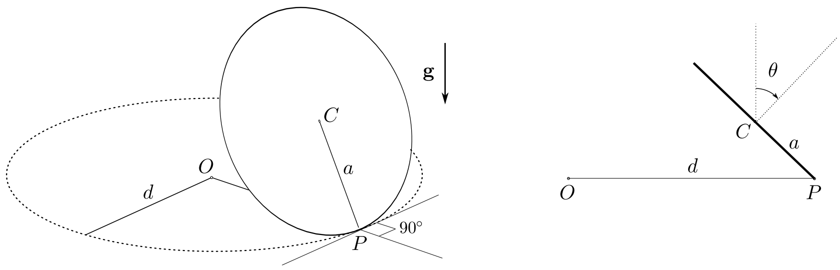
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2011 – Segundo parcial con soluciones (1/12/2011)

■ **Problema 1.** (4 puntos) Un disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. El punto de contacto P se encuentra siempre sobre el círculo de radio d con centro en el origen O. En todo instante, el plano que contiene al disco intersecta al plano horizontal según la dirección perpendicular a OP. El disco tiene masa m y radio a, y sus momentos de inercia principales son $I_1 = I_2 = ma^2/4$ e $I_3 = ma^2/2$. Hay gravedad.

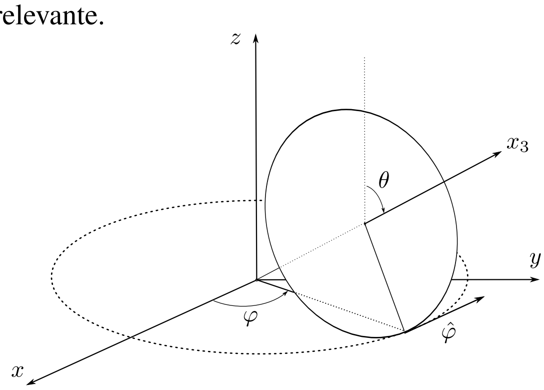
a) Escribir el Lagrangiano del sistema.

b) Mostrar que existen soluciones de las ecuaciones de movimiento en las cuales el centro del disco se mueve a velocidad constante sobre un círculo horizontal de radio fijo.

c) Encontrar el período de revolución del centro del disco como función de la distancia d y del ángulo θ mostrado en la figura.



■ **Solución.** Con los ejes fijos al cuerpo mostrados en la figura, el ángulo θ coincide con el tercer ángulo de Euler. El ángulo φ de Euler difiere en 2π del ángulo de las coordenadas polares del centro del disco, pero como en el lagrangiano sólo aparecerá $\dot{\varphi}$, la distinción es irrelevante.



La energía cinética del disco puede descomponerse en un término de traslación, asociado al centro de masa, más un término de rotación respecto del centro de masa. La posición y velocidad del centro de masa es

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\rm cm} &= (d - a\cos\theta)\,\hat{\rho}(\varphi) + a\sin\theta\,\hat{z},\\
\mathbf{v}_{\rm cm} &= (d - a\cos\theta)\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}(\varphi) + a\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\rho} + a\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{z},\\
v_{\rm cm}^2 &= (d - a\cos\theta)^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\theta}^2.
\end{aligned}$$

La energía asociada al movimiento del centro de masa es

$$T_{\rm cm} = \frac{1}{2}mv_{\rm cm}^2.$$

En general, para un trompo simétrico la energía cinética de rotación es

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2.$$

En este problema la condición de rodadura relaciona φ con ψ. Que la velocidad del punto del disco en contacto con el plano sea cero significa

$$0 = \mathbf{v}_{\rm cm} + \boldsymbol{\Omega} \times (a\cos\theta\,\hat\rho - a\sin\theta\,\hat z),$$

donde la velocidad angular tiene tres contribuciones:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\varphi\,\hat z + \dot\theta\,\hat\varphi + \dot\psi\,\hat x_3.$$

La condición de rodadura termina siendo la que uno hubiera propuesto simplemente trazando un dibujo,

$$a\dot\psi = -d\dot\varphi.$$

Un error frecuente encontrado al corregir los parciales fue que esta relación aparecía con el signo cambiado. Ese error era evitable con un mínimo de visualización de lo que estaba pasando.

La condición de rodadura en este problema es una condición integrable: es un vínculo holónomo. Esto quiere decir que establece una relación entre las coordenadas φ y ψ que puede escribirse inmediatamente,

$$\psi = \frac{d}{a}\varphi + \psi_0.$$

Al final, el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - mga\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(d - a\cos\theta)^2\dot\varphi^2 + a^2\dot\theta^2\right] + \frac{ma^2}{8}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{m}{4}\dot\varphi^2 (d - a\cos\theta)^2 - mga\sin\theta$$

$$= \left[6(d - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]\frac{m\dot\varphi^2}{8} + \frac{5}{8} m a^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta.$$

Debido a que φ es cíclica, su ecuación de movimiento puede escribirse directamente como

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = p_\varphi, \tag{1}$$

donde p_φ es una constante. De manera explícita,

$$\left[6(d - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]\frac{m\dot\varphi}{4} = p_\varphi. \tag{2}$$

La ecuación de movimiento asociada a θ es

$$\frac{5}{4} m a^2\ddot\theta = \left[6a(d - a\cos\theta) + a^2\cos\theta\right]\sin\theta\frac{m\dot\varphi^2}{4} - mga\cos\theta.$$

Una solución donde el centro del disco de mueva sobre un círculo de radio constante equivale (salvo casos singulares) a pedir $\dot\theta = \ddot\theta = 0$, es decir θ debe ser constante. Si además el círculo es recorrido a velocidad constante, $\dot\varphi$ debe ser constante. La Ec. (1) se satisface de manera automática para cierto valor de p_φ. Para que se satisfaga (2) debe ser

$$\left[6a(d - a\cos\theta) + a^2\cos\theta\right]\sin\theta\frac{m\dot\varphi^2}{4} - mga\cos\theta = 0.$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{a} \frac{\cot\theta}{6d - 5a\cos\theta}.$$

Siempre que el miembro de la derecha sea mayor que cero, fijado θ, hay un valor de $\dot{\varphi}^2$ que hace que el disco se mueva según una de las soluciones propuestas. Es fácil demostrar que estas soluciones corresponden a valores de θ tales que

$$0 < \cos\theta < \frac{6d}{5a}.$$

El problema también podía llevarse a la forma de un problema unidimensional en la variable θ gobernado por cierto potencial efectivo. Las cuentas al final son las mismas.

■ **Problema 2.** (3 puntos) Para el problema del trompo simétrico sostenido desde su centro de masa.

a) Exprese el Hamiltoniano en función de las coordenadas y momentos generalizados.

b) Usando la técnica de Hamilton-Jacobi, dar una expresión explícita o implícita para $\theta(t), \phi(t), \psi(t)$ en términos de derivadas paramétricas de integrales (reducir a cuadraturas, θ, ϕ, ψ son los ángulos de Euler).

Datos: $I_1 = I_2 = I$ e I_3: momentos principales de inercia con respecto al centro de masa.

■ **Solución.** El lagrangiano de un trompo simétrico sostenido desde su centro de masas y sin campos externos es

$$L = T = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2.$$

Como L es una función cuadrática de las velocidades y no hay campos externos $L = T = H$. El hamiltoniano debe quedar escrito en términos de los momentos conjugados,

$$\begin{aligned}
p_\psi &= I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right), \\
p_\varphi &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 \cos\theta \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) = I_1 \dot{\varphi}\sin^2\theta + p_\psi \cos\theta, \\
p_\theta &= I_1 \dot{\theta}.
\end{aligned}$$

Escribiendo las velocidades en términos de los momentos, resulta

$$H(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi) = \frac{1}{2I_1} p_\theta^2 + \frac{1}{2I_1 \sin^2\theta} \left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2I_3} p_\psi^2.$$

Para escribir la ecuación de Hamilton$-$Jacobi podemos usar desde el comienzo que ni el tiempo ni las variables φ y ψ aparecen explícitamente en el hamiltoniano. Eso quiere decir que para la función principal de Hamilton puede proponerse una solución de la forma

$$S = W(\theta) + \varphi p_\varphi + \psi p_\psi - \alpha t.$$

(A esto puede llegarse planteando separación de variables.) Dos de los nuevos impulsos, p_φ y p_ψ, coinciden con los originales. La constante α puede elegirse como el tercer impulso. La ecuación de Hamilton$-$Jacobi es entonces

$$H\left[\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, W'(\theta), p_\psi\right] = \alpha,$$

$$\frac{1}{2I_1} W'(\theta)^2 + \frac{1}{2I_1 \sin^2\theta} \left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2I_3} p_\psi^2 = \alpha \tag{3}$$

De aquí se obtiene

$$W(\theta) = \int d\theta \, \left[\alpha - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2 + \frac{I_1}{I_3} p_\psi^2\right]^{1/2}.$$

Es suficiente con dejar escrita la integral indefinida, ya que la función principal de Hamilton siempre puede contener una constante aditiva. Las nuevas coordenadas generalizadas se obtienen tomando las derivadas de S respecto de los impulsos α, p_φ y p_ψ,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t, \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial W}{\partial p_\varphi} + \varphi, \\ \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial p_\psi} = \frac{\partial W}{\partial p_\psi} + \psi. \end{aligned}$$

La primera ecuación da implícitamente θ como función de t. Las otras dos ecuaciones dan explícitamente φ y ψ como funciones de θ, a su vez función implícita de t. Esto resuelve el problema.

■ **Problema 3.** (3 puntos) El Hamiltoniano que describe una partícula relativista de masa en reposo nula en un potencial atractivo kx^2 es: $H = c|p| + kx^2$.

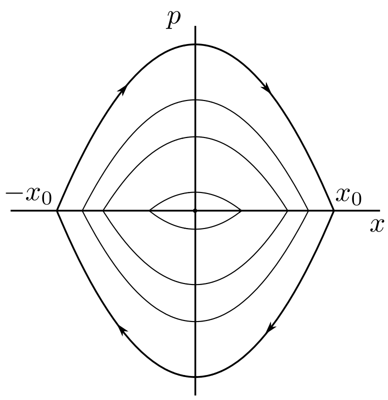
a) Dibujar las trayectorias en el espacio de fases. Obtener las ecuaciones dinámicas e integrarlas explícitamente para la condición $x = x_0$, $p = 0$. (**Ayuda:** Emplee las trayectorias del espacio de fases.) Encuentre explícitamente el período del movimiento, expresándolo en función de $\mathcal{E} = kx_0^2$ (energía inicial).

b) Use el formalismo de variables ángulo-acción para verificar lo obtenido en a).

▪ **Solución.** Las trayectorias en el espacio de fases corresponden a las curvas de $H = \mathcal{E} = \text{cte.}$, lo que implica

$$p = \pm\frac{1}{c}(\mathcal{E} - kx^2).$$

Algunas de estas curvas están graficadas en la figura de abajo.



El mínimo valor posible de $\mathcal{E}$ es cero, y corresponde a $p = x = 0$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = c \,\mathrm{signo}\, p,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2kx.$$

A partir de los signos que aparecen en estas ecuaciones, se ve que las trayectorias son recorridas en el mismo sentido que las agujas del reloj. Dado $\mathcal{E}$, la partícula efectúa un movimiento de libración que puede analizarse fijando el origen del tiempo en el momento en que la partícula pasa por $p = 0$ y $x = x_0 = \sqrt{\mathcal{E}/k}$. Basta encontrar la posición y el impulso entre $t = 0$ y el momento en que vuelve a pasar por $p = 0$ y $x = x_0$. A partir de ahí el movimiento se repite periódicamente.

Lo más sencillo es analizar cada tramo de la trayectoria, según sea p menor o mayor que cero. La partícula parte de x_0 con $\dot{p} = -2kx_0$. Esto significa que para t inmediatamente posterior a $t = 0$, p es negativo. Un impulso negativo implica $\dot{x} = -c$, y a su vez $x = x_0 - ct$. La ecuación para p es entonces

$$\dot{p} = -2kx = -2k(x_0 - ct),$$

y su solución

$$p(t) = -k\left(2x_0 t - ct^2\right).$$

Cuando $t = 2x_0/c$, $x = -x_0$, p vuelve a anularse y $\dot{p} = 2kx_0 > 0$. Inmediatamente después p se hace positivo y la ecuación para x es $\dot{x} = c$. La partícula se mueve según las ecuaciones

$$x = -x_0 + c(t - 2x_0/c), \qquad p = k\left(-ct^2 + 6tx_0 - \frac{8x_0^2}{c}\right)$$

El único cuidado que hay que tener para llegar a estas fórmulas es que para la rama superior el punto de partida corresponde a un tiempo $t = 2x_0/c$, con x partiendo desde $-x_0$. De manera más sencilla, la ecuación para $p(t)$ también puede obtenerse a partir de la conservación de la energía, escribiendo

$$p(t) = \frac{1}{c}\left[\mathcal{E} - kx(t)^2\right] = \frac{k}{c}\left[x_0^2 - x(t)^2\right].$$

La partícula regresa al punto inicial del espacio de fases cuando p vuelve a anularse, lo que ocurre al cabo de un tiempo $t = 4x_0/c$. Un ciclo completo dura así un tiempo $\tau = 4x_0/c$. En términos de la energía es

$$\tau = \frac{4}{c}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{k}}.$$

La variable de acción J se calcula como el área encerrada por una curva de energía constante,

$$J = \oint_{\mathcal{E}} dx\, p = 2\int_{-\sqrt{\mathcal{E}/k}}^{\sqrt{\mathcal{E}/k}} dx\, \frac{\mathcal{E} - kx^2}{c} = \frac{8k}{3c}\left(\frac{\mathcal{E}}{k}\right)^{3/2}.$$

El período del movimiento es

$$\tau = \frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} = \frac{4}{c}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{k}},$$

que es el mismo resultado de antes.

Para obtener la función generatriz hay que calcular la integral $\int^x dx\ p$ a lo largo de la trayectoria. Lo haremos sólo para el primer ciclo. Partiendo desde $x = x_0$, sobre la rama con $p < 0$ será

$$W = \int_{x_0}^{x} dx\ \frac{-\mathcal{E} + kx^2}{c},$$

en tanto que si $p > 0$ la integral deberá completarse sobre la rama superior

$$W = \int_{x_0}^{-x_0} dx\ \frac{-\mathcal{E} + kx^2}{c} + \int_{-x_0}^{x} dx\ \frac{\mathcal{E} - kx^2}{c}.$$

La elección de x_0 como punto de referencia es arbitraria pero conveniente. Al completar un ciclo x y p vuelven a sus valores iniciales pero W, que partió de cero, toma el valor

$$W_{1\ \text{ciclo}} = \oint dx\ p = J.$$

Es suficiente con escribir W durante el primer ciclo. El resultado final es

$$W = \frac{J}{4} - \frac{kx}{c}\left(\frac{3cJ}{8k}\right)^{2/3} + \frac{kx^3}{3c}, \qquad \text{si } p < 0,$$

$$W = \frac{3J}{4} + \frac{kx}{c}\left(\frac{3cJ}{8k}\right)^{2/3} - \frac{kx^3}{3c}, \qquad \text{si } p > 0.$$

Es fácil verificar que

$$p = \frac{\partial W}{\partial x}.$$

La variable ángulo es $\theta = \partial W/\partial J$, y resulta

$$\theta = \frac{1}{4} - \frac{2kx}{3c}\left(\frac{3c}{8k}\right)^{2/3} J^{-1/3}, \qquad \text{si } p < 0,$$

$$\theta = \frac{3}{4} + \frac{2kx}{3c}\left(\frac{3c}{8k}\right)^{2/3} J^{-1/3}, \qquad \text{si } p > 0. \tag{4}$$

Por otro lado, la evolución de θ es lineal en el tiempo

$$\theta = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J}\right) t = \frac{2k}{3}\left(\frac{3c}{8k}\right)^{2/3} J^{-1/3}\, t.$$

Con algo de trabajo, la comparación entre esta expresión y las fórmulas (4) implica $x = x_0 - ct$ sobre la rama inferior y $x = -x_0 + c(t - 2x_0/c)$ sobre la rama superior. Estas expresiones son válidas durante el primer ciclo de la trayectoria y coinciden con las que se obtuvieron antes por medios más elementales.