8}\left(5\omega^2 - \sqrt{2}\omega_0^2\right).$$

La normal es positiva si $5\omega^2 > \sqrt{2}\omega_0^2$, es decir si $5g/l > \sqrt{2}\omega_0^2$. Una condición inicial con $\dot{\theta}(0) = 0$ sitúa a la partícula del problema equivalente en el punto de retorno de su trayectoria, a partir de ahí ζ sólo puede disminuir, de forma que a partir de $t = 0$ la barra se acerca al piso. Asumamos que $5g/l > \sqrt{2}\omega_0^2$, de modo que inicialmente la barra esté en contacto con el piso y la normal sea positiva. Evaluada en $\zeta = 0$ la expresión (7) da también un valor de N positivo. La cuestión es averiguar si en algún momento entre ζ_0 y $\zeta = 0$ la normal se vuelve negativa, lo que indicaría la pérdida de contacto con el piso antes que de la barra llegue a la posición horizontal. La normal es una función cuadrática de ζ . Como el término proporcional a ζ^2 es mayor que cero, la cuadrática tendrá concavidad positiva, y además como el término lineal es negativo y el

término independiente es positivo, alcanzará el valor mínimo en la región $\zeta > 0$. Dada ω_0 , lo que habrá que determinar es cuál de las dos alternativas mostradas en la figura es la que ocurre.

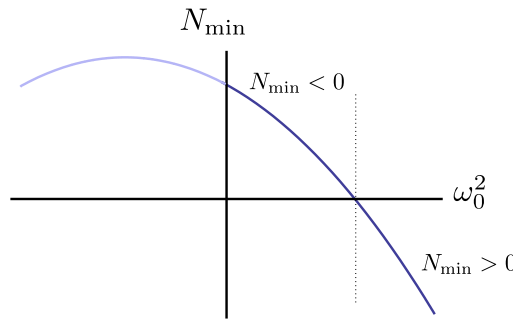


En un caso la normal es siempre positiva, pero en el otro se hace negativa durante cierto intervalo. Hay que averiguar para qué valores de ω_0 el mínimo de la cuadrática es menor que cero.

Queda como ejercicio demostrar que para $\zeta_0 = 1/\sqrt{2}$ el mínimo de N viene dado por

$$\frac{N_{\min}}{ml} = \frac{1}{144\omega^2} \left(18\omega^4 - 6\sqrt{2}\omega_0^2\omega^2 - \omega_0^4 \right). \quad (8)$$

Este valor es a su vez una función cuadrática de ω_0^2 (otra vez sopa). Mirando los signos de cada término en la cuadrática, se puede concluir que tiene la siguiente forma:



Esto indica que, para un valor de ω_0^2 mayor que cierto valor límite, el mínimo de la normal es negativo. Los ceros de la cuadrática (8) ocurren en

$$\omega_{0<}^2 = -3(2 + \sqrt{2})\omega^2, \quad \omega_{0>}^2 = 3(2 - \sqrt{2})\omega^2.$$

El cero que nos importa aquí es el de la derecha. Para ω_0 mayor que $\omega_{0>}$ el mínimo de la normal es negativo para algún ζ intermedio entre $\zeta = 1/\sqrt{2}$ y $\zeta = 0$. La condición para que la barra nunca deje de estar en contacto con el suelo es entonces

$$\omega_0^2 < \frac{3g}{l}(2 - \sqrt{2}).$$

En particular, una barra que se deja caer con velocidad inicial cero, es decir, con $\dot{\theta} = \dot{\zeta} = \dot{\phi} = \omega_0 = 0$, nunca pierde contacto con el piso.

Como verificación auxiliar deberíamos comprobar que si $\omega_0 = 0$ y $\zeta_0 = 1$, la fuerza normal es igual al peso de la barra. En efecto, eso es lo que da la Ec. (7).

Problema 16

Una esfera homogénea de radio a se mueve sin deslizar por la superficie interna de un cilindro vertical de radio $b > a$. Determine la ley de movimiento de la esfera.

■ **Solución.** Resolveremos este problema planteando las ecuaciones de Newton para la esfera. Estas ecuaciones se agrupan en dos conjuntos: las ecuaciones de movimiento del centro de masa, y luego las ecuaciones que involucran los torques respecto del centro de masa:

$$m\dot{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = \mathbf{f} + m\mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}.$$

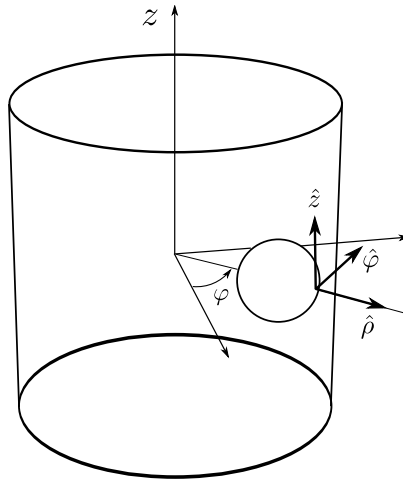
La fuerza $\mathbf{f}$ es la fuerza de contacto de la esfera con el cilindro.

Debido a que el tensor de inercia de una esfera respecto de su centro de masa es proporcional a la matriz unidad, su forma no depende de la elección de los ejes coordenados. No es entonces particularmente ventajoso escribir las ecuaciones que gobiernan la rotación en un sistema ligado a la esfera. El momento angular respecto del centro de masa es $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, donde I es un número y no un tensor. La ecuación que determina la evolución de $\mathbf{L}$ toma la forma más simple que puede esperarse para un cuerpo rígido,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}.$$

Las fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso y las fuerzas en el punto de contacto con el cilindro. Sólo estas últimas producen un torque respecto del centro de masa. Es cómodo usar coordenadas polares y escribir la fuerza de contacto como

$$\mathbf{f} = f_\rho \hat{\rho}(\varphi) + f_\varphi \hat{\varphi}(\varphi) + f_z \hat{z}.$$



La posición, velocidad y aceleración del centro de masa son

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = (b - a) \hat{\rho} + z \hat{z},$$

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = (b - a)\dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z},$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = -(b - a)\dot{\varphi}^2 \hat{\rho} + (b - a)\ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z}.$$

Se entiende que todos los versores corresponden al ángulo φ . Las ecuaciones de movimiento del centro de masa son entonces

$$\begin{aligned} -m(b-a)\dot{\varphi}^2 &= f_\rho, \\ m(b-a)\ddot{\varphi} &= f_\varphi, \\ m\ddot{z} &= f_z - mg. \end{aligned} \quad (9)$$

Respecto del centro de la esfera, el punto de aplicación de las fuerzas de contacto está en $a\hat{\rho}$. Así, el torque sobre la esfera es

$$\mathbf{N} = a\hat{\rho} \times \mathbf{f} = a(f_\varphi \hat{z} - f_z \hat{\varphi}).$$

Luego, la ecuación de movimiento para $\mathbf{L}$ se escribe como

$$I \frac{d}{dt} [\omega_\rho \hat{\rho} + \omega_\varphi \hat{\varphi} + \omega_z \hat{z}] = a(f_\varphi \hat{z} - f_z \hat{\varphi}).$$

La derivada afecta a las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y a los versores. Agrupando términos resultan tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} I(\dot{\omega}_\rho - \dot{\varphi}\omega_\varphi) &= 0, \\ I(\dot{\omega}_\varphi + \dot{\varphi}\omega_\rho) &= -af_z, \\ I\dot{\omega}_z &= af_\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Hasta ahora tenemos seis ecuaciones pero ocho incógnitas: φ , z , las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y las tres componentes de la fuerza de contacto. Las dos ecuaciones que faltan son las asociadas a la condición de rodadura. La velocidad del punto de la esfera en contacto con el cilindro debe ser cero. Podemos calcular esa velocidad como la velocidad del centro de masa más la velocidad relativa al centro de masa. La posición relativa del punto de contacto respecto del centro de masa es $a\hat{\rho}$. Luego la velocidad del punto de la esfera en contacto con el cilindro es

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\omega} \times (a\hat{\rho}) = 0.$$

Esta ecuación tiene componentes según $\hat{\varphi}$ y $\hat{z}$,

$$\begin{aligned} (b-a)\dot{\varphi} + a\omega_z &= 0, \\ \dot{z} - a\omega_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ahora es cuestión de combinar todas las ecuaciones. A partir de las ecuaciones (9) se pueden eliminar las componentes f_φ y f_z de la fuerza y reemplazarlas en las Ecs. (10),

$$\begin{aligned} I(\dot{\omega}_\rho - \dot{\varphi}\omega_\varphi) &= 0, \\ I(\dot{\omega}_\varphi + \dot{\varphi}\omega_\rho) &= -a(m\ddot{z} + mg), \\ I\dot{\omega}_z &= am(b-a)\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Derivando la primera ecuación (11) puede eliminarse $\dot{\omega}_z$ en términos de $\ddot{\varphi}$, y reemplazando en la última ecuación (12) resulta

$$-\left(\frac{b-a}{a}\right)\ddot{\varphi} = am(b-a)\ddot{\varphi},$$

que a su vez implica

$$\ddot{\varphi} = 0.$$

Definamos la constante $\Omega = \dot{\varphi}$. El par de ecuaciones restantes toma la forma

$$\begin{aligned} I(\dot{\omega}_\rho - \Omega\omega_\varphi) &= 0, \\ I(\dot{\omega}_\varphi + \Omega\omega_\rho) &= -am(\ddot{z} + g). \end{aligned} \quad (13)$$

Falta usar la segunda Ec. (11). Eliminando ω_φ en términos de $\dot{z}$ y reemplazando en la primera Ec. (13) queda

$$\dot{\omega}_\rho = \frac{\Omega}{a}\dot{z}.$$

Esta ecuación puede integrarse inmediatamente, con lo que resulta

$$\omega_\rho = \frac{\Omega}{a}z + C_1, \quad (14)$$

donde C_1 es una constante de integración. Derivando la última ecuación (11) se obtiene $\dot{\omega}_\varphi$ en términos de $\ddot{z}$,

$$\dot{\omega}_\varphi = \frac{\ddot{z}}{a}. \quad (15)$$

Reemplazando (14) y (15) en la Ec. (13) queda finalmente una ecuación para z ,

$$(I + ma^2)\ddot{z} + \Omega^2 Iz = -(mga^2 + aC_1),$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{\Omega^2 I}{I + ma^2}\right)z = -\left(\frac{mga^2 + aC_1}{I + ma^2}\right).$$

Si $\Omega \neq 0$, ésta es la ecuación de un oscilador con su punto de equilibrio desplazado una cierta distancia a partir de $z = 0$. La solución general es

$$z(t) = -\left(\frac{mga^2 + aC_1}{\Omega^2 I}\right) + C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \omega t,$$

donde

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2 I}{I + ma^2},$$

y donde C_2 y C_3 son constantes que deben fijarse a partir de las condiciones iniciales. No se pierde nada eligiendo $z(0) = 0$ y $\dot{z}(0) = 0$. Esto corresponde a pedir que en $t = 0$ la esfera esté en un punto de retorno

de z . Notemos que entonces la Ec. (14) permite identificar C_1 con el valor inicial de ω_ρ , al que llamaremos $\omega_{\rho 0}$. En definitiva,

$$z(t) = \left(\frac{mga^2 + a\omega_{\rho 0}}{\Omega^2 I} \right) (\cos \omega t - 1).$$

La trayectoria del centro de masa se completa dando $\varphi(t)$. Debido a que $\dot{\varphi} = \Omega$ es constante, queda

$$\varphi(t) = \Omega t + \varphi_0.$$

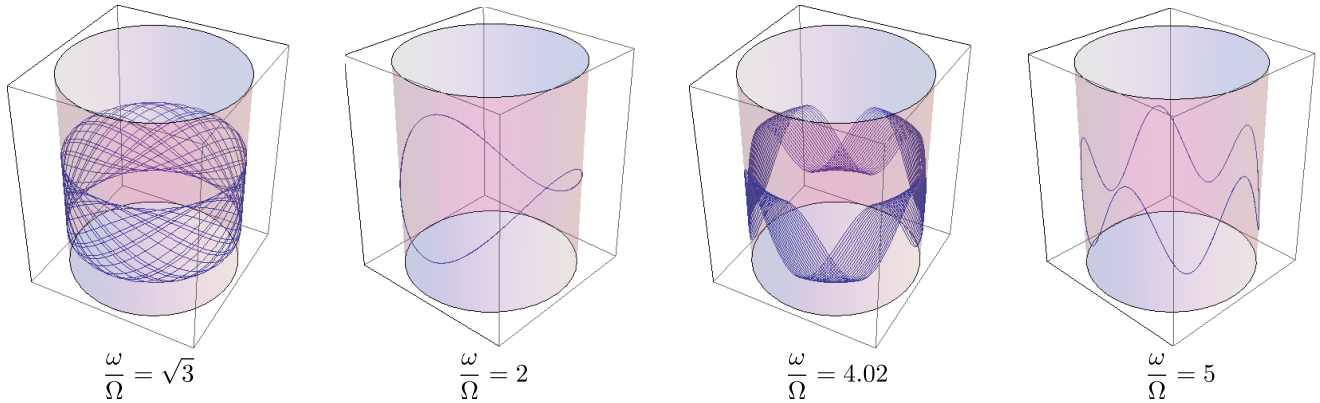
La constante φ_0 puede elegirse igual a cero. Eliminando t en términos de φ y reemplazando en la ecuación para z se obtiene la curva que traza el centro de la esfera dentro del cilindro,

$$z(\varphi) = \left(\frac{mga^2 + a\omega_{\rho 0}}{\Omega^2 I} \right) \left[\cos \left(\frac{\omega \varphi}{\Omega} \right) - 1 \right].$$

Si la esfera es maciza, $I = 2ma^2/5$, y el cociente entre las dos frecuencias es

$$\frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{\frac{2}{7}} \quad (\text{esfera maciza homogénea})$$

Esto significa la trayectoria no se cierra nunca, pues los movimientos en φ y en z tienen frecuencias incommensurables. Si la esfera es hueca $I = 2ma^2/3$, y entonces $\omega/\Omega = 1/\sqrt{2}$; tampoco tenemos órbitas cerradas. Distribuyendo de manera esféricamente simétrica la masa total de la esfera hasta un radio a , puede conseguirse que el momento de inercia tome cualquier valor dentro del intervalo $0 \leq I \leq 2ma^2/3$. Por ejemplo, para $I = ma^2/3$ se obtiene $\omega/\Omega = 1/2$; en este caso las órbitas serán cerradas. La figura de abajo muestra varias trayectorias posibles.



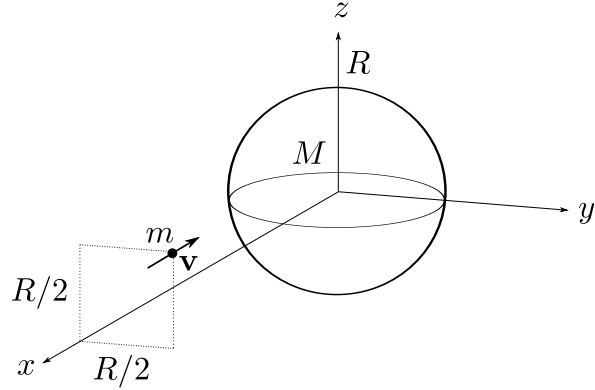
Queda como ejercicio analizar el caso $\Omega = 0$.

Este problema también puede resolverse mediante las ecuaciones de Lagrange para los ángulos de Euler. Habría que ver qué tan complicado es este método.

Problema 20

Una esfera homogénea de masa M y radio R está centrada en el origen. Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v_0 \hat{x}$ a lo largo de la recta definida por $z = y = R/2$. Cuando la partícula choca con la esfera queda pegada sobre su superficie. Describir el movimiento posterior del sistema si:

- (a) Inicialmente la esfera no rota.
- (b) Inicialmente la esfera rota con $\boldsymbol{\Omega} = \omega_z \hat{z}$.
- (c) Inicialmente la esfera rota con $\boldsymbol{\Omega} = \omega_z \hat{z} + \omega_y \hat{y}$.



(Leve cambio de notación respecto del enunciado de la Guía en la definición de $\boldsymbol{\Omega}$.)

■ **Solución.** La conservación del momento lineal permite encontrar la velocidad del sistema partícula—esfera una vez que se mueven juntos. Debido a que no hay fuerzas externas, el centro de masa de todo el sistema se mueve a velocidad constante. Si la masa de la partícula incidente es m y su velocidad antes del choque es $\mathbf{v}_0$, como el centro de masa de la esfera está inicialmente en reposo la velocidad del centro de masa de todo el sistema es

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m \mathbf{v}_0}{m + M}. \quad (16)$$

Supongamos que la partícula choca contra la esfera en el punto $\mathbf{r}_{\text{in}}$. La posición del centro de masa en el momento del choque es

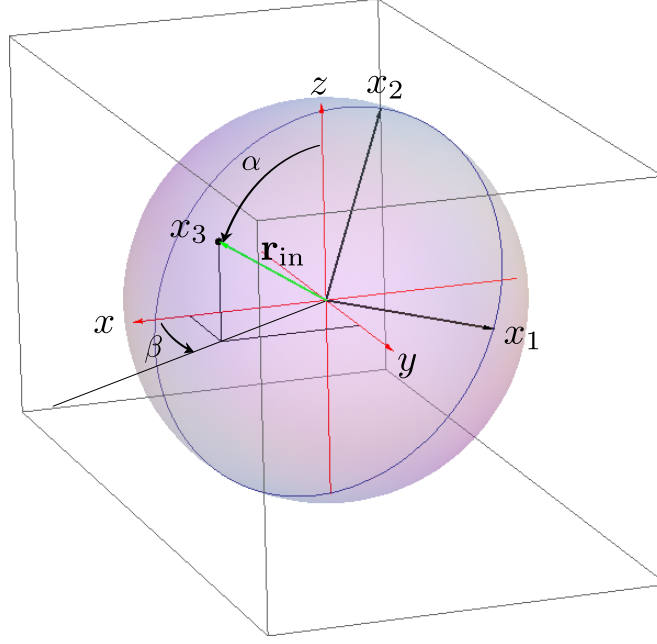
$$\mathbf{r}_{\text{cm}0} = \frac{m \mathbf{r}_{\text{in}}}{m + M}.$$

Suponiendo que el choque se produce en $t = 0$, la trayectoria del centro de masa es

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{m}{m + M} (\mathbf{r}_{\text{in}} + \mathbf{v}_0 t). \quad (17)$$

Esto nos permite conocer en todo momento la posición de un punto dentro de la esfera. Todo lo que queda es averiguar cómo rota el sistema alrededor de este punto.

Respecto de su centro de masa, el movimiento del sistema luego del choque es el de un trompo simétrico libre. Uno de los ejes principales de inercia coincide con la recta que une a la partícula con el centro de la esfera. Además, como se trata de un trompo simétrico, los ejes principales siempre pueden elegirse de tal modo que en el instante inicial, justo después del choque, $\hat{x}_1$ esté en el plano xy .



Debe recordarse que aunque grafiquemos los ejes fijos al cuerpo en el centro de la esfera, el punto respecto del cual se calcula el tensor de inercia es el centro de masa, que está en algún punto intermedio entre el centro de la esfera y el punto donde impacta la partícula. Explícitamente, si el punto en que la partícula choca con la esfera está definido por ángulos α y β como en la figura anterior, la orientación inicial del sistema de ejes fijo al cuerpo corresponde a los siguientes versores

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1i} &= -\sin \beta \hat{x} + \cos \beta \hat{y}, \\ \hat{x}_{2i} &= -\cos \alpha \cos \beta \hat{x} - \cos \alpha \sin \beta \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}, \\ \hat{x}_{3i} &= \sin \alpha \cos \beta \hat{x} + \sin \alpha \sin \beta \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}.\end{aligned}$$

Las fórmulas inversas se obtienen transponiendo la matriz de los coeficientes en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= -\sin \beta \hat{x}_1 - \cos \alpha \cos \beta \hat{x}_2 + \sin \alpha \cos \beta \hat{x}_3, \\ \hat{y} &= \cos \beta \hat{x}_1 - \cos \alpha \sin \beta \hat{x}_2 + \sin \alpha \sin \beta \hat{x}_3, \\ \hat{z} &= \sin \alpha \hat{x}_2 + \cos \alpha \hat{x}_3.\end{aligned}\tag{18}$$

A partir de la figura también es fácil leer los valores iniciales de los ángulos de Euler,

$$\phi_i = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i = \alpha, \quad \psi_i = 0.$$

En términos de los ángulos de Euler, el movimiento del sistema está gobernado por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2.$$

(Calcular los momentos de inercia respecto del centro de masa queda como ejercicio.)

Los impulsos generalizados asociados a ψ y ϕ se conservan,

$$p_\psi = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right),$$

$$p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta.$$

También se conserva la energía, que en este caso coincide con el lagrangiano. Usando la conservación de p_ψ y de p_ϕ para eliminar $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$, la conservación de la energía lleva a un problema unidimensional equivalente,

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin \theta} \right)^2, \quad (19)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3}.$$

Todo el problema se reduce ahora a escribir la condición inicial para $\dot{\theta}$ y a encontrar los valores de $\tilde{\mathcal{E}}$, p_ψ y p_ϕ . Veremos que estas condiciones iniciales están relacionadas con el valor del momento angular respecto del centro de masa justo después del choque.

Una descripción alternativa del movimiento del cuerpo, en apariencia más sencilla, es la que sale de escribir las ecuaciones de Euler para un trompo simétrico libre,

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3),$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1),$$

$$\dot{\omega}_3 = 0.$$

Debido a que ω_3 es constante, derivando la primera ecuación y usando la segunda para escribir $\dot{\omega}_2$ en términos de ω_1 , se obtiene

$$I_1 \ddot{\omega}_1 = -\omega_1 \left[\frac{\omega_3 (I_1 - I_3)}{I_1} \right]^2.$$

La solución de esta ecuación es

$$\omega_1 = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t,$$

donde

$$\Omega = \frac{\omega_3 |I_1 - I_3|}{I_1}.$$

La constante a es el valor inicial de ω_1 , mientras que la constante b puede relacionarse con el valor inicial de ω_2 a través de la primera ecuación de Euler. El resultado final es

$$\omega_1 = \omega_{1i} \cos \Omega t + \omega_{2i} \text{signo}(I_1 - I_3) \sin \Omega t. \quad (20)$$

La componente ω_2 puede obtenerse integrando la segunda ecuación de Euler y usando el resultado anterior para ω_1 , o notando que ω_2 satisface la misma ecuación que ω_1 si se intercambian estas frecuencias entre sí y se sustituye $I_1 - I_3$ por su opuesto:

$$\omega_2 = \omega_{2i} \cos \Omega t - \omega_{1i} \text{signo}(I_1 - I_3) \sin \Omega t. \quad (21)$$

Si definimos un vector $\mathbf{A}$, con componentes $A_1 = \omega_{1i}$, $A_2 = \omega_{2i}$ y $A_3 = 0$, las Ecs. (20) y (21) lo que hacen es dar las componentes que resultan de rotar $\mathbf{A}$ un ángulo Ωt alrededor del eje x_3 . El sentido de la rotación depende del signo de la diferencia $I_1 - I_3$. Así, el significado de las Ecs. (20) y (21) es que, en el sistema de ejes fijo al cuerpo, la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ sobre el plano 12 traza un círculo, a partir de un ángulo inicial cuya tangente vale ω_{2i}/ω_{1i} . Pero todo esto habla de una propiedad general del movimiento del trompo simétrico. La cuestión no es haber escrito las soluciones en su forma general sino dar las condiciones iniciales, ω_{1i} , ω_{2i} y ω_{3i} , justo después de producido el choque de la partícula con la esfera. Tanto si escribimos las ecuaciones de Lagrange, o el problema unidimensional equivalente, o si escribimos las ecuaciones de Euler, las soluciones generales son conocidas. Lo que hace falta es dar las condiciones iniciales particulares de un problema particular, a saber, el problema 20 de la Guía 6. (Veremos incluso que hay una forma mucho más simple de escribir la solución para el movimiento de rotación.)

Puesto que no hay fuerzas externas, luego del choque el momento angular respecto del centro de masa del sistema partícula—esfera es constante e igual a

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

De alguna manera hay que relacionar este momento angular con las condiciones inmediatamente anteriores al choque. Por ahora supongamos conocido $\mathbf{L}$. Lo que queremos mostrar es que eso da suficiente información para encontrar las condiciones iniciales para las derivadas de los ángulos de Euler o equivalentemente para $\boldsymbol{\omega}$. Respecto de los ejes principales fijos al cuerpo, el tensor de inercia es diagonal, de manera que

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \hat{x}_1 + I_2 \omega_2 \hat{x}_2 + I_3 \omega_3 \hat{x}_3.$$

Justo después del choque podemos escribir tres igualdades, una para cada componente según los ejes principales,

$$\omega_{1i} = \frac{1}{I_1} \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{1i}, \quad \omega_{2i} = \frac{1}{I_2} \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{2i}, \quad \omega_{3i} = \frac{1}{I_3} \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{3i}. \quad (22)$$

La orientación inicial de los ejes principales es dato, de modo que los tres productos escalares son conocidos y pueden evaluarse inmediatamente si se conoce $\mathbf{L}$. Desde el punto de vista de las ecuaciones de Euler, las igualdades (22) dan las condiciones iniciales necesarias para las Ecs. (20) y (21), y por otro lado $\omega_3 = \omega_{3i}$. Falta demostrar que desde el punto de vista de las ecuaciones de Lagrange para los ángulos de Euler, o del problema unidimensional equivalente para θ , las igualdades (22) también permiten escribir las condiciones iniciales.

Las componentes de ω pueden escribirse en términos de los ángulos de Euler y de sus derivadas. Las fórmulas generales para las componentes de ω son

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{23}$$

Como hemos elegido $\hat{x}_{1i}$ sobre el plano xy , es $\psi_i = 0$, y así las fórmulas anteriores justo después del choque se reducen a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\omega_{1i} &= \dot{\theta}_i, \\ \omega_{2i} &= \dot{\phi}_i \sin \theta_i, \\ \omega_{3i} &= \dot{\psi}_i + \dot{\phi}_i \cos \theta_i.\end{aligned}$$

Dadas las componentes iniciales de ω a través de (22) y conocido el ángulo θ_i , estas ecuaciones dan las condiciones iniciales para $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$, que es lo que necesitamos para poder integrar la ecuación (19) del problema unidimensional equivalente. Explícitamente, las constantes que necesitamos son

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{1}{I_1} \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{1i}, \\ p_\phi &= \cos \theta_i \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{3i} + \sin \theta_i \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{2i} = \mathbf{L} \cdot \hat{z}, \\ p_\psi &= \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{3i}.\end{aligned}\tag{24}$$

Lo único que resta averiguar aún es el valor de $\mathbf{L}$. Hay que encontrar alguna relación entre lo que pasa justo antes y justo después del choque. El momento angular respecto del origen es una cantidad conservada. Justo antes del choque vale

$$\mathbf{L}_o = m \mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0 + I \omega_0,\tag{25}$$

donde ω_0 es la velocidad angular de la esfera antes del choque. Puesto que la esfera es completamente simétrica, su momento angular inicial no involucra un tensor de inercia propiamente dicho sino el escalar I . Luego del choque es útil usar la descomposición del momento angular como suma de una contribución $\mathbf{L}_{\text{cm}}$ asociada al movimiento del centro de masa y otra al momento angular respecto del centro de masa,

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{L}_{\text{cm}} + \mathbf{L}.\tag{26}$$

La primera contribución es

$$\mathbf{L}_{\text{cm}} = (m + M) \mathbf{r}_{\text{cm}}(t) \times \mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m^2}{m + M} \mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0,\tag{27}$$

donde se han usado las Ecs. (16) y (17). Luego del choque el momento angular respecto del centro de masa es $\mathbf{L}$. Igualando (25) con (26) y usando el resultado (27) se encuentra

$$\mathbf{L} = \frac{mM}{m+M} \mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0 + I \boldsymbol{\omega}_0.$$

A través de las Ecs. (22) o (24), esta fórmula completa la información necesaria para escribir todas las condiciones iniciales para el movimiento de rotación del sistema partícula—esfera. Para encontrar las componentes de $\mathbf{L}$ según los ejes fijos al cuerpo podemos usar que $\mathbf{r}_{\text{in}} = a\hat{x}_3$ y que $\mathbf{v}_0 = -v_0\hat{x}$. Necesitamos las proyecciones del momento angular sobre las direcciones $\hat{x}_{1i}$, $\hat{x}_{2i}$, $\hat{x}_{3i}$ y $\hat{z}$. Según el enunciado del problema, el caso más general que se pide analizar es cuando $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$. Los cálculos son directos y hacen uso de las fórmulas (18) y de la permutación cíclica del producto mixto. A manera de referencia, abajo se muestran los resultados intermedios si se consideran por separado las dos contribuciones a $\mathbf{L}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0) \cdot \hat{x}_{1i} = -v_0 a \cos \alpha \cos \beta, \\ (\mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0) \cdot \hat{x}_{2i} = v_0 a \sin \beta, \\ (\mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0) \cdot \hat{z} = v_0 a \sin \alpha \sin \beta, \\ (\mathbf{r}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_0) \cdot \hat{x}_{3i} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \hat{x}_{1i} = \omega_y \cos \beta, \\ \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \hat{x}_{2i} = -\omega_y \cos \alpha \sin \beta + \omega_z \sin \alpha, \\ \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \hat{x}_{3i} = \omega_y \sin \alpha \sin \beta + \omega_z \cos \alpha, \\ \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \hat{z} = \omega_z. \end{array} \right. \quad (28)$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{1i} &= -l_0 \cos \alpha \cos \beta + I \omega_y \cos \beta, \\ \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{2i} &= l_0 \sin \beta + I(-\omega_y \cos \alpha \sin \beta + \omega_z \sin \alpha), \\ \mathbf{L} \cdot \hat{x}_{3i} &= I(\omega_y \sin \alpha \sin \beta + \omega_z \cos \alpha), \\ \mathbf{L} \cdot \hat{z} &= l_0 \sin \alpha \sin \beta + I \omega_z, \end{aligned}$$

donde

$$l_0 = \frac{mM}{m+M} v_0 a.$$

Las Ecs. (22) dan entonces

$$\begin{aligned} \omega_{1i} &= -\frac{l_0}{I_1} \cos \alpha \cos \beta + \frac{I}{I_1} \omega_y \cos \beta, \\ \omega_{2i} &= \frac{l_0}{I_1} \sin \beta + \frac{I}{I_1} (-\omega_y \cos \alpha \sin \beta + \omega_z \sin \alpha), \\ \omega_{3i} &= \frac{I}{I_3} (\omega_y \sin \alpha \sin \beta + \omega_z \cos \alpha). \end{aligned}$$

Éstas son las condiciones iniciales para las ecuaciones de Euler. Las Ecs. (24) dan las condiciones iniciales para las ecuaciones de Lagrange o para el problema unidimensional equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= (I \omega_y - l_0 \cos \alpha) \cos \beta, \\ p_\phi &= I \omega_z + l_0 \sin \alpha \sin \beta, \\ p_\psi &= I(\omega_y \sin \alpha \sin \beta + \omega_z \cos \alpha). \end{aligned}$$

El movimiento de un trompo simétrico libre tiene ciertas características que el cálculo anterior no hace del todo evidentes. Hay cierta compromiso entre una descripción simple de la condición inicial y una descripción simple del movimiento posterior. Si nos interesara llevar este problema al laboratorio, los parámetros que podemos controlar más fácilmente son el punto de incidencia de la partícula y su velocidad. Estas variables son descritas adecuadamente en un sistema cartesiano de coordenadas con el eje z en la dirección vertical, o en cualquier otra dirección fija respecto del laboratorio. Ahora bien, enseguida veremos que el movimiento queda descrito de manera más simple si el eje z se toma en la dirección de $\mathbf{L}$. Esto significa una elección distinta para cada condición experimental que difiera en el valor de $\mathbf{L}$. La simplicidad que se gana en la descripción del movimiento bien vale el esfuerzo de ese cambio auxiliar de coordenadas.

Puede demostrarse que el momento angular $\mathbf{L}$ forma un ángulo constante con el versor $\hat{x}_3$. En efecto,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} \cdot \hat{x}_3 = \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \hat{x}_3) = \mathbf{L} \cdot (\omega_2 \hat{x}_1 - \omega_1 \hat{x}_2) = I_1 \omega_2 \omega_1 - I_1 \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Aquí se ha usado que $\mathbf{L} = I_1(\omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2) + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$, y que, tal como sucede para cualquier vector fijo al cuerpo,

$$\frac{d\hat{x}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{x}_3.$$

Definamos un nuevo sistema de coordenadas, fijo en el espacio, con el eje z' según la dirección de $\mathbf{L}$. Si se definen ángulos de Euler ϕ' , θ' y ψ' respecto de este sistema de coordenadas, lo que acabamos de demostrar es que el ángulo θ' , definido a partir del producto escalar de $\mathbf{L}$ con $\hat{x}_3$,

$$\mathbf{L} \cdot \hat{x}_3 = L \cos \theta' = I_3 \omega_3,$$

es constante. Esto significa que en la expresión de $\boldsymbol{\omega}$ en términos de los ángulos de Euler no aparecerá ninguno de los términos proporcionales a $\dot{\theta}'$,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi}' \sin \theta' \sin \psi', \\ \omega_2 &= \dot{\phi}' \sin \theta' \cos \psi', \\ \omega_3 &= \dot{\psi}' + \dot{\phi}' \cos \theta' .\end{aligned}$$

Uno asume conocido el valor de $\mathbf{L}$ y la dirección inicial del eje de simetría, $\hat{x}_3$, lo que implica conocer también el ángulo θ' que forman entre sí. Para relacionar $\dot{\phi}'$ y $\dot{\psi}'$ con el valor de $\mathbf{L}$ y de θ' , lo que podemos hacer es escribir el versor $\hat{z}'$ en términos de los versores $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ y $\hat{x}_3$,

$$\hat{z}' = \sin \theta' (\sin \psi' \hat{x}_1 + \cos \psi' \hat{x}_2) + \cos \theta' \hat{x}_3.$$

Igualando $\mathbf{L} = L \hat{z}'$ con $I_1(\omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2) + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$ y usando el hecho de que $I_3 \omega_3 = L \cos \theta'$, resulta

$$\dot{\phi}' = \frac{L}{I_1}. \quad (29)$$

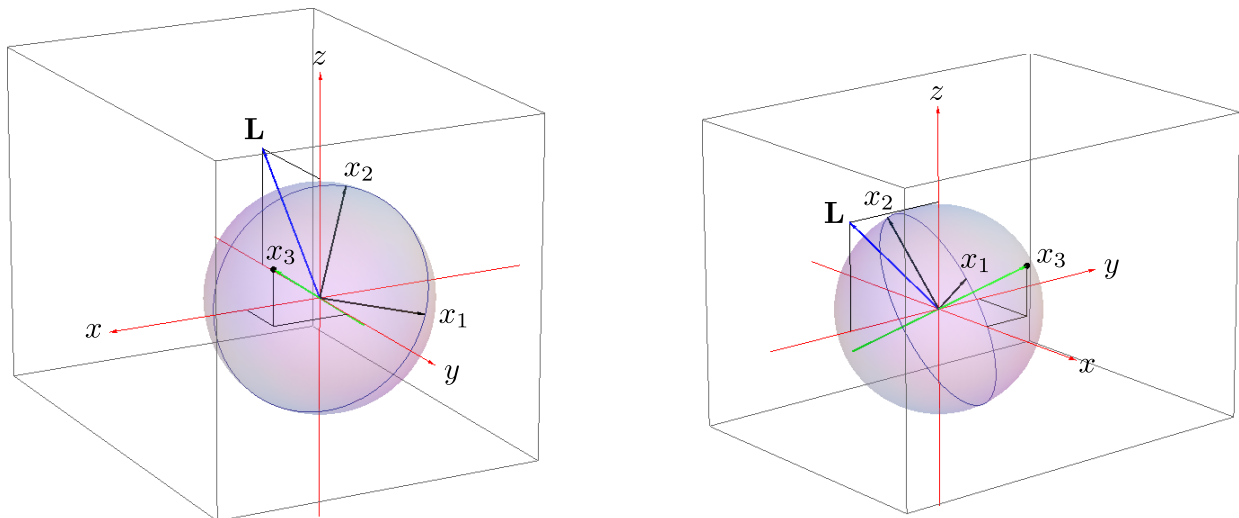
Una vez conocido $\dot{\phi}'$ podemos despejar $\dot{\psi}'$ a partir de la igualdad $I_3\omega_3 = L \cos \theta'$ juntamente con la expresión explícita de ω_3 en términos de $\dot{\psi}'$ y $\dot{\phi}'$,

$$\dot{\psi}' = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \theta'. \quad (30)$$

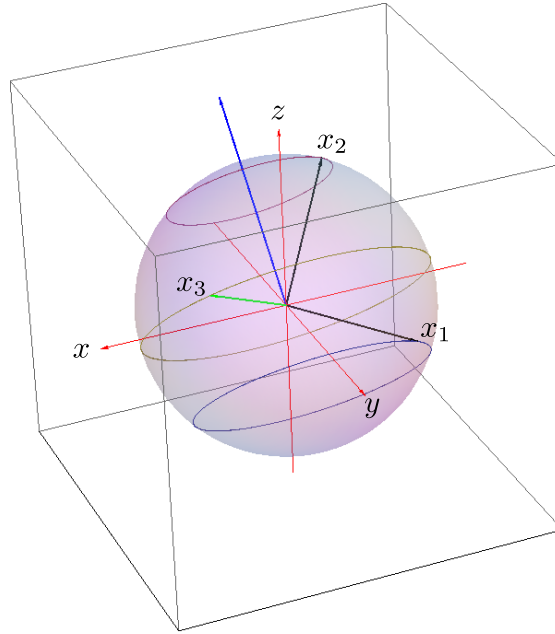
Notar que tanto $\dot{\psi}'$ como $\dot{\phi}'$ son constantes. En particular, $\dot{\phi}'$ representa una velocidad de precesión constante del eje $\hat{x}_3$ alrededor del eje definido por $\mathbf{L}$.

Otra característica notable es que si $\mathbf{L}$ y $\hat{x}_3$ forman un ángulo de $\pi/2$ entonces $\dot{\psi}' = 0$; en este caso se dice que el trompo no tiene “espín”. Además, debido a que se trata de un trompo simétrico, en el instante inicial uno puede hacer coincidir uno de los ejes principales degenerados con la dirección de $\mathbf{L}$, digamos el eje x_1 . Este eje permanece invariante, mientras que $\hat{x}_2$ y $\hat{x}_3$ giran con velocidad $\dot{\phi}' = L/I_1$ en el plano perpendicular a $\hat{x}_1$. El resultado es general y ocurre siempre que el momento angular de un cuerpo rígido está dirigido según alguno de los ejes principales. Lo que hace especial al trompo simétrico es que basta decir que $\mathbf{L}$ es perpendicular a $\hat{x}_3$ para estar en ese caso. Para el trompo asimétrico esa condición no es suficiente.

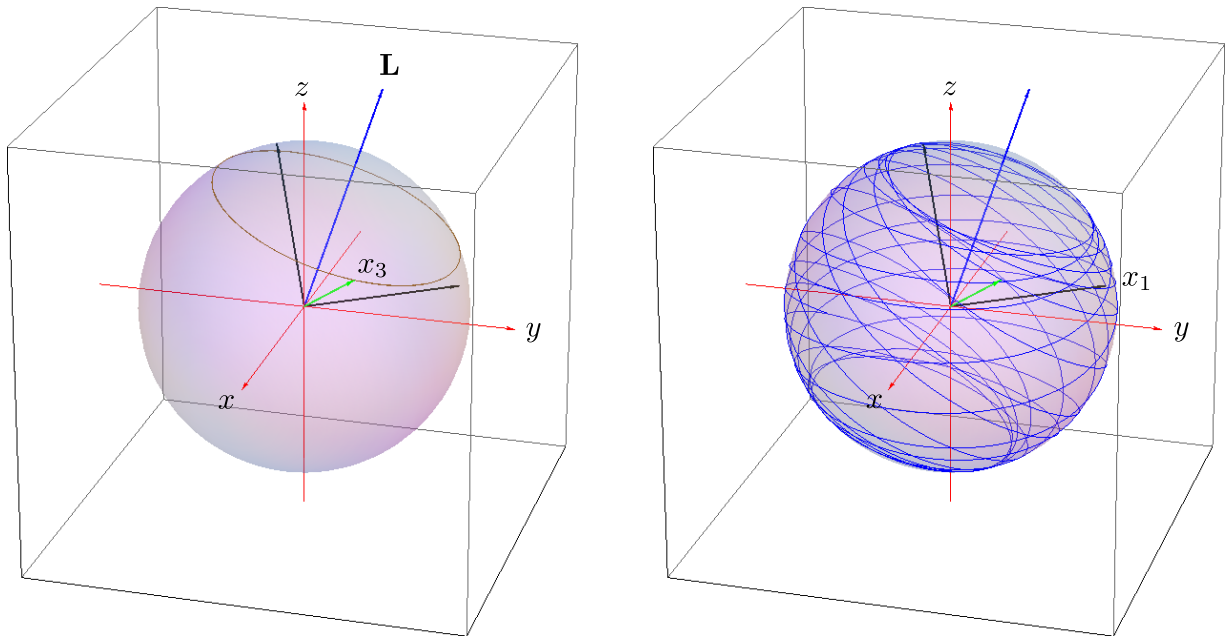
Hemos visto que en el problema de la guía el momento angular inicial de la partícula incidente no tiene ninguna componente sobre el eje $\hat{x}_3$. Esto era debido a la propia definición del momento angular: el origen, el centro de masa y el punto en que la partícula incide sobre la esfera están todos sobre la dirección de $\hat{x}_3$. Entonces tanto si uno calcula el momento angular de la partícula incidente respecto del centro de masa como si lo calcula respecto del origen se encuentra con algo proporcional a $\hat{x}_3 \times \mathbf{v}_0$, lo que evidentemente tiene una proyección nula sobre $\hat{x}_3$. Si la esfera inicialmente está en reposo, todo el momento angular es el que tiene la partícula antes del choque, así luego del choque estaremos en el caso en que $\mathbf{L} \cdot \hat{x}_3 \propto \cos \theta' = 0$. Este tipo de choque hace girar la esfera con una velocidad angular que está en la dirección perpendicular a $\hat{x}_3$, y este versor se mueve siempre sobre un mismo plano. La figura de abajo muestra dos vistas justo después del choque, con los ejes fijos al espacio, los fijos al cuerpo y el momento angular (notar que $\mathbf{L}$ está en el plano yz).



La figura siguiente muestra la traza que describen los versores fijos al cuerpo. Los tres versores giran alrededor de la dirección de $\mathbf{L}$. En especial, el versor $\hat{x}_3$ se mantiene en el plano perpendicular a $\mathbf{L}$. Los versores mostrados en la figura corresponden al momento justo después del choque, con el eje x_1 en el plano xy .

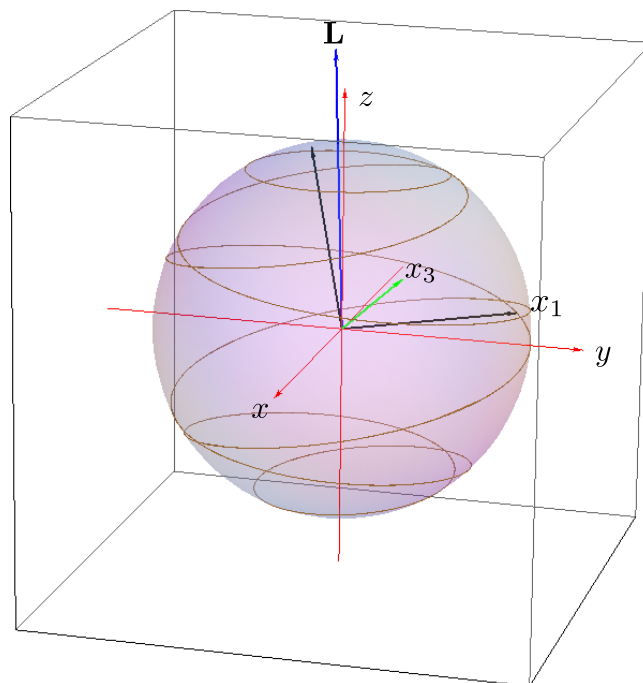


Para condiciones iniciales más generales, donde la esfera tiene una velocidad de rotación no nula antes del choque, sólo accidentalmente obtendremos un movimiento como el anterior. La figura de abajo muestra la traza de los versores $\hat{x}_3$ y $\hat{x}_1$ cuando antes del choque la esfera tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0(\hat{y} + \hat{z})$.

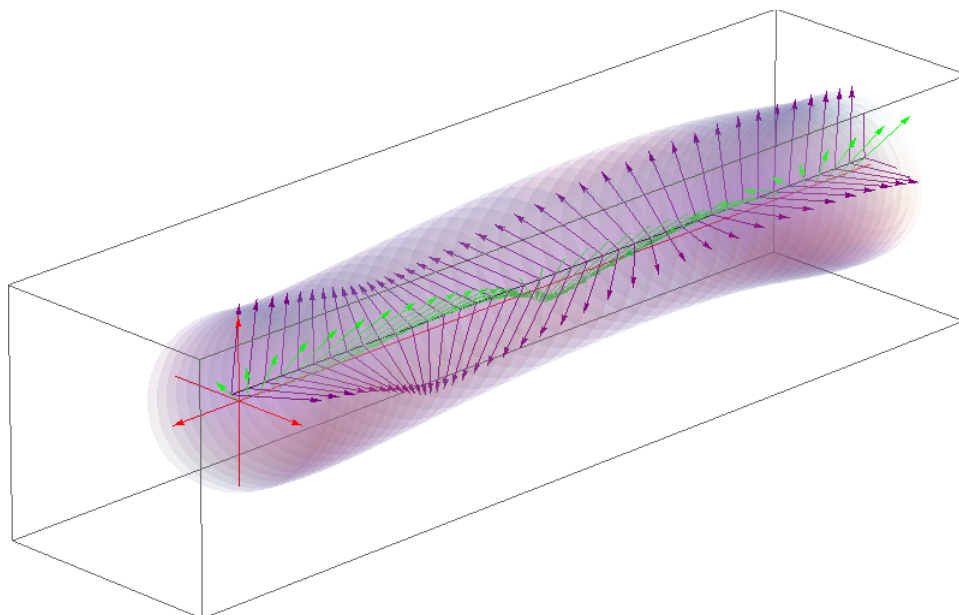


Debido a la simetría respecto del eje x_3 , los versores $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ describen la misma curva. La propiedad θ' constante es independiente del tipo de condición inicial, y así el versor $\hat{x}_3$ siempre describe un círculo.

La traza de los otros versores puede ser una curva cerrada o abierta, dependiendo de la relación entre las frecuencias $\dot{\psi}'$ y $\dot{\phi}'$, dadas por las Ecs. (29) y (30). La figura de abajo muestra una de tales curvas cerradas.



En todo lo anterior no hay que perder de vista que sólo estamos representando la rotación de la esfera. El movimiento completo incluye una traslación del centro de masa. La figura de abajo muestra varias posiciones de la esfera para el caso $\omega_0 = 0$. Notar que el hecho de que el centro de masa no coincida con el centro de la esfera produce una especie de vaivén o tambaleo.



El eje x_3 está indicado en verde.

