

Laboratorio 2.
Material para leer previamente a las clases
Segundo cuatrimestre 2026
Miércoles 14-20 h.

v1: Primer cuatrimestre 2024
v2: Segundo cuatrimestre 2025
v3: Segundo cuatrimestre 2026

9 de septiembre de 2026

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Objetivo de este cuaderno	7
1.2. Guía de lectura	7
1.3. Generalidades sobre ondas	9
1.4. Ondas planas, esféricas y cilíndricas	13
2. Ondas de ultrasonido	19
2.1. Los piezoeléctricos como transductores de ultrasonido	21
2.2. Calibración y regresión lineal	24
2.3. Modelando la respuesta en frecuencias del par emisor-receptor	26
2.4. Caracterización espacial de la onda emitida por el piezoeléctrico	28
2.5. Repaso de ondas en gases y condiciones de borde	30
2.6. Interferencia de ondas de ultrasonido	32
2.6.1. Interferómetro de Fabry-Pérot acústico	33
2.6.2. Interferómetro de Young acústico	35
2.6.3. Como cambia la cuenta para amplitudes y fases arbitrarias	38
2.6.4. Diferencias entre ondas en frecuencias ópticas y acústicas	40
2.7. Fase de la onda esférica en un plano	41
3. La respuesta del detector en las mediciones	43
3.1. Convolución: operación matemática	46
3.2. Convolución: intrínseca en el proceso de medición	50
3.3. El detector ideal y el real	52
4. Ondas estacionarias	55
4.1. Ondas estacionarias en cuerdas	58
4.1.1. Condiciones de contorno	58
4.1.2. Cuerda con dos extremos fijos	59
4.1.3. Cuerda con un extremo libre y uno fijo	60
4.1.4. Cuerda con un extremo fijo y otro forzado	62
4.1.5. Experimento: ondas estacionarias en cuerdas.	63
4.2. Ondas estacionarias en tubos	64

4.2.1.	Condiciones de borde en tubos	66
4.2.2.	Modos normales en tubos	68
4.2.3.	Experimentando con tubos: el tubo de Kundt	68
4.2.4.	Velocidad del sonido en un gas	70
5.	Digitalización y adquisición de señales	75
5.1.	Señales analógicas y digitales	76
5.2.	Muestreo	77
5.3.	Frecuencia de Nyquist y aliasing	77
5.4.	Cuantización de la amplitud	80
5.5.	Frecuencia de muestreo, número de bits y cantidad de datos	82
5.6.	¿Qué estamos eligiendo cuando configuramos un osciloscopio?	82
5.7.	De la señal digitalizada a sus componentes de frecuencia	83
6.	Composición de señales	85
6.1.	Recordando algunas cosas estudiadas en Física 2	86
6.1.1.	La serie y la transformada de Fourier	86
6.1.2.	Serie de Fourier y condiciones iniciales en un sistema acotado	90
6.1.3.	Ejemplos del uso de la transformada de Fourier en óptica	93
6.1.4.	Sintetizando señales periódicas	94
6.2.	Sintonizando señales con los piezoeléctricos	97
6.3.	Respuesta temporal de un sistema	99
6.3.1.	Respuesta al impulso	101
6.3.2.	Respuesta al escalón	105
6.4.	Frecuencia de muestreo y transformada de Fourier	108
7.	Ondas electromagnéticas	113
7.1.	Polarización de la luz	115
7.2.	Fenómenos que polarizan la luz	117
7.2.1.	Polarización por reflexión	117
7.2.2.	Polarización por dicroísmo	118
7.2.3.	Polarización por dispersión (scattering)	121
7.2.4.	Polarización por birrefringencia	123
7.3.	Detectores de luz	125
7.4.	Características de los láseres	126
7.4.1.	Polarización	130
7.4.2.	Estabilidad Temporal	130
7.4.3.	Distribución espacial de intensidad	131
7.4.4.	Divergencia	132
7.4.5.	Brillo	133

8. Difracción	135
8.1. La integral de Kirchhoff	135
8.1.1. Aproximación de Fresnel	137
8.1.2. Aproximación de Fraunhofer	139
8.1.3. El truco de la lente	139
8.2. Difracción por una rendija rectangular	140
8.3. Máscaras complementarias	143
9. Lentes y sistemas formadores de imágenes	147
9.1. Sistemas de lentes simples	147
9.1.1. La ecuación de la lente, las bases de la óptica geométrica	148
9.1.2. Apertura numérica, profundidad de foco y resolución	148
9.2. Sistemas formados por varias lentes	151
10. Espectrometría	153
10.1. Espectrómetros	154
10.2. La detección en espectrometría	155
10.3. Redes de difracción	156
10.4. La difracción de una fuente no monocromática	159
10.5. Resolución	161
10.5.1. La red de difracción: resolución límite o resolución limitada por difracción o poder resolvente cromático	163
10.5.2. La rendija de entrada	164
10.5.3. Los píxeles en el detector	166
10.6. Estimación de la resolución	166
10.7. Medición de absorbancia	167
10.8. Experimento	168
Apéndice	171
S1. Transformada de Fourier función escalón	171
S2. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación sinusoidal	172
S3. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación triangular	173
S3.1. Transformada de Fourier del producto de dos exponenciales	176
S3.2. Todas las frecuencias	176
S4. Intentemos otra forma más directa	177
S4.1. Solución de la integral	178

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo de este cuaderno

El material presentado en este cuadernillo es de lectura **obligatoria** y **previa a la clase** de laboratorio. Incluye conceptos estudiados en Física 2 y conceptos vinculados con las mediciones que abordaremos en este laboratorio. No pretende ser un repaso teórico exhaustivo y debe complementarse con bibliografía sobre ondas, óptica y técnicas de medición. Además se incorporan propuestas de mediciones y preguntas **para pensar antes de la clase**. Es decir, es una invitación a pensar en qué medir y cómo medir, pero no una guía de cómo hacerlo. Al inicio de cada clase discutiremos lo que ustedes pensaron respecto al material y sobre cómo hacer los experimentos. No se darán clases teóricas por lo que es **obligatorio** venir al laboratorio con el material leído. Conocer el material de este texto: ¿es necesario? ¡Sí! Los conceptos son fundamentales para entender ondas en distintos medios y entender bien los experimentos que estamos haciendo. ¿Es suficiente? ¡No! Siempre podemos aprender más si hacemos nuestras propias búsquedas. Se recomienda fuertemente leer la bibliografía.

En la clase: dado que utilizaremos el mismo material durante todo el semestre, intentaremos elegir el material identificado con el mismo número que el cuarto asignado. De este modo, podremos trabajar siempre con el mismo equipamiento a lo largo de las distintas experiencias.

1.2. Guía de lectura

Se completará esta tabla a lo largo del cuatrimestre

Clase	Lectura previa	Lectura posterior
Clase 1: Caracterización de respuesta en frecuencia y linealidad de par emisor receptor piezoeléctrico	Capítulo 1: introducción Capítulo 2 Secciones: hasta 2.2	Capítulo 2 Secciones: 2.2 y 2.3
Clase 2: Decaimiento de la amplitud con la distancia Longitud de onda	Capítulo 2 Secciones: 2.4	
Clase 3: Interferencia de Ondas de ultrasonido	Capítulo 2 Secciones 2.5, 2.6	Capítulo 3
Clase 4 y 5: Ondas estacionarias	Capítulo 4 (elegir sección cuerdas o tubos según lo que te toque ver en la clase) Capítulo 5	
Clase 6: Composición de ondas	Capítulo 6 (como mínimo hasta la sección 5.2)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 7: Caracterización de un láser-polarización	Capítulo 7 (como mínimo secciones 7.1 y 7.2)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 8 Difracción	Capítulo 8 (como mínimo secciones 8.1 y 8.2)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 9 Lentes	Capítulo 9	

1.3. Generalidades sobre ondas

En esta materia realizaremos experimentos empleando ondas de distintos tipos: ondas mecánicas transversales (vibraciones en cuerdas) y longitudinales (ondas acústicas), y ondas electromagnéticas transversales. Todas ellas satisfacen la ecuación de ondas (por simplicidad aquí tomamos el caso unidimensional). La ecuación de ondas unidimensional para un medio lineal, isótropo y homogéneo, está dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

donde $\Psi(x, t)$ representa a la perturbación en el espacio (desplazamiento longitudinal de partículas en un gas o líquido, presión o densidad para el caso de ondas acústicas en aire, desplazamiento transversal en una cuerda o campo electromagnético para el caso de la luz), x es la coordenada espacial y t el tiempo. La velocidad de propagación de las ondas

(v) depende de las características del medio en que estas se propaguen y del tipo de onda. En la tabla 1.1 se observa la dependencia de la velocidad de propagación con distintos parámetros del sistema, para las ondas que serán estudiadas en este laboratorio.

mecánicas	Cuerdas Ondas de desplazamiento (transversales)	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	T tensión [N] μ densidad lineal [kg/m]
	Acústicas Ondas de presión, densidad (longitudinales)	Gases y líquidos $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ Gases: $K = \gamma P$	K módulo de compresibilidad [Pa] ρ densidad [kg/m ³] γ , coeficiente de dilatación adiabática P , presión del gas [Pa]
		Sólidos $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	E , módulo de Young [Pa] ρ , densidad [kg/m ³]
electromagnéticas	Campo electromagnético:	$v = \frac{c}{\eta}$	η índice de refracción $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ velocidad de la luz en vacío

Tabla 1.1: Velocidad de propagación para ondas mecánicas que se propagan en distintos medios y ondas electromagnéticas. La expresión $v = \sqrt{E/\rho}$ corresponde al caso de ondas longitudinales en una barra; en un sólido tridimensional la velocidad depende, en general, de más de una constante elástica.

Una posible solución de la ecuación de ondas es una onda que se propaga hacia la derecha (en la dirección de crecimiento de x) y puede escribirse como

$$\Psi_+(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_A), \quad (1.2)$$

en donde A es la amplitud, φ_A una fase inicial, ω es la frecuencia angular y k el número de onda. También se puede usar la notación compleja para escribir a la función de onda

$$\Psi_+(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t + \varphi_A)}, \quad (1.3)$$

lo que hace más fácil realizar ciertas operaciones, pero el verdadero significado físico lo tiene la parte real. Además podemos definir a la fase de la onda como

$$\Phi_+(x, t) = kx - \omega t + \varphi_A. \quad (1.4)$$

Análogamente, la onda que se propaga hacia la izquierda (hacia valores decrecientes de x) también es solución de la ecuación de ondas, y puede escribirse como

$$\Psi_-(x, t) = B \cos(kx + \omega t + \varphi_B). \quad (1.5)$$

Supongamos que tomamos una foto instantánea de la onda, de modo que observamos la dependencia con la coordenada espacial como se muestra en la figura 1.1. La amplitud

A es el máximo valor absoluto de la perturbación respecto de su valor de equilibrio. La constante φ_A es la fase inicial de la onda: corresponde al valor de la fase en $x = 0$ y $t = 0$, para el origen espacial y temporal elegido. Su valor determina el desplazamiento de la onda respecto de la función de referencia $\cos(kx - \omega t)$. Por ejemplo, a un tiempo fijo, un cambio φ_A produce un desplazamiento espacial $\Delta x = -\varphi_A/k$.

La longitud de onda, λ , es la distancia en que la onda cubre un ciclo completo, y es además la distancia entre dos puntos idénticos en fase, es decir, puntos en el espacio en que la onda tiene igual amplitud y pendiente. Observar que no es necesario comenzar a medirla desde un máximo. Podría medirse desde cualquier punto en la onda, hasta el siguiente punto de igual fase. El número de onda está relacionado con la longitud de onda como $k = 2\pi/\lambda$.

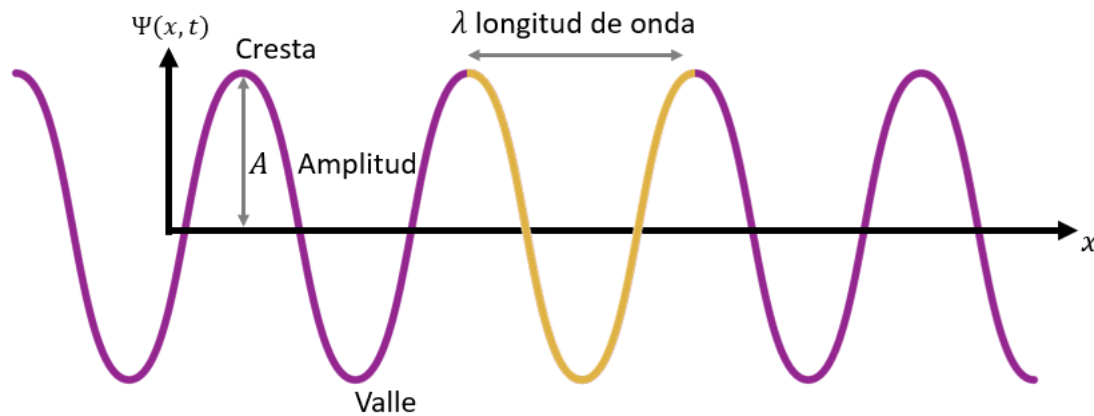


Figura 1.1: Propagación en el espacio de la onda para un tiempo t .

Análogamente, podemos pararnos en un punto del espacio y medir la evolución temporal de la onda, como se muestra en la figura 1.2. De esta forma podemos definir el período T (cuándo dura un ciclo completo o el tiempo en que la fase tarda en tomar el mismo valor), la frecuencia $f = 1/T$ (número de oscilaciones por segundo) y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

Consideremos la relación entre las propiedades espaciales y temporales. Una manera sencilla de explorar esta conexión es sustituir la solución de la ecuación 1.5 en la ecuación de ondas. Esto nos permite obtener la relación de dispersión de las ondas, que en el caso de un medio no dispersivo (v independiente de ω), es lineal:

$$\omega = vk. \quad (1.6)$$

¿Qué implica que la relación entre ω y k sea lineal? En una primera lectura podemos decir que todas las ondas, independientemente de su frecuencia, se propagan con la misma velocidad. Esto es especialmente importante porque significa que si tengo un paquete de

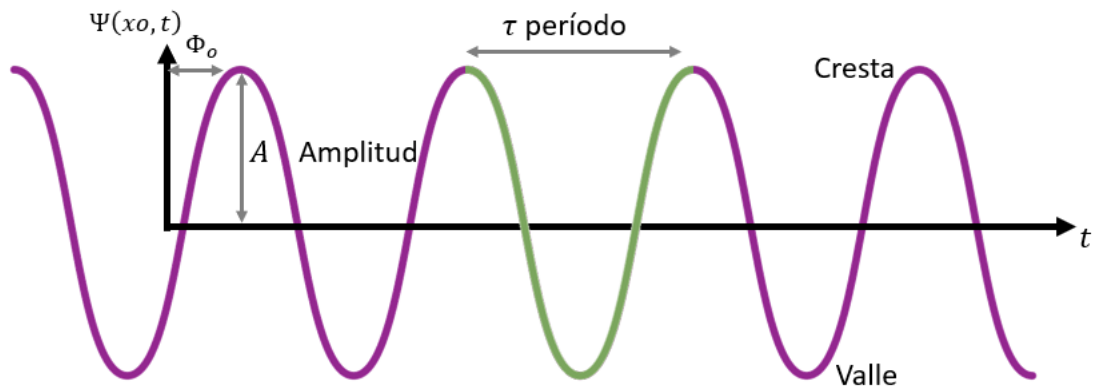


Figura 1.2: Propagación de la onda en un punto del espacio x_o .

ondas (superposición de ondas de distintas frecuencias) en un medio, este se propaga sin deformarse.

Supongamos entonces que ahora observamos una onda monocromática (es decir con una única frecuencia) propagándose y tomamos dos fotos en los tiempos $t = 0 \text{ s}$ y $t = 1 \text{ s}$. Considerando el esquema de la figura 1.3, y que la frecuencia es el número de veces que la onda pasa por un mismo punto del espacio por segundo, diríamos que la onda que estamos observando tiene una frecuencia $f = 1,75 \text{ Hz}$.

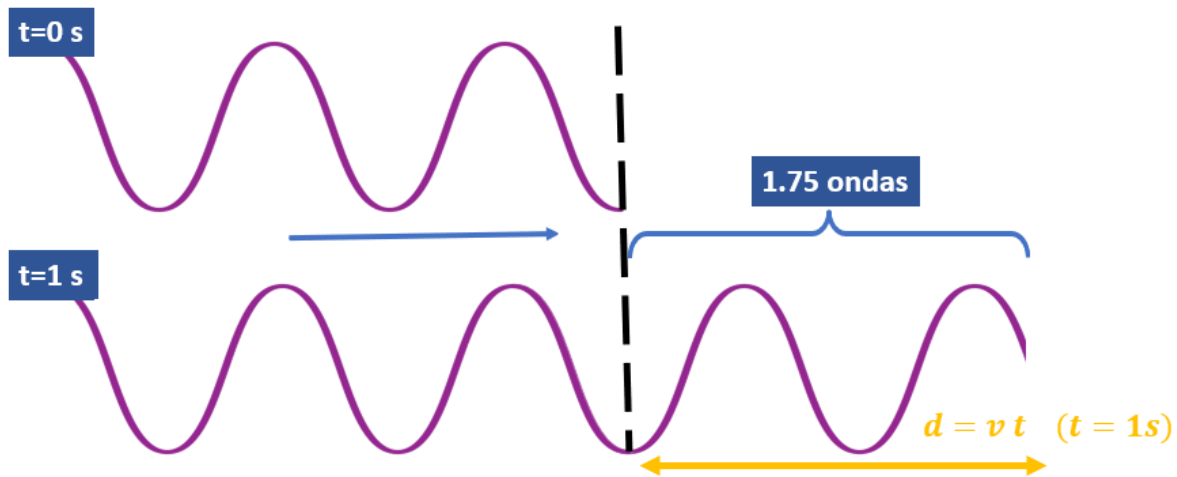


Figura 1.3: Propagación de una onda monocromática vista en los tiempos $t = 0 \text{ s}$ y $t = 1 \text{ s}$.

Si la velocidad de propagación de la onda es v , en un intervalo de tiempo Δt , la onda recorre una distancia $d = v\Delta t$. El número N de longitudes de onda contenidas en esa distancia es

$$N = \frac{d}{\lambda} = \frac{v \Delta t}{\lambda} \quad (1.7)$$

Como la frecuencia es el número de ciclos que pasan por un punto del espacio (por ejemplo el indicado por la línea entrecortada en la figura) por unidad de tiempo,

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda}. \quad (1.8)$$

Usando que $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$, se obtiene

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \omega = vk. \quad (1.9)$$

Esto indica que en un período de oscilación $T = 1/f$ la onda se propaga una longitud de onda λ . Hallamos así, la relación de dispersión en medios lineales, solamente suponiendo que la velocidad de propagación es constante.

En el ejemplo de la figura 1.3 se observa un desplazamiento de $1,75\lambda$ durante $1s$. Por lo tanto, $N = 1,75$ ciclos y $f = 1,75Hz$.

Debido a que la ecuación de ondas es lineal, es válido el **principio de superposición**. Por lo tanto, una solución general puede construirse como una superposición de ondas que se propagan en ambas direcciones, con distintas amplitudes, fases y números de onda (como la de la expresión 1.5). En un medio no confinado esta superposición se describe, en general, mediante una integral sobre k ; en un sistema confinado, las condiciones de contorno seleccionan valores discretos de k (y por lo tanto ω) y la superposición se transforma en una suma (solo algunas ondas pueden propagarse en el medio confinado):

$$\Psi(x, t) = \sum_k [A_k \cos(kx - \omega t + \varphi_{A,k}) + B_k \cos(kx + \omega t + \varphi_{B,k})] \quad (1.10)$$

1.4. Ondas planas, esféricas y cilíndricas

La ecuación de ondas tridimensional en coordenadas cartesianas para un medio lineal, isótropo y homogéneo, está dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t), \quad (1.11)$$

donde $\Psi(\vec{r}, t)$ representa a la perturbación en el espacio (desplazamiento o presión para el caso de ondas acústicas en aire), puede representar una magnitud escalar o vectorial y puede describir ondas longitudinales o transversales. Además, $\vec{r}$ es el vector de coordenadas espaciales, t el tiempo y v la velocidad de propagación, que en general depende de las características del medio y de la frecuencia. En un medio no dispersivo, donde v puede considerarse independiente de la frecuencia, la relación de dispersión es lineal:

$$\omega = vk, \quad (1.12)$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda y λ la longitud de onda. Una solución particularmente importante de la ecuación de ondas es la onda plana

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_o \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0), \quad (1.13)$$

en donde A_o es una amplitud constante, Φ_0 una fase inicial y $\vec{k}$ el vector de ondas cuyo módulo es k . Podemos definir también a la fase de la onda como

$$\Phi(\vec{r}, t) = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0. \quad (1.14)$$

Nota: Se puede usar la notación compleja para escribir a la función de onda

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_o e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0)}, \quad (1.15)$$

lo que hace más fácil realizar ciertas operaciones, pero el verdadero significado físico lo tiene la parte real.

Además, por el principio de superposición, la solución más general de la ecuación de ondas es combinación lineal de todas las posibles soluciones de la ecuación 1.13 (una suma de ondas con distintas frecuencias, amplitudes, vector de ondas).

Como ejemplo de una onda transversal, supongamos que la onda se propaga en la dirección $\hat{z}$, por lo que $\vec{k} = k\hat{z}$ y está polarizada en $\hat{x}$. Por simplicidad también supondremos que la fase inicial es cero, $\Phi_0 = 0$, aunque estas dos consideraciones no son necesarias. De este modo, la solución de la ecuación de ondas es

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}, \quad (1.16)$$

siendo la fase $\Phi(z, t) = kz - \omega t$.

Ahora busquemos cuál es el conjunto de puntos en el espacio que oscilan con la misma fase. Para eso suponemos una fase constante ($\Phi(z, t) = cte$) y despejamos la variable z , obteniendo

$$z = \frac{\omega}{k}t + cte = vt + cte.$$

Es decir, la fase es constante en planos perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{z}$. Decimos entonces que el **frente de ondas** es plano. Estos planos se propagan con la velocidad de propagación v (o velocidad de fase) hacia los z positivos. Además, por cómo definimos inicialmente a la onda, la amplitud también es constante en esos planos. En la figura 1.4 se puede observar un esquema de estos planos de fase y amplitud constante.

Nota: Análogamente podemos definir una onda que se propaga hacia z negativos con un solo cambio de signo en el vector de ondas $\vec{k}$: $\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(-kz - \omega t)\hat{x}$.

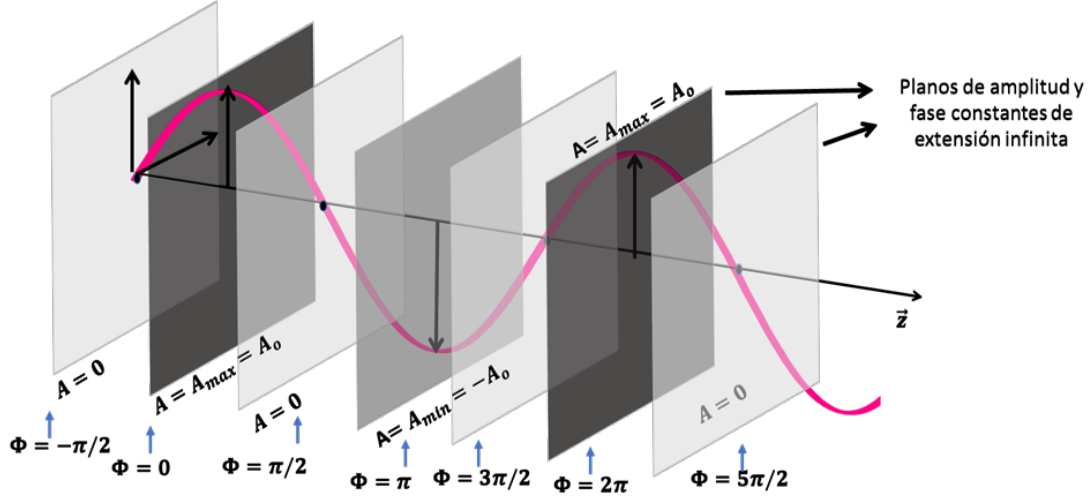


Figura 1.4: Esquema de planos de fase y amplitud constante de una onda ideal.

En la figura se puede observar que para $\Phi = 0$ y para $\Phi = 2\pi$ la onda tiene igual amplitud y la misma pendiente. Lo mismo pasa para $\Phi = -\pi/2$ y $\Phi = 3\pi/2$ o para $\Phi = \pi/2$ y $\Phi = 5\pi/2$. La diferencia de fase entre estos planos es 2π . Es decir, existen dos planos separados en una distancia Δz , cuya distancia en fase es 2π . Veamos cual es esa distancia, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\Phi(z + \Delta z, t) - \Phi(z, t) = 2\pi, \quad (1.17)$$

o lo que es lo mismo

$$k_z(z + \Delta z) - k_z z = 2\pi. \quad (1.18)$$

Despejando se obtiene que $\Delta z = \lambda$. Es decir que la distancia mínima entre planos de igual fase (solo difieren en 2π), o la distancia entre planos consecutivos de igual fase, es la longitud de onda λ . Esta situación se encuentra esquematizada en la figura 1.5, en donde se muestran dos planos de igual fase (frente de ondas) consecutivos separados por una distancia λ . Entonces, medir la longitud de onda, es medir la distancia entre planos de igual fase.

En general podemos obtener cómo se mueve el frente de ondas derivando la expresión de la fase y suponiendo que la fase es constante. Es decir:

$$\Phi(x, t) = k_z z - wt = \Phi_0,$$

y luego derivando

$$\frac{d\Phi(x, t)}{dt} = k_z \frac{dz}{dt} - w = 0,$$

a partir de la cual podemos definir la velocidad de fase v_f como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w}{k_z} = v_f = v. \quad (1.19)$$

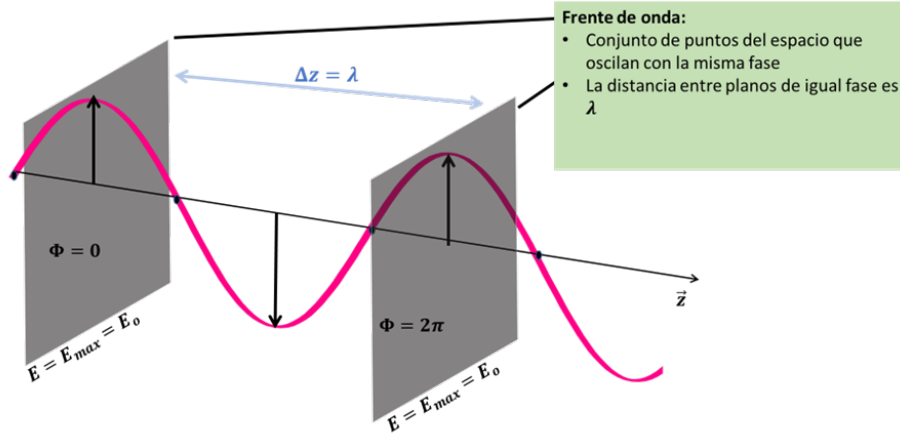


Figura 1.5: Se muestran dos planos de igual fase consecutivos separados por una distancia λ .

Otras geometrías dan lugar a soluciones diferentes. Por ejemplo, una fuente puntual puede producir una onda esférica saliente cuya forma armónica es

$$\Psi(r, t) = \frac{a}{r} \cos(kr - \omega t + \Phi_0), \quad (1.20)$$

donde r es la distancia a la fuente y a es una constante. Notar que ahora la amplitud depende de la posición: $A(r) = a/r$. En este caso la fase es

$$\Phi(r, t) = kr - \omega t + \Phi_0, \quad (1.21)$$

por lo que las superficies de fase constante son esferas centradas en la fuente. Además, la amplitud disminuye como $1/r$. Este frente de onda se esquematiza en la figura 1.6.

De manera análoga, una fuente con simetría cilíndrica, como una fuente lineal, puede generar ondas cuyos frentes de onda son cilindros concéntricos. Lejos de la fuente, una onda cilíndrica armónica puede escribirse aproximadamente como

$$\Psi(r, t) \simeq \frac{a}{\sqrt{r}} \cos(kr - \omega t + \Phi_0), \quad kr \gg 1, \quad (1.22)$$

donde en este caso r representa la distancia al eje de simetría. La fase es constante sobre cilindros concéntricos y la amplitud disminuye aproximadamente como $1/\sqrt{r}$. Además, existen ondas con estructuras de fase más complejas. Por ejemplo, los vórtices presentan una fase que varía azimutalmente y pueden dar lugar a frentes de fase helicoidales.

En la figura 1.7 se resumen las características para distintos frentes de onda. Para un medio dado, la intensidad promedio es proporcional al cuadrado de la amplitud local de la onda. Para cada tipo de fuente se muestra un diagrama del frente de ondas, y la

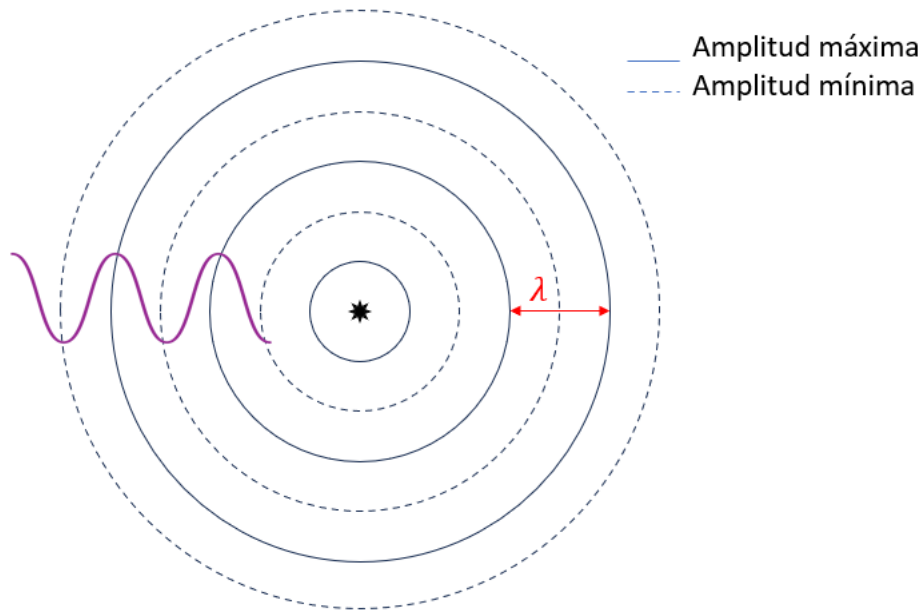


Figura 1.6: Esquema de un frente de ondas esférico. Las líneas continuas corresponden a los máximos de la perturbación (a/r), las líneas cortadas corresponden a los mínimos de la perturbación ($-a/r$). La longitud de onda es la distancia entre esferas de igual fase.

dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia. Por ejemplo, se puede observar que la amplitud no depende de la distancia en el caso de la onda plana, es inversamente proporcional a la raíz de la distancia en el caso de la onda cilíndrica, y es inversamente proporcional a la distancia en el caso de la onda esférica.

La dependencia de la intensidad con la distancia también se puede obtener empleando argumentos sobre la geometría del problema. Por ejemplo, calculemos la intensidad para una fuente puntual de potencia W que emite un frente de onda esférico como se esquematiza en la figura 1.8. En primer lugar tomemos una superficie esférica de radio r en el entorno de la fuente. Si la fuente emite isotrópicamente y despreciamos pérdidas durante la propagación, la potencia W se distribuye sobre una superficie de área $S = 4\pi r^2$. Por lo tanto, la intensidad es

$$I(r) = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2}.$$

Como para un medio dado la intensidad promedio es proporcional al cuadrado de la amplitud local, $I(r) \propto A^2(r)$, se obtiene

$$A(r) \propto \frac{1}{r}.$$

Entonces, vemos que la amplitud es inversamente proporcional al radio. Además, se observa como a medida que aumenta el radio, la intensidad (potencia por unidad de área)

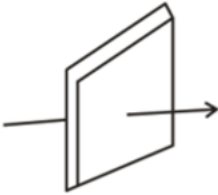
Frente de ondas	Fuente	Diagrama del Frente de ondas	Variación de la amplitud con la distancia	Variación de la Intensidad con la distancia
Esféricas	puntual		$A \propto \frac{1}{r}$	$I \propto \frac{1}{r^2}$
Cilíndricas	Lineal, rendija		$A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$	$I \propto \frac{1}{r}$
planas	Extensa y grande situada en distancias grandes		$A = cte$	$I = cte$

Figura 1.7: Tabla con la descripción esquemática de fuentes con un frente de ondas esférico, cilíndrico y plano. Se muestra además la dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia.

disminuye.

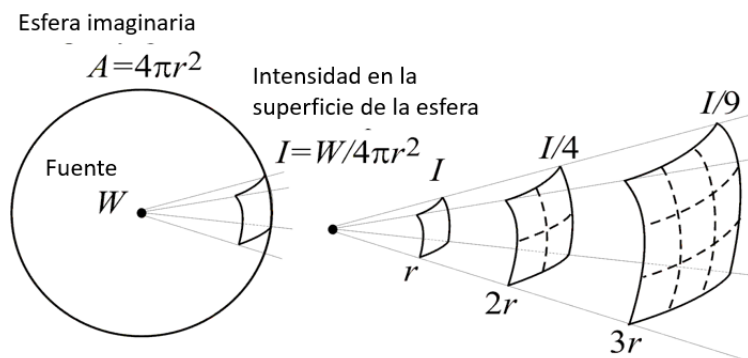


Figura 1.8: Esquema de la dependencia de la intensidad en función de la distancia radial para una fuente con frente de ondas esférico.

Capítulo 2

Ondas de ultrasonido

Las ondas de ultrasonido son ondas acústicas cuyas frecuencias son mayores que el umbral del oído humano (~ 20 kHz). En la figura 2.1 se pueden observar las frecuencias típicas junto con algunas fuentes que las generan o aplicaciones. En el aire, las ondas acústicas son longitudinales: las partículas del medio oscilan en la dirección de propagación de la onda. A nivel microscópico, la perturbación se transmite mediante las colisiones entre las moléculas, que comunican las variaciones locales de presión y densidad a las regiones vecinas. Es importante notar que no son las moléculas las que se desplazan junto con la onda: lo que se propaga es una perturbación colectiva de presión y densidad. Por este motivo, las ondas acústicas no pueden propagarse en el vacío. La velocidad de propagación depende de las propiedades mecánicas y termodinámicas del medio. En el aire, por ejemplo, aumenta al aumentar la temperatura.

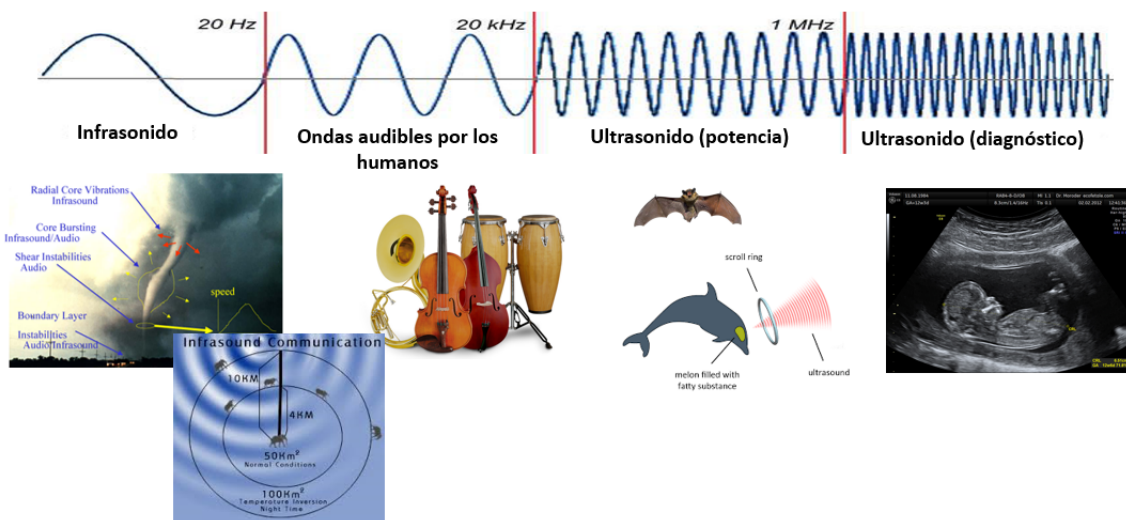


Figura 2.1: Espectro de las ondas acústicas y posibles fuentes y/o usos de estas ondas.

Empecemos estimando órdenes de magnitud de los distintos tipos de ondas acústicas. Esto es importante sobre todo cuando queremos hacer experimentos; conocer el orden de magnitud de las variables que uno espera medir permite definir cuáles son los instrumentos adecuados para realizar la medición, en cuanto a precisión, exactitud, rango, etc. En este

sentido, les sugerimos los siguientes ejercicios:

Tarea: Respondé las siguientes preguntas usando datos medidos obtenidos de la bibliografía.

a) Las ondas de ultrasonido, ¿se propagan en todos los medios? Buscar velocidades típicas de propagación del ultrasonido en diferentes medios (sólidos, líquidos, gaseosos). ¿Cómo depende su velocidad de propagación de la temperatura? En particular, ¿qué ocurre para el ultrasonido que se propaga en aire?

b) Completar la tabla 2.1 y pensar si las cantidades definidas pueden ser medidas con los instrumentos conocidos. Calcular, para algunas frecuencias (ν) en el rango del sonido y del ultrasonido, la frecuencia angular (ω), el período (T), el número de onda (k), la longitud de onda (λ) en las unidades indicadas. Suponer que las ondas se propagan en un medio lineal cuya relación de dispersión es $\omega = c_s k$, con c_s la velocidad de propagación de la onda en el medio. Tomar valores para c_s de bases de datos.

Cantidad\rango	sonido	Ultrasonido de potencia	Ultrasonido diagnóstico
f [Hz]			
$\omega = 2\pi f$ [1/s]			
$T = 1/f$ [s]			
k [1/m]			
λ [cm]			

Tabla 2.1: Completar eligiendo distintas frecuencias en los rangos indicados y distintos materiales en donde se propagan las ondas.

En la primera etapa de la materia trabajaremos con piezoeléctricos (PE), que son materiales capaces de emitir y detectar ondas de ultrasonido ¡Veamos cómo!

2.1. Los piezoeléctricos como transductores de ultrasonido

La piezoelectricidad es un fenómeno que presentan determinados materiales en los cuales una deformación mecánica produce una polarización eléctrica, es decir, una redistribución de cargas eléctricas en su interior. Como consecuencia, puede aparecer una diferencia de potencial entre caras opuestas del material. Este efecto permite, por ejemplo, generar una señal eléctrica al someter un material piezoeléctrico (PE) a distintos tipos de deformaciones mecánicas, como compresión, tracción o torsión. Por ejemplo, es posible encender un LED conectándolo a un PE y sometiendo a este a distintas deformaciones mecánicas.

En la figura 2.2(a) se representa esquemáticamente el efecto piezoeléctrico directo: al deformar el material se genera una diferencia de potencial entre sus superficies. Existen distintos tipos de materiales piezoeléctricos, entre ellos cristales, cerámicas y algunos polímeros. En la figura 2.2(b) se muestran ejemplos de un elemento piezoeléctrico cerámico y de uno monocristalino, como el cuarzo. Los piezoeléctricos cerámicos se utilizan frecuentemente en transductores acústicos, por ejemplo en parlantes o zumbadores piezoeléctricos. En general presentan resonancias anchas, es decir, responden apreciablemente en un rango amplio de frecuencias. Una forma habitual de caracterizar el ancho de una resonancia es mediante el factor de calidad Q , definido aproximadamente como

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}, \quad (2.1)$$

donde f_0 es la frecuencia de resonancia y Δf el ancho de la campana de resonancia. Por lo tanto, una resonancia más ancha corresponde a un menor valor de Q .

Los cristales de cuarzo, en cambio, presentan resonancias mucho más estrechas y, por lo tanto, factores de calidad mayores. Esta característica, junto con su elevada estabilidad en frecuencia, permite utilizarlos en relojes y osciladores de referencia (pronto veremos por qué).

El efecto piezoeléctrico presenta una contraparte inversa: así como una deformación mecánica produce una respuesta eléctrica, la aplicación de un campo eléctrico produce fuerzas internas que dan lugar a una deformación mecánica, como se esquematiza en la figura 2.2(c). Las deformaciones de los piezoeléctricos son tan pequeñas (decenas de nanómetros a centenas de micrones) que necesitamos de técnicas ultra-precisas para poder medirlas. ¿Se te ocurre cómo? ¡En la última práctica del curso vamos a aprender estos temas! El efecto PE es normalmente reversible: al dejar de someter a los cristales a un voltaje externo o campo eléctrico recuperan su forma.

Los materiales piezoeléctricos pueden utilizarse como elementos activos de transduc-

tores piezoeléctricos. Un transductor es un dispositivo que convierte una forma de energía o una magnitud física en otra, por lo que son empleados frecuentemente para realizar mediciones. Por ejemplo, pueden convertir energía mecánica, lumínica, etc., en una señal eléctrica y viceversa. Existen muchos tipos de transductores que iremos estudiando en el curso. En particular, los transductores piezoeléctricos permiten convertir una deformación o esfuerzo mecánico en una señal eléctrica (sensores de fuerza) o pueden convertir una señal eléctrica en un movimiento físico (actuador de movimiento).

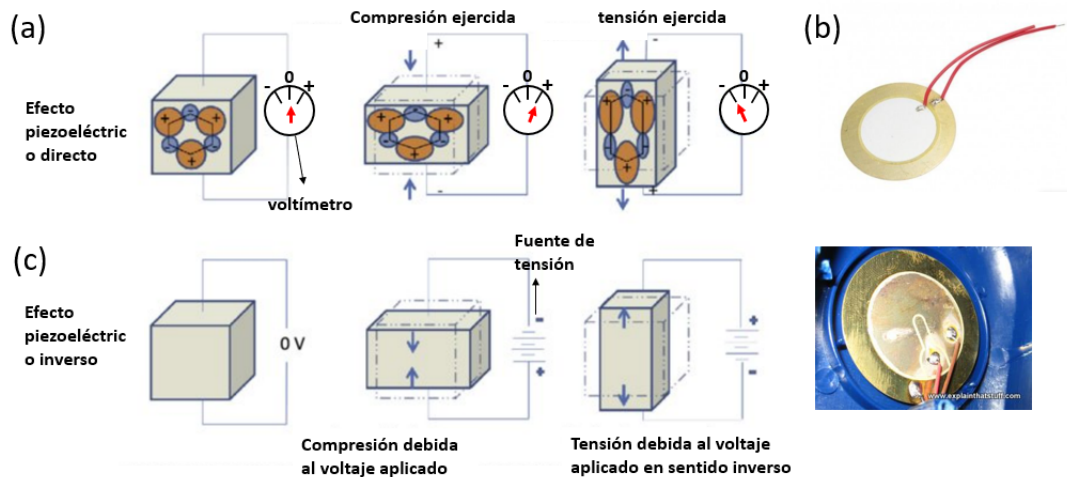


Figura 2.2: (a) Efecto piezoeléctrico directo: se mide una tensión en el voltímetro al comprimir, expandir, tensionar al material. (b) Un piezoeléctrico típico que se encuentra en los parlantes (arriba), y uno típico que se usa para generar señales precisas en frecuencia (abajo). (c) Efecto piezoeléctrico inverso: al aplicar una diferencia de tensión con una fuente el material se deforma. Figura adaptada de ref. [?].

Debido a que en el régimen de trabajo considerado, la respuesta piezoeléctrica puede aproximarse como **lineal** (a mayor tensión, mayor desplazamiento), cuando se alimenta al PE con una señal armónica, las deformaciones mecánicas en él también serán armónicas, con una amplitud que dependerá de la frecuencia. Dado que esta oscilación armónica está confinada en el espacio (el PE tiene un tamaño finito), habrá ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía eléctrica-mecánica sea máxima, y otras para las cuales ésta sea nula (¿Cómo podremos estimar estas frecuencias?). Entonces, el PE es un sistema resonante y, como para cualquier otro sistema resonante, se espera que la respuesta en frecuencias sea una “campana”, ¿será cierto?

Cuando el PE oscila, produce movimiento del aire en su entorno. La perturbación del aire se propaga como una onda acústica, con la misma frecuencia que la oscilación mecánica. ¿Cómo es la amplitud de la onda generada en relación a la amplitud de la alimentación? ¿Y en relación a la amplitud de oscilación mecánica? ¿Cómo harías un experimento que te permita responder a estas preguntas?

Debido al efecto PE estos pueden actuar tanto como emisores o como receptores. Siendo que usamos PE tanto para generar como para detectar a las ondas de ultrasonido, nos referimos a los dos PE como par emisor-receptor. La medición que realicemos va a estar influenciada tanto por la respuesta del emisor como por la respuesta del receptor.

En cuanto a las aplicaciones, su capacidad de generar movimientos pequeños y controlables por la tensión de alimentación permite que estos sean utilizados, por ejemplo, en posicionadores de gran precisión que se utilizan en microscopía o para estabilizar vibraciones en sistemas ópticos. Su capacidad de generar y detectar ondas de ultrasonido permite utilizarlos para detectar objetos y medir distancias (¡como los murciélagos!).

Para pensar: Buscar en una hoja de datos (pedir en el pañol el modelo del PE disponible en el laboratorio) los tamaños típicos de los PE que producen ondas de ultrasonido y buscar la velocidad de propagación de las ondas de ultrasonido en el cuarzo. Típicamente el PE tendrá forma de disco de diámetro d y altura h . Como primera estimación de orden de magnitud, modelar una de sus dimensiones como una cavidad mecánica en la que entra media longitud de onda en el modo fundamental (similar al modo más bajo en una cuerda con extremos fijos). ¿Qué frecuencia característica se obtiene? ¿Qué cambia si la oscilación relevante ocurre en el espesor o en la dirección radial? Comparar con el resultado experimental.

Experimental 1: De lo explicado se desprenden dos posibles caracterizaciones a realizar sobre el par emisor-receptor:

- Caracterización de la amplitud de la onda de ultrasonido (medida en el receptor) en función del voltaje de alimentación (provisto por el generador de funciones). A partir de ella se puede determinar el rango en donde la respuesta es lineal. ¿Por qué es importante conocer el rango lineal?
- La respuesta en frecuencias, conocida como *campana de resonancia* (amplitud de la señal medida en el receptor en función de la frecuencia de la señal de alimentación).

El montaje experimental sugerido (para la mayoría de los experimentos de ultrasonido) es el que se observa en la figura 2.3, en donde se encuentra al emisor y al receptor enfrentados, montados sobre un riel y a una distancia D entre sí. El emisor se conecta a un generador de funciones mediante un cable BNC. La señal en el receptor se mide empleando un osciloscopio. De ser necesario utilizar una señal de referencia para el *trigger*, se puede emplear la señal de alimentación.

Pensar cuál es la mejor forma de implementar esta experiencia, en particular

para el ítem a.: ¿Cuál es la distancia óptima entre el emisor y el receptor? ¿En qué frecuencia es conveniente realizar este estudio? ¿Debo usar *trigger* en el osciloscopio? ¿Por qué? ¿Qué pruebas experimentales podría hacer para responder estas preguntas?

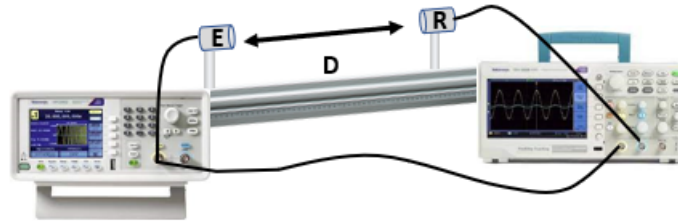


Figura 2.3: Esquema del dispositivo experimental propuesto. El par emisor-receptor se encuentran situados en un riel. El emisor se alimenta con un generador de funciones, a su vez esta señal se usa como trigger del osciloscopio. La señal en el receptor se mide empleando el osciloscopio.

2.2. Calibración y regresión lineal

La caracterización de la amplitud en el PE receptor en función del voltaje de alimentación del emisor, nos permite obtener una curva a partir de la cual conociendo la alimentación podemos predecir cual es la amplitud en el receptor. A esta curva la llamaremos **calibración**. En particular, observamos que el comportamiento de las mediciones es lineal al menos en un rango de voltajes de alimentación, que es la calibración más simple y conveniente que podemos obtener. Una calibración lineal tiene una **sensibilidad** dada por la pendiente. A mayor pendiente, mayor sensibilidad; es decir, pequeñas variaciones en voltaje ofrecen grandes variaciones en amplitud de la señal medida. Podría existir un valor de saturación que haría que solo un rango de voltajes de alimentación sea útil (porque donde satura no hay variación de respuesta y por lo tanto a los efectos de calibrar no sirve).

Una vez determinado el rango donde el comportamiento es lineal, uno se puede proponer obtener un ajuste lineal para usarlo como función de calibración. Ajustar consiste en encontrar los valores de los parámetros de un modelo (por ej. función calibración) que hacen que sus predicciones sean lo más compatibles posible con los datos experimentales, teniendo en cuenta sus incertidumbres. Se busca minimizar las diferencias entre los valores medidos y los esperados a partir del modelo propuesto, pesando a estas diferencias por el error asignado a cada medición, para darle más importancia a los datos más precisos. Es decir, se busca minimizar el siguiente valor:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}}{y_{\text{error}}} \right)^2.$$

A estas funciones que dependen de los datos y dan información de los parámetros del modelo se los conoce como “estadísticos”. Por ejemplo, en el caso del χ^2 : si el modelo propuesto se corresponde a los datos medidos, al calcularlo se obtienen resultados que andan cerca de ν , que es la cantidad de grados de libertad del ajuste ($\nu = N - p$, donde N es el número de datos y p el número de parámetros del ajuste). Si $\chi^2 > \nu$, suele ser indicativo de un ajuste que no responde a los datos o de que los errores fueron subestimados. Si, en cambio, $\chi^2 < \nu$ pueden indicar que las incertidumbres fueron sobreestimadas, que existen correlaciones entre los datos que no fueron consideradas o, eventualmente, que el modelo posee una flexibilidad innecesaria. A veces se utiliza el estadístico $\frac{\chi^2}{\nu}$, llamado “ χ^2 reducido” y se analiza su valor respecto de 1.

Ahora supongamos que se miden de nuevo los datos: es esperable que vayan a ser levemente distintos, aunque seguramente dentro de las incertezas experimentales. Entonces también es esperable que al calcular χ^2 vaya a dar levemente distinto. Bueno, resulta que si el modelo elegido es el correcto, los χ^2 que se van obteniendo en mediciones sucesivas no valen cualquier cosa, sino que siguen una distribución de probabilidades llamada χ_ν^2 (link), que se muestra en la figura 2.4

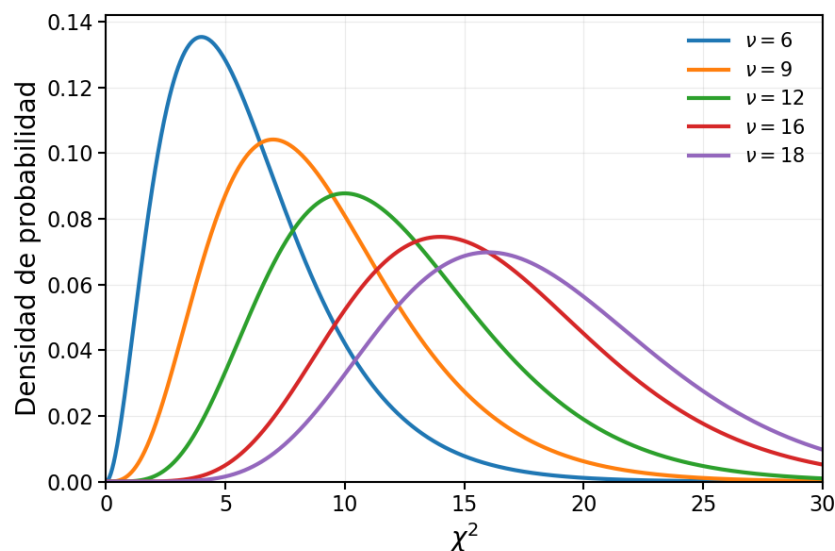


Figura 2.4: Distribuciones de probabilidad χ_ν^2 .

Entonces, por ejemplo, si se realiza un ajuste cuadrático (3 parámetros) sobre 19 datos, la curva a mirar es la de $\nu = 16$: la curva roja. Esta nos dice que, si es cierta la hipótesis de que el modelo elegido es el correcto, lo más habitual es obtener $\chi^2 = 14$ (posición del máximo)... ¡pero también es muy probable obtener valores entre 8 y 20!

Sin embargo, sí podemos decir que a medida que uno se aleja del máximo de la campana, se empieza a volver menos probable haber obtenido un determinado χ^2 . Entonces,

el valor de χ^2 obtenido no habla necesariamente de que el ajuste sea bueno o malo, sino de qué tan probable es haber obtenido ese valor de χ^2 en el caso de que el modelo elegido para ajustar los datos es el que describe correctamente el fenómeno observado. Entonces, podemos decir que:

- Un χ^2 muy bajo o muy alto indica que sería muy extraño obtener esos datos si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo no es el correcto, o el modelo sí es el correcto pero se tuvo mucha mala suerte y justo lo medido no parece responder al modelo. En estadística se dice que se rechaza la hipótesis de que el modelo sea el correcto, a riesgo de que quizás se está en el caso de haber tenido mala suerte y que en realidad la hipótesis no pueda ser completamente descartada.

- Un χ^2 cercano a ν indica que los datos obtenidos son esperables si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo es el correcto, o las mediciones se parecen al modelo propuesto por una cuestión de azar. Por lo tanto, un χ^2 “bueno” no garantiza que el modelo sea el correcto, sino simplemente que el modelo propuesto ajusta lo suficientemente bien a los datos. En estadística se dice que no se puede rechazar la hipótesis de que el modelo sea el correcto.

Lo habitual es tomar algún criterio para determinar qué tan poco probable tiene que ser el χ^2 obtenido para rechazar la hipótesis de que el modelo ajusta a los datos. Cada disciplina suele usar criterios distintos, pero normalmente se toma un umbral de tolerancia (o nivel de significancia) del 5 %. Si, suponiendo correcto el modelo, la probabilidad de obtener un valor de χ^2 tan extremo como el observado resulta menor que ese umbral, se considera que los datos son poco compatibles con el modelo. Y algo clave: ¡ni un “buen” χ^2 ni ningún estadístico **asegura** que el modelo sea el correcto!

En particular, el χ^2 no distingue si el ajuste pasa por arriba o por abajo de los datos, o cuántas veces los cruza, o si falta algún parámetro en el ajuste, o si algún parámetro está de más, o una infinidad de otros posibles criterios para determinar si el ajuste es bueno o malo. Entonces lo podemos complementar con algo que ya sabemos de Laboratorio 1: los residuos ($y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}$) deben ser aleatorios y no estar correlacionados con ninguna otra variable, ni correlacionados entre sí. Si presentan una distribución no aleatoria, es indicativo de que el modelo no está ajustando bien a los datos.

2.3. Modelando la respuesta en frecuencias del par emisor-receptor

Al ajustar mediciones es crucial que los modelos seleccionados estén respaldados por fundamentos físicos sólidos. Esto garantiza que nuestras interpretaciones y predicciones

estén en línea con las leyes de la física y que los resultados sean confiables y significativos para la comprensión de los fenómenos estudiados.

Propusimos que, debido al comportamiento lineal del PE con el voltaje de alimentación, si se alimenta a este con una señal armónica, sus oscilaciones mecánicas también serán armónicas. El modelo más sencillo que podemos pensar para el PE es entonces el del oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza externa armónica (el campo eléctrico generado por la alimentación), cuya ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{dx}{dt} + \omega_{o1}^2 x = \frac{F_o}{m} \cos(\omega t), \quad (2.2)$$

en donde γ_1 es la constante de amortiguamiento para el emisor, que en este caso representa pérdidas mecánicas por fricción, la fuerza externa representa la fuente de alimentación y el término lineal una fuerza restitutiva caracterizada por $\omega_{o1} = \sqrt{k/m}$.

Nos preocupamos ahora por la solución particular porque, como sabemos, la homogénea decae con un tiempo característico $1/\gamma_1$. En notación compleja, dicha solución está dada por

$$x_E(\omega, t) = \frac{F_o}{m} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1}. \quad (2.3)$$

Recordemos que para que la solución tenga sentido físico, debemos tomar la parte real, de modo que la solución toma la forma $x_E^R(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, con $\tan(\phi) = \frac{-\gamma_1 \omega}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)}$ y $A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2}}$.

Ahora bien, la ecuación 2.3 predice el desplazamiento del PE emisor cuando es alimentado por una fuente de tensión alterna, bajo un modelo muy simple que considera una única resonancia en ω_{o1} . Si el PE tuviera más resonancias, podríamos plantear una combinación lineal de soluciones similares a la de la ecuación 2.3 pero con distintas frecuencias ω_{oi} . Por otro lado, hasta ahora consideramos únicamente al PE emisor. Como mencionamos anteriormente las oscilaciones mecánicas del PE producen ondas de ultrasonido que se propagan con una amplitud proporcional a x_E hasta llegar al receptor. El receptor transforma a la onda de ultrasonido en vibraciones mecánicas y luego en una tensión. Idealmente el PE receptor tiene la misma frecuencia de resonancia que el emisor; sin embargo, esto no siempre es cierto.

Entonces, podemos plantear ahora una ecuación similar a la ecuación 2.2, considerando que la onda de ultrasonido que produce las oscilaciones mecánicas del PE receptor tiene una amplitud proporcional al desplazamiento del PE emisor x_E , es decir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2 \frac{dx}{dt} + \omega_{o2}^2 x = \alpha x_E(\omega, t), \quad (2.4)$$

en donde ahora consideramos que la constante de amortiguamiento γ_2 y la frecuencia característica ω_{o2} son distintas a las del PE emisor. En este modelo simplificado omitimos por el momento la atenuación y la fase acumulada durante la propagación entre emisor y receptor, así como cualquier dependencia adicional del acoplamiento con la frecuencia.

La solución particular de la ecuación 2.4 es

$$x_{ER}(\omega, t) = \frac{Be^{i\omega t}}{((\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1)((\omega_{o2}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_2)}, \quad (2.5)$$

donde B es una constante.

Como dijimos anteriormente, la solución que tiene sentido físico es la parte real de la ecuación 2.5, de modo que podemos escribirla en la forma

$$x_{ER}^R(\omega, t) = C_{ER}(\omega) \cos(\omega t + \phi_{ER}), \quad (2.6)$$

donde $C_{ER}(\omega)$ es la amplitud de la oscilación. A partir de la ecuación 2.5, esta amplitud se obtiene tomando el módulo de la solución compleja:

$$C_{ER}(\omega) = \frac{B}{\sqrt{[(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2] [(\omega_{o2}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_2\omega)^2]}}. \quad (2.7)$$

Si ahora suponemos que los dos piezoeléctricos tienen la misma frecuencia característica y el mismo amortiguamiento, es decir, $\omega_{o1} = \omega_{o2} = \omega_0$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, se obtiene

$$C_{ER}(\omega) = \frac{B}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (2.8)$$

Para pensar: Las ecuaciones 2.7 y 2.8 consideran que los PE pueden ser modelados por osciladores armónicos simples con una única frecuencia característica, y pueden ser utilizadas para intentar ajustar a las mediciones. ¿Cómo se extiende este modelo si los PE están caracterizados por más de una frecuencia característica?

2.4. Caracterización espacial de la onda emitida por el piezoeléctrico

Como se mencionó anteriormente, al alimentar al emisor con una señal armónica se generan ondas de ultrasonido que se propagan en el aire. Las ondas emitidas son tridimensionales y, para caracterizarlas, estudiaremos la forma del frente de onda, la longitud

de onda, el período, la frecuencia, la divergencia y la distribución espacial de amplitud. Recordemos que un frente de onda es una superficie de fase constante y que, en situaciones ideales, puede ser plano, esférico o cilíndrico, tal como se discutió en la sección 1.4.

Ahora bien, en la sección 1.4 analizamos situaciones idealizadas. Por ejemplo, una onda plana ideal tiene amplitud constante sobre planos de extensión infinita, mientras que una onda esférica ideal presenta amplitud constante sobre superficies esféricas. En una fuente real, sin embargo, la extensión espacial de la onda está limitada por el tamaño y la geometría del emisor.

En particular, el propio montaje del piezoeléctrico hace que la fuente no pueda considerarse ideal (en la figura 2.5 se muestra un ejemplo). El tamaño finito del elemento piezoeléctrico y la apertura de la carcasa producen difracción. Como consecuencia, la distribución espacial de amplitud cambia durante la propagación y la región donde la amplitud es apreciable puede ensancharse, dando lugar a un haz divergente. La importancia de estos efectos dependerá, entre otros parámetros, de la relación entre el tamaño característico del emisor y la longitud de onda del ultrasonido.

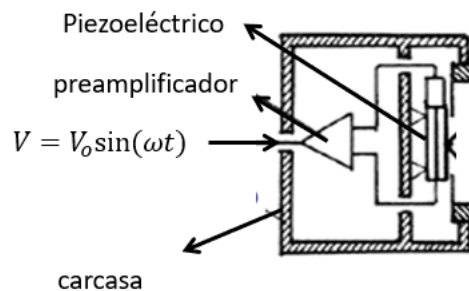


Figura 2.5: Ejemplo de montaje de un piezoeléctrico. El elemento PE se encuentra dentro de una carcasa metálica y protegido por una malla. El emisor se alimenta con una señal armónica amplificada.

Según lo discutido, para caracterizar la onda emitida mediremos su longitud de onda, la dependencia de la amplitud con la distancia, la forma del frente de onda, la distribución transversal de amplitud y la divergencia. Dividiremos las mediciones según se realicen a lo largo de la dirección de propagación o en la dirección transversal.

Experimental 2: Mediciones a lo largo de la dirección de propagación:

- Medir la amplitud en función de la distancia.
- Medir la longitud de onda a partir de la distancia entre puntos de igual fase.

Experimental 3: Mediciones en la dirección transversal a la propagación:

- Determinar la forma del frente de onda, es decir, identificar la superficie

sobre la cual la fase permanece constante.

- b. Determinar la distribución de amplitud en un plano transversal a la dirección de propagación.
- c. Medir la divergencia del haz.

2.5. Repaso de ondas en gases y condiciones de borde

Recordemos que, dado que estamos estudiando ondas acústicas que se propagan en un gas (aire), podemos describirlas mediante distintas magnitudes: el desplazamiento longitudinal de las partículas $\Psi(x, t)$, la presión $P(x, t)$ y la densidad $\rho(x, t)$.

En ausencia de la onda, el gas se encuentra en equilibrio con una presión P_0 y una densidad ρ_0 . Cuando se propaga una onda acústica, estas magnitudes presentan pequeñas perturbaciones alrededor de sus valores de equilibrio, de modo que podemos escribir

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t), \quad (2.9)$$

y

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, t), \quad (2.10)$$

donde $p(x, t)$ y $\delta\rho(x, t)$ representan las perturbaciones de presión y densidad producidas por la onda.

Para pequeñas perturbaciones, ambas pueden obtenerse a partir del desplazamiento longitudinal de las partículas. El módulo volumétrico K relaciona una variación de presión con la variación relativa de volumen según

$$p = -K \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (2.11)$$

donde K tiene unidades de presión (Pa). En una dimensión, la variación relativa de volumen puede expresarse en términos del gradiente del desplazamiento, de donde se obtiene

$$p(x, t) = -K \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (2.12)$$

De manera análoga, la perturbación de densidad está dada por

$$\delta\rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Estas expresiones muestran que una compresión del gas, para la cual $\partial \Psi / \partial x < 0$, produce un aumento tanto de la presión como de la densidad. Por el contrario, una expansión produce una disminución de ambas magnitudes.

El PE receptor puede utilizarse para detectar las variaciones de presión de las ondas que inciden sobre su superficie. Al mismo tiempo, su superficie constituye una discontinuidad para la propagación de la onda acústica, por lo que parte de la onda incidente puede reflejarse. Como primera aproximación, podemos considerar al receptor como una pared rígida y analizar las condiciones de borde correspondientes, como se esquematiza en la figura 2.6.

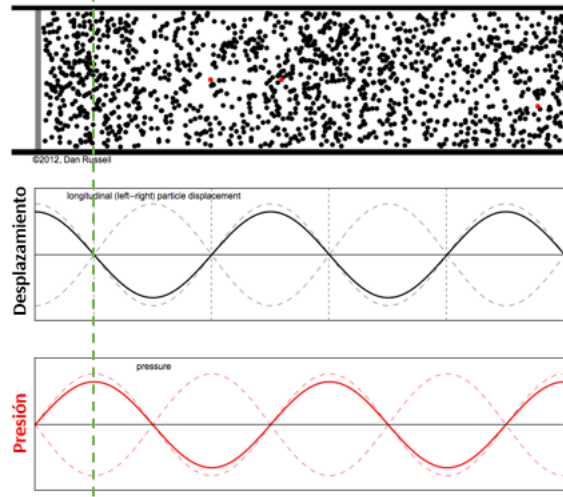


Figura 2.6: Condición de borde en un extremo cerrado. En la pared rígida se forma un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión.

Recordemos que la función de desplazamiento $\Psi(x, t)$ indica cuánto se desplazan las partículas del medio en la dirección de propagación. En una pared rígida, el desplazamiento de las partículas en la dirección normal a la superficie debe ser nulo. Si situamos la pared en $x = 0$, la onda total es la superposición de la onda incidente $\Psi^+(x, t)$ y la onda reflejada $\Psi^-(x, t)$, por lo que la condición de borde es

$$\Psi^+(0, t) + \Psi^-(0, t) = 0. \quad (2.14)$$

Esto implica que, al reflejarse en una pared rígida, la onda de desplazamiento experimenta un cambio de fase de π , dado que

$$\Psi^+(0, t) = -\Psi^-(0, t). \quad (2.15)$$

Por lo tanto, en la pared se forma un nodo de desplazamiento. En cambio, la perturbación de presión presenta allí un antinodo, es decir, alcanza un extremo de presión (máximo o mínimo). La condición correspondiente puede expresarse como

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} [p^+(x, t) + p^-(x, t)] \right|_{x=0} = 0. \quad (2.16)$$

Equivalentemente, supongamos que la onda incidente está dada por

$$\Psi^+(x, t) = A \cos(kx - \omega t). \quad (2.17)$$

Para que el desplazamiento total sea nulo en la pared, situada en $x = 0$, la onda reflejada debe satisfacer

$$\Psi^-(x, t) = -A \cos(kx + \omega t). \quad (2.18)$$

Las perturbaciones de presión asociadas a ambas ondas son entonces

$$p^+(x, t) = -K \frac{\partial \Psi^+}{\partial x} = K A k \sin(kx - \omega t), \quad (2.19)$$

y

$$p^-(x, t) = -K \frac{\partial \Psi^-}{\partial x} = -K A k \sin(kx + \omega t). \quad (2.20)$$

Evaluando ambas expresiones en la pared, $x = 0$, se obtiene

$$p^+(0, t) = -K A k \sin(\omega t), \quad (2.21)$$

y

$$p^-(0, t) = -K A k \sin(\omega t). \quad (2.22)$$

Por lo tanto,

$$p^+(0, t) = p^-(0, t) \quad (2.23)$$

es decir, en el modelo de una pared rígida ideal, la onda de presión reflejada no presenta inversión de fase respecto de la onda incidente y la presión total es $2p^+(0, t)$.

La pared impide que las partículas se muevan, así que sus desplazamientos se cancelan; pero justamente por estar “apretadas” contra la pared, las perturbaciones de presión se suman.

Más adelante veremos otras condiciones de borde.

2.6. Interferencia de ondas de ultrasonido

Habrán notado que, al medir la amplitud en función de la distancia, se observa una serie de ondulaciones periódicas montada sobre “la señal esperada”. Discutimos en clase sobre posibles explicaciones en base a la interferencia de ondas que se reflejan sucesivamente entre el emisor y el receptor.

Supongamos que tenemos dos fuentes de ondas esféricas como las que se muestran en la figura 1.6, situadas a una distancia d , tal como se esquematiza en la figura 2.7. Recordemos que las líneas continuas representan los puntos donde la amplitud es máxima y las punteadas a los puntos donde es mínima. Podemos analizar cómo es la superposición de las ondas sobre los frentes de ondas y estimar cuál es la onda resultante. Supongamos por el momento que las amplitudes no dependen de la distancia radial, y veamos qué sucede al superponer dos líneas continuas o dos líneas punteadas. Las líneas continuas significan que la amplitud es máxima (A), de modo que la amplitud total en la superposición de dos líneas es $2A$. En las líneas punteadas la amplitud es $-A$, por lo que la suma en donde se superponen dos líneas punteadas es $-2A$. Dado que en la práctica detectamos la amplitud pico a pico, en ambos casos la medición será $2 \times 2A$ (recordar que la amplitud pico a pico es el doble del módulo de la amplitud en una señal periódica). Marcamos con puntos rojos a estos puntos en el esquema de la figura 2.7. En cambio, si se superpone una línea punteada y una continua, la amplitud total es $A + (-A) = 0$; es decir, un mínimo de amplitud. Observar que, dado que la amplitud decae con la distancia, es probable que los mínimos no sean nodos (¿por qué?).

La figura que resulta de unir mínimos y máximos forma hiperboloides. Si observamos entonces la línea que une a las dos fuentes, vemos que para la situación particular que graficamos, observamos máximos de intensidad separados por $\lambda/2$. Veamos en detalle qué sucede con la superposición de las ondas cuando medimos sobre una línea paralela a la línea que une a las fuentes, o sobre la línea que une a las fuentes.

2.6.1. Interferómetro de Fabry-Pérot acústico

En óptica, el interferómetro de Fabry-Pérot, también conocido como resonador (o cavidad) óptico, consiste en dos espejos de alta reflectividad. Cuando la onda de entrada tiene una frecuencia cercana a una de las frecuencias de resonancia de la cavidad se producirá una realimentación positiva dentro de la misma. La contribución de la onda de entrada se suma constructivamente a la onda circulante.

En el caso de las ondas de ultrasonido, la onda emitida se puede reflejar sucesivas veces en el emisor y el receptor, de manera de formar una onda estacionaria. Para encontrar la función de onda en este sistema se debe calcular la superposición de ondas que se refleja múltiples veces entre las dos superficies reflectantes e imponer condiciones de contorno. Podemos hacerlo tanto con las ondas de presión o con las de desplazamiento.

Podemos pensar al par emisor-receptor de ultrasonido como una cavidad resonante, análoga a un interferómetro de Fabry-Pérot, donde se produce una onda estacionaria,

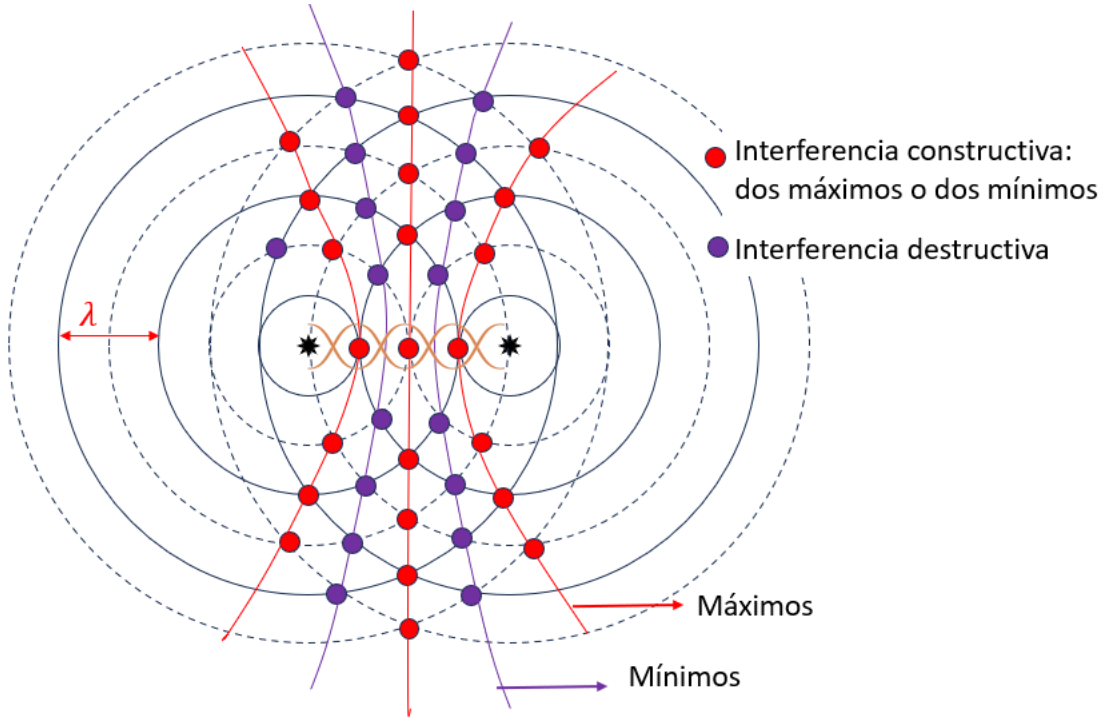


Figura 2.7: Superposición de dos ondas esféricas. En línea continua se esquematizan las crestas de cada onda de cada fuente, y en línea punteada los valles. Los puntos de encuentro de dos máximos o dos mínimos (en rojo) forman interferencia constructiva. Los puntos de encuentro de un máximo y un mínimo (cada uno de distinta fuente) forman interferencia destructiva. Esto genera un patrón espacial de interferencia con máximos y mínimos. Sobre la línea que une ambas fuentes, los máximos o mínimos consecutivos pueden quedar separados por $\lambda/2$.

producto de la reflexión de la misma en el par. Describimos la onda emitida como:

$$p_{+}(x, t) = \frac{1}{x - x_e} \cos(\omega t - k(x - x_e)) \quad (2.24)$$

siendo x_e la posición del emisor. La onda reflejada por el receptor se describe a partir del coeficiente de reflexión R y la posición x_r del receptor:

$$p_{-}(x, t) = \frac{-1}{x - (2x_r - x_e)} R \cos(\omega t + k(x - (2x_r - x_e))). \quad (2.25)$$

Con el mismo razonamiento podemos definir la presión de las ondas reflejadas dos ($\Psi_{++}(x, t)$) y tres ($\Psi_{--}(x, t)$) veces:

$$p_{++}(x, t) = \frac{1}{x - (-2x_r + 3x_e)} R^2 \cos(\omega t + k(x - (-2x_r + 3x_e))), \quad (2.26)$$

$$p_{--}(x, t) = \frac{-1}{x - (4x_r - 3x_e)} R^3 \cos(\omega t + k(x - (4x_r - 3x_e))). \quad (2.27)$$

En un sistema real, el módulo del coeficiente de reflexión es menor que uno, ya que parte de la energía se transmite o se disipa en cada reflexión. Por lo tanto, las contribuciones de orden superior disminuyen progresivamente. Si $|R|$ es mucho menor que uno, pueden despreciarse luego de pocas reflexiones; en cambio, si $|R|$ es cercano a uno, puede ser

necesario incluir un mayor número de reflexiones. En el límite ideal de una superficie perfectamente reflectante, $|R| = 1$.

Como resultado de estas reflexiones, el receptor medirá la suma de estas ondas, observando un efecto de interferencia entre las mismas. Para entender mejor lo que sucede, pueden ver la simulación en Colab “Cavidad_L2F.ipynb” (ver Campus).

Responder usando las simulaciones:

- ¿Están de acuerdo con que las ondas tengan esa pinta? Corroboen que estén bien calculadas.
- ¿Qué observan si ahora miden en distintos x_r (que valores de x_r es razonable tomar)?
- ¿Y para distintos R ?
- ¿Puede el comportamiento de la amplitud en la cercanía del emisor ser explicado por interferencia de ondas reflejadas en el par emisor-receptor?

Comparando con el experimento

- ¿Qué valor creen que podría tener R ?
- ¿Bajo qué argumento se pueden despreciar las reflexiones de orden superior p_{+++} , p_{---} , etc?
- ¿El receptor mide solo las ondas que inciden, o también las reflejadas?

2.6.2. Interferómetro de Young acústico

La figura de interferencia de un interferómetro de Young acústico, es similar a la de intensidad. Sin embargo, hay una diferencia muy importante que es que en nuestro experimento acústico medimos amplitud y no intensidad.

Vamos a estudiar ahora a la interferencia producida por dos fuentes puntuales en una pantalla paralela a la línea que une a estas, tal como se muestra en la figura 2.8. La perturbación de la presión en un gas producida por una onda acústica (sonido o ultrasonido), que se emite desde las fuentes A o B, puede escribirse de manera general como:

$$p_A(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) - \omega t + \varphi_{A0}) \quad (2.28)$$

$$p_B(\vec{r}, t) = B(\vec{r}) \cos(\vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B) - \omega t + \varphi_{B0}) \quad (2.29)$$

donde $A(\vec{r})$ y $B(\vec{r})$ son las amplitudes de las perturbaciones dependientes de la distancia a las fuentes, ω es la frecuencia angular (igual para ambas ondas), y φ_{A0} , φ_{B0} son las fases iniciales. Los vectores de onda $\vec{k}_A$ y $\vec{k}_B$ tienen igual módulo $2\pi/\lambda$.

Dado que $\vec{k}_A$ es paralelo a $\vec{r} - \vec{r}_A$, podemos escribir

$$\vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = k|\vec{r} - \vec{r}_A| = k|\vec{d}_A| = kd_A \quad (2.30)$$

Analógamente $\vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B) = k|\vec{d}_B| = kd_B$.

En estas expresiones además d_A y d_B (distancias desde las fuentes al detector) pueden expresarse en términos de parámetros de laboratorio como

$$d_A = \sqrt{L^2 + (y + h/2)^2}, \quad (2.31)$$

$$d_B = \sqrt{L^2 + (y - h/2)^2}. \quad (2.32)$$

La perturbación total en un punto $\vec{r}$ del espacio es la suma de las dos perturbaciones

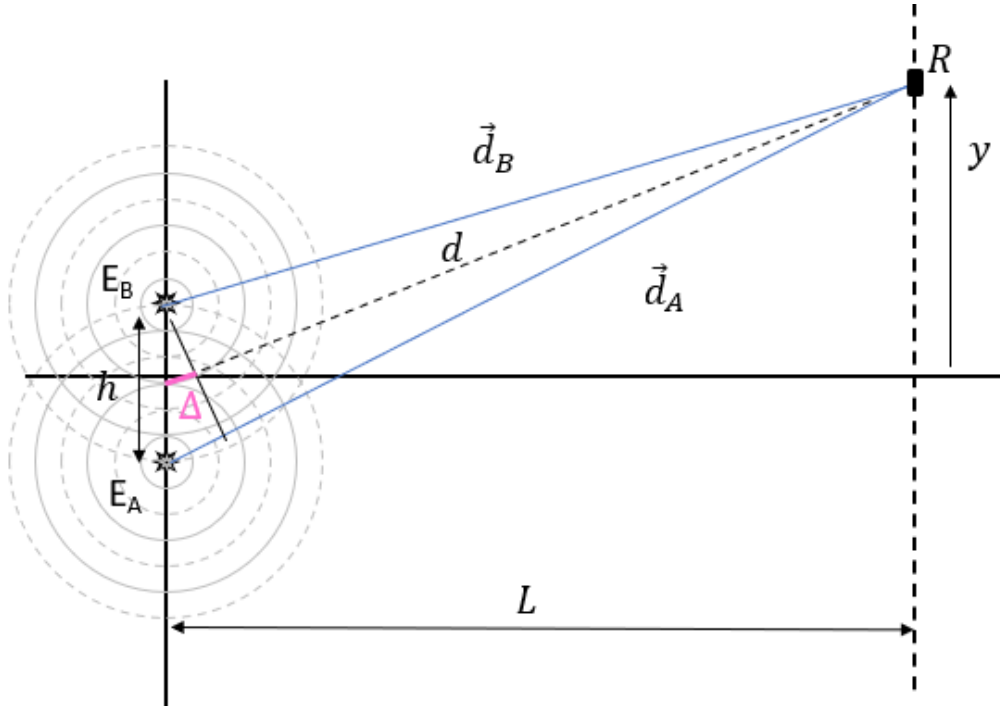


Figura 2.8: Esquema del experimento de Young acústico.

$$p = A(\vec{r}) \cos(kd_A - \omega t + \varphi_{A0}) + B(\vec{r}) \cos(kd_B - \omega t + \varphi_{B0}). \quad (2.33)$$

Supondremos además que $d_A \simeq d_B$, de modo que la variación de amplitud debida a las diferentes distancias a las fuentes puede despreciarse. En esta aproximación tomaremos

$$A(\vec{r}) \simeq B(\vec{r}) = A. \quad (2.34)$$

Además, supongamos que tenemos forma de sincronizar a los PE de manera que $\varphi_{A0} = \varphi_{B0}$ (por ej, alimentándolos en fase). Luego, eligiendo adecuadamente el origen temporal podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $\varphi_{A0} = \varphi_{B0} = 0$. Entonces la presión resulta

$$p = A\{\cos(kd_A - \omega t) + \cos(kd_B - \omega t)\}. \quad (2.35)$$

Tarea: Probar que si se escribe $d_A = d + \Delta$ y $d_B = d - \Delta$ se puede escribir a la expresión de p en función de los parámetros d y Δ como se muestra en las ecuaciones 2.36 y 2.37.

La perturbación total se puede escribir como:

$$p = p_0 \cos(\omega t - kd) \quad (2.36)$$

siendo el coeficiente de amplitud

$$p_0 = 2A \cos(k\Delta) \quad (2.37)$$

Notar que las variaciones de d producen una variación de fase en la señal, mientras que las de Δ modifican la amplitud de la señal. Tener en cuenta que Δ depende de y , h , y L , por lo que variar cualquiera de estos parámetros (en particular la posición en la pantalla) hará que varíe la amplitud de la presión. Entonces, al variar Δ obtenemos máximos y mínimos en la pantalla.

Franjas de interferencia.

Habrán máximos de amplitud para algunos valores de Δ tales que $k\Delta_m = m\pi$, esto es cuando

$$\Delta_m = \frac{\lambda}{2}m \quad (2.38)$$

con m entero.

Si llamamos y_m la posición del detector en el máximo de orden m , se tiene que

$$\Delta_m = \frac{d_A - d_B}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{L^2 + (y_m + h/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y_m - h/2)^2} \right). \quad (2.39)$$

Como, en general, la distancia L es bastante mayor que la separación entre los emisores, un desarrollo en serie de Δ_m en función de h queda

$$\Delta_m = \frac{h}{2} \frac{y_m}{\sqrt{L^2 + y_m^2}} + \mathcal{O}(h^3). \quad (2.40)$$

Notar que estas aproximaciones van a ser razonables incluso cuando no se cumpla $h \ll L$ porque el término cuadrático se ha cancelado. Esto dice, por ejemplo, que si $h \sim 0,1L$ se tendrá un error del 1 %.

Si, además, $y_m \ll L$ (o sea, si se observan sólo los primeros órdenes de interferencia) se puede escribir

$$\Delta_m = \frac{hy_m}{2L} \quad (2.41)$$

con lo cual la posición de los máximos resulta

$$y_m = \frac{\lambda L}{h} m. \quad (2.42)$$

Es decir que los máximos de interferencia están equiespaciados. La distancia entre dos máximos consecutivos, llamada interfranja i , vale

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{h}. \quad (2.43)$$

En esta aproximación, para h y L fijos, la interfranja es constante y a partir de su medición se puede calcular la longitud de onda.

Medición de la longitud de onda. Se propone una práctica de laboratorio para medir la longitud de onda en ultrasonido utilizando dos emisores y un receptor, que es conceptualmente similar a la experiencia de Young en luz visible. En base al esquema de la Fig. 2.8 se muestra el dispositivo experimental en la Fig. 2.9.

Para pensar: Juntando lo explicado en la Sección 2.6.2, se te ocurre cómo medir la longitud de onda en este experimento?

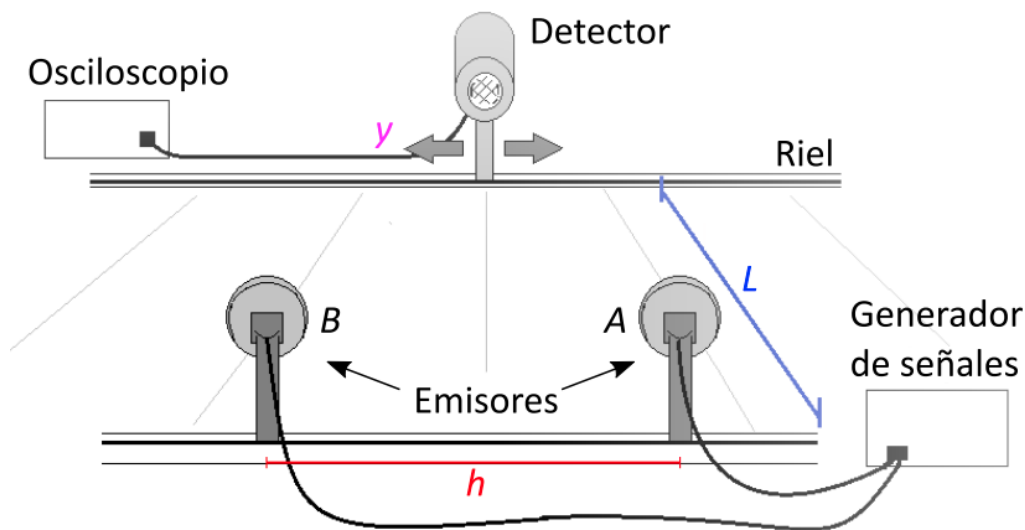


Figura 2.9: Esquema del dispositivo experimental para el experimento de Young acústico.

2.6.3. Como cambia la cuenta para amplitudes y fases arbitrarias

Partimos de la expresión de la presión acústica

$$p(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(kd_A - \omega t + \varphi_{A0}) + B(\vec{r}) \cos(kd_B - \omega t + \varphi_{B0}).$$

Para simplificar la notación omitiremos la dependencia en $\vec{r}$ de las amplitudes y definimos

$$\psi_A = kd_A + \varphi_{A0}, \quad \psi_B = kd_B + \varphi_{B0},$$

de modo que la expresión queda como

$$p(\vec{r}, t) = A \cos(\psi_A - \omega t) + B \cos(\psi_B - \omega t).$$

Usamos ahora la representación fasorial de la función coseno,

$$\cos(\psi - \omega t) = \Re\{e^{-i\omega t} e^{i\psi}\},$$

lo que permite escribir

$$p(\vec{r}, t) = \Re\{(Ae^{i\psi_A} + Be^{i\psi_B}) e^{-i\omega t}\}.$$

Introducimos el fasor complejo

$$C = Ae^{i\psi_A} + Be^{i\psi_B}.$$

De este modo la presión queda en la forma

$$p(\vec{r}, t) = \Re\{C e^{-i\omega t}\}.$$

Si expresamos el fasor en forma polar,

$$C = M e^{i\varphi},$$

donde $M = |C|$ y $\varphi = \arg(C)$, obtenemos finalmente

$$p(\vec{r}, t) = M \cos(-\omega t + \varphi).$$

Al igual que en la sección anterior, escribimos

$$d = \frac{d_A + d_B}{2}, \quad \Delta d = \frac{d_A - d_B}{2},$$

y definimos

$$\alpha_A = k\Delta d + \varphi_{A0}, \quad \alpha_B = -k\Delta d + \varphi_{B0}.$$

Entonces se cumple que

$$C = e^{ikd} e^{i(\varphi_{A0} + \varphi_{B0})/2} \left[(A + B) \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) + i(A - B) \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \right],$$

donde

$$\Delta\alpha = k(d_A - d_B) + \varphi_{A0} - \varphi_{B0}.$$

De aquí se deduce que la amplitud del resultado es

$$M = \sqrt{\left((A + B) \cos \frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2 + \left((A - B) \sin \frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2},$$

$$M = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\Delta\alpha)}$$

y que la fase está dada por

$$\varphi = kd + \frac{\varphi_{A0} + \varphi_{B0}}{2} + \text{atan2}\left((A - B) \sin \frac{\Delta\alpha}{2}, (A + B) \cos \frac{\Delta\alpha}{2}\right).$$

donde $\arg(x + iy) = \text{atan2}(y, x)$. Separando de la fase total la contribución común kd , y definiendo $\varphi = kd + \Delta\varphi(\vec{r})$, podemos escribir la presión acústica como

$$p(\vec{r}, t) = M(\vec{r}) \cos(kd - \omega t + \Delta\varphi(\vec{r})),$$

lo que muestra que la superposición de las dos ondas originales equivale a una sola onda armónica con amplitud M y fase φ .

2.6.4. Diferencias entre ondas en frecuencias ópticas y acústicas

Como se mencionó previamente, la principal diferencia entre realizar experimentos con ondas acústicas y con ondas electromagnéticas radica en la magnitud que se puede medir directamente. En nuestro experimento acústico, el piezoeléctrico y el osciloscopio permiten resolver temporalmente una señal proporcional a la presión acústica y, por lo tanto, medir su amplitud. En óptica, en cambio, las oscilaciones del campo electromagnético son mucho más rápidas que el tiempo de respuesta de los detectores habituales, que registran una magnitud proporcional a la intensidad promedio.

Analicemos el caso acústico, empleando la notación compleja para describir la dependencia espacial y temporal de las ondas de presión emitidas por dos fuentes A y B (tal como lo haríamos en óptica):

$$p_A(\vec{r}, t) = A(\vec{d}_A)e^{i\Phi_A(\vec{r}, t)}, \quad p_B(\vec{r}, t) = B(\vec{d}_B)e^{i\Phi_B(\vec{r}, t)}. \quad (2.44)$$

Las fases correspondientes son

$$\Phi_A(\vec{r}, t) = \omega t - kd_A, \quad \Phi_B(\vec{r}, t) = \omega t - kd_B. \quad (2.45)$$

Aquí $\vec{d}_A$ y $\vec{d}_B$ dependen de la posición $\vec{r}$, aunque no lo escribimos de manera explícita. La presión total en el punto $\vec{r}$ se obtiene sumando ambas contribuciones:

$$p(\vec{r}, t) = A(\vec{d}_A)e^{i\Phi_A(\vec{r}, t)} + B(\vec{d}_B)e^{i\Phi_B(\vec{r}, t)} = \left(A(\vec{d}_A)e^{-ikd_A} + B(\vec{d}_B)e^{-ikd_B}\right)e^{i\omega t}. \quad (2.46)$$

En el caso de ondas electromagnéticas, lo que se mide es la intensidad, proporcional a

$$I \propto EE^*, \quad (2.47)$$

ya que se toma el promedio temporal del vector de Poynting, pues los detectores no pueden seguir las rápidas oscilaciones del campo eléctrico. En nuestro experimento acústico, en cambio, podemos resolver temporalmente la señal y medir su amplitud.

Para hacer explícita esta diferencia, escribimos el término entre paréntesis en la ecuación anterior en su forma polar, es decir, como módulo y fase. Como se trata de un número complejo, podemos expresar

$$p(\vec{r}, t) = \left(A(\vec{d}_A)e^{-ikd_A} + B(\vec{d}_B)e^{-ikd_B} \right) e^{i\omega t} = C(\vec{r})e^{i\Phi_C(d_A, d_B)}e^{i\omega t}, \quad (2.48)$$

donde $C(\vec{r})$ es el módulo y $\Phi_C(d_A, d_B)$ la fase. El módulo resulta

$$C(\vec{r}) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(d_A - d_B))}. \quad (2.49)$$

Lo que tiene sentido físico es la parte real de la presión, de manera que

$$p(\vec{r}, t) = C(\vec{r}) \cos(\omega t + \Phi_C(d_A, d_B)). \quad (2.50)$$

Finalmente, dado que con un osciloscopio se mide la amplitud pico a pico, obtenemos

$$p_{pp} = 2C(\vec{r}) = 2\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(d_A - d_B))}. \quad (2.51)$$

Si bien la expresión es formalmente similar a la que describe la interferencia de ondas electromagnéticas (salvo la raíz), el camino conceptual para llegar a ella es diferente: en óptica se mide la intensidad, mientras que en nuestro experimento acústico se accede directamente a la amplitud.

2.7. Fase de la onda esférica en un plano

La onda esférica emitida por una fuente puntual en el origen se escribe como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

donde

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

En el plano situado a una distancia L del origen (es decir, $z = L$), se tiene

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + L^2}.$$

Por lo tanto, la fase de la onda en el plano es

$$\Phi(x, y, t) = k r(x, y) - \omega t = k \sqrt{x^2 + y^2 + L^2} - \omega t.$$

Si se toma como referencia el punto central del plano $(x, y) = (0, 0)$, donde $r = L$, la diferencia de fase es

$$\Delta\Phi(x, y) = k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + L^2} - L \right).$$

En la aproximación paraxial ($x^2 + y^2 \ll L^2$), se expande r mediante serie de Taylor:

$$r(x, y) \approx L + \frac{x^2 + y^2}{2L} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8L^3} + \dots,$$

y la fase se aproxima por

$$\Phi(x, y, t) \approx kL + k \frac{x^2 + y^2}{2L} - \omega t.$$

El término cuadrático

$$k \frac{x^2 + y^2}{2L}$$

representa la curvatura del frente de onda en el plano $z = L$.



Capítulo 3

La respuesta del detector en las mediciones

Pensemos acerca de algunas ideas sobre situaciones en que realizamos mediciones (ver Fig. 3.1):

1. **Interferometría.** En el experimento de interferencia de Young con ondas acústicas, la figura de interferencia se manifiesta como una señal periódica que depende de la posición. Para medirla en detalle es necesario desplazar el detector piezoeléctrico (PE) a lo largo de la coordenada x , registrando la señal acústica correspondiente a cada posición. Si el detector fuera puntual, su respuesta espacial ideal podría representarse mediante una delta de Dirac. En ese caso, la medición en cada posición x correspondería directamente al valor local de la señal. En la práctica, el detector piezoeléctrico tiene una extensión espacial finita $\sim 2\Delta x$. Por lo tanto, la señal medida en una posición x recibe contribuciones de una región alrededor de ese punto, ponderadas por la respuesta espacial del detector. Si la respuesta es uniforme dentro de esa región, esta operación equivale a promediar la señal sobre el área de detección, aproximadamente en el rango $[x - \Delta x, x + \Delta x]$.

2. **Espectrometría.** Un espectrómetro permite separar la luz en sus diferentes frecuencias (o longitudes de onda) utilizando redes de difracción, de modo que cada frecuencia se proyecta en una posición distinta a lo largo de la coordenada x en el plano de detección. La relación entre posición y longitud de onda se obtiene calibrando el espectrómetro con fuentes conocidas, por ejemplo, un láser. La representación de la intensidad de la luz en función de la longitud de onda, es decir, el **espectro**, constituye una herramienta fundamental para caracterizar muestras. Para medirla se emplea típicamente un sensor de luz o una cámara pixelada. Un ejemplo de sensor es el fotodiodo, que registra una corriente proporcional a la intensidad de la luz en un área de detección que puede alcanzar algunos mm^2 . Si se utiliza un fotodiodo, la medición del espectro se realiza desplazándolo a lo largo de la figura de difracción, registrando la intensidad en cada posición x . Sin embargo, dado que el detector tiene un tamaño finito $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, lo que efectivamente mide

es la intensidad integrada, o promediada si la respuesta es uniforme, sobre un pequeño intervalo de longitudes de onda alrededor del valor deseado, es decir, $[\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$.

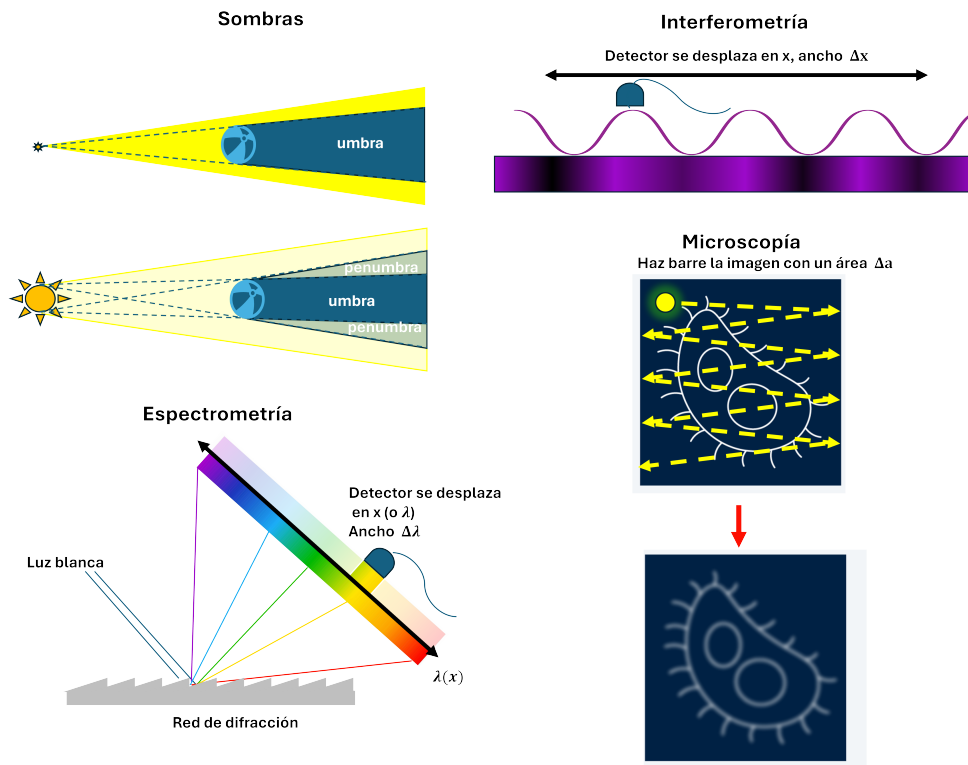


Figura 3.1: Ejemplos de sistemas en los cuales se observa la influencia de tener un detector o una fuente que no son puntuales. En el caso de las sombras, una fuente no puntual produce la zona de penumbra, produciendo un efecto de borronado respecto a lo que se obtendría con una fuente puntual. En espectrometría, en lugar de medir una “única” longitud de onda, se mide un rango $[\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. En interferometría, en lugar de medir en x integramos la señal en un rango $[x - \Delta x, x + \Delta x]$. En microscopía, en lugar de medir en (x, y) integramos en un área dada por el área del haz. Es decir: en la práctica no es posible medir “un punto” del espacio, sino un intervalo alrededor de ese punto.

3. Imágenes. En la aproximación de la óptica geométrica, una fuente puntual produciría una sombra con bordes perfectamente definidos. Sin embargo, en la práctica, las fuentes de luz reales no son puntuales, sino que tienen un tamaño finito. Esto implica que cada punto de la pantalla recibe contribuciones provenientes de diferentes puntos emisores de la fuente. El resultado es que la sombra observada no es la sombra puntual, sino una versión suavizada en la que el borde pierde definición y aparecen regiones de penumbra. Cuanto más grande es la fuente, mayor es el suavizado de la sombra. En el límite de una fuente muy extensa, la sombra puede incluso desaparecer casi por completo. Este mismo razonamiento se aplica al detector piezoeléctrico en el experimento de interferencia acústica: un detector puntual reproduciría localmente la señal, sin el efecto de promediado asociado a su tamaño finito (análoga a la sombra generada por una fuente puntual), mientras que un detector de tamaño finito mide una versión promediada de la

señal (análoga a la sombra difusa producida por una fuente real).

4. Microscopía. En un microscopio de fluorescencia se utiliza un haz láser que se enfoca sobre la muestra, y se mide la luz emitida en la región focal (típicamente una región de aproximadamente $1, \mu\text{m}$ de diámetro). La imagen de fluorescencia se construye desplazando el haz punto por punto a lo largo de la muestra, mientras se registra la intensidad en cada posición. Es importante notar que el punto focal no corresponde a un punto matemático ideal (una delta), sino que tiene una extensión espacial finita. Por lo tanto, la fluorescencia detectada no proviene de un único punto, sino de la pequeña región en la que está concentrado el haz.

En todos estos ejemplos, ¿Cómo se relaciona lo que se está midiendo con el fenómeno físico que se quiere caracterizar, si en cada punto que se mide se está mezclando la señal que se quiere medir con la señal en los puntos vecinos? ¿Cómo depende la medición del tamaño del detector?

Siempre que se mide una variable física, la respuesta del instrumento influye en el resultado. Dicha respuesta —que en la teoría de sistemas lineales suele describirse como un filtro— tiende, en general, a reducir la resolución de la medición. En este contexto, cuando el sistema de medición puede aproximarse como lineal y su respuesta es la misma en todas las posiciones, el proceso de medición puede modelarse como una **convolución** entre la señal real y la respuesta espacial del instrumento.

La gran ventaja de conocer esta respuesta es que se pueden diseñar algoritmos computacionales para compensar su efecto y recuperar la señal con mayor fidelidad. A este tipo de procedimientos se los denomina **deconvolución**.

En lo que sigue veremos cómo se calcula una convolución (el nombre puede sonar extraño, pero el concepto es sencillo). Luego estableceremos la analogía con el experimento de interferencia, mostrando cómo la señal medida resulta de la convolución entre la señal original y la respuesta espacial del detector. Finalmente, exploraremos cómo cambia la medición al modificar parámetros como el tamaño del detector.

Nota práctica. Si bien la deconvolución permite mejorar notablemente la calidad de los datos, es importante remarcar que el proceso nunca es perfecto. Esto se debe a que durante la medición también se introduce *ruido*, y además la información perdida por la resolución limitada del instrumento no siempre puede recuperarse por completo. Aun así, las técnicas de deconvolución resultan fundamentales para obtener resultados más

cercanos a la señal real.

Los ejemplos que se muestran en este capítulo están acompañados de un Jupyter notebook (convolucion.ipynb) que pueden encontrar en la carpeta de google drive. Los pueden usar para entender mejor las explicaciones que se dan a continuación.

3.1. Convolución: operación matemática

La convolución se puede definir tanto para sucesiones discretas, como las que surgen al muestrear una señal, como para funciones continuas. Consideremos primero las sucesiones f_m y g_m mostradas en la Fig.3.2(a). Su convolución se define como

$$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m g_{n-m}. \quad (3.1)$$

Para interpretar esta operación, fijemos inicialmente $n = 0$. En este caso debemos multiplicar f_m por g_{-m} y sumar los productos para todos los valores de m . La sucesión g_{-m} se obtiene reflejando g_m respecto de $m = 0$, como se muestra en la Fig. 3.2(b). Al variar n , la sucesión reflejada se desplaza. Por lo tanto, la convolución puede visualizarse como una operación de invertir, desplazar, multiplicar y sumar. Multiplicamos entonces aquellos números cuyos productos dan distinto de cero (gris) y sumamos, obteniendo que la convolución vale $(f * g)_0 = 9$.

Observar que en esta cuenta no importa por ahora cuál es la escala del eje de las abscisas, sino la posición relativa de cada punto de la sucesión. Por el momento trataremos f_m y g_{-m} como sucesiones. Más adelante, cuando las asociemos a funciones físicas muestreadas, tendremos en cuenta la escala del eje correspondiente. Nos concentramos en las sucesiones de números que se encuentran a la derecha de la figura 3.2(a) .

La consecuencia de cambiar el valor de n es producir traslaciones de g_{-m} . Entonces los distintos valores de la convolución se obtienen desplazando a g_{-m} en el valor de n , y para cada desplazamiento multiplicar y sumar los elementos de ambas sucesiones. Veamos ejemplos concretos en las figuras 3.2(c-h). Por ejemplo, $n = -4$ significa que g_{-m} se desplaza 4 veces hacia la izquierda, como se muestra en 3.2(c).

Ahora vamos a hacer las cuentas para aquellos valores de n para los cuales la convolución no da cero. Si $n = -5$ o menor, las dos sucesiones no se solapan en ningún elemento no nulo, por lo que todos los productos son cero y la convolución resulta nula. Entonces solo tiene sentido aumentar n . Luego, vemos que podemos seguir este procedimiento

hasta que la convolución vuelva a dar cero, si variamos n desde -4 hasta 2. En el medio obtenemos valores distintos de cero, como se ve en 3.2(c-h). El resultado de la convolución se puede observar en la figura 3.3.

¿Cómo cambia el resultado si las funciones son continuas?

Para funciones continuas, la convolución se define de manera análoga como

$$(f * g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\xi - t) dt. \quad (3.2)$$

En este caso, en lugar de sumar los productos, se integra el producto entre $f(t)$ y la función $g(t)$ invertida y desplazada. Es decir, la operación puede visualizarse como invertir, desplazar, multiplicar e integrar.

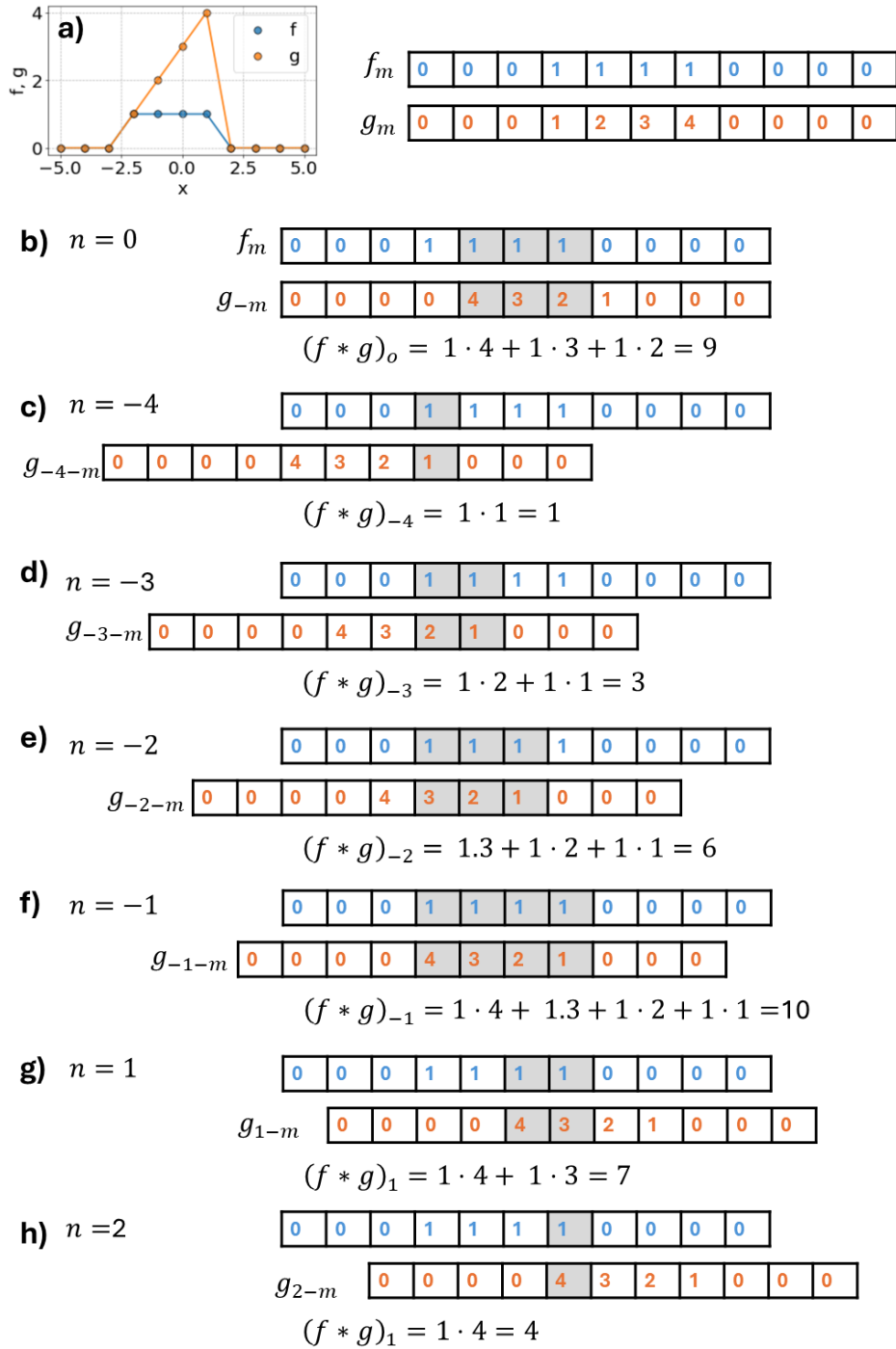


Figura 3.2: Convolución de las funciones f_m y g_m . En (a) se muestra un gráfico del muestreo realizado para estas funciones. En (b-h) se presenta una visualización del cálculo de la convolución de estas funciones para distintos valores de n .

En la figura 3.4 se muestra un ejemplo para funciones ‘continuas’. Ver que el procedimiento es el mismo: se invierte la función $g(x)$ respecto de $x = 0$, se desplaza a $g(-x)$ a través de $f(x)$ para distintos valores de ξ . Para cada desplazamiento ambas funciones se multiplican y se calcula el área bajo la función producto (color gris en la figura que corresponde al punto rojo en la convolución).

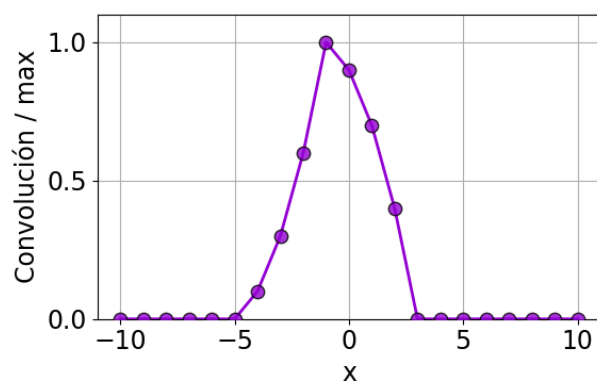


Figura 3.3: Resultado normalizado de la convolución entre las funciones f_m y g_m , variando n entre -10 y 10. Se observa que toma valores no nulos cuando n se encuentra entre -4 y 2.

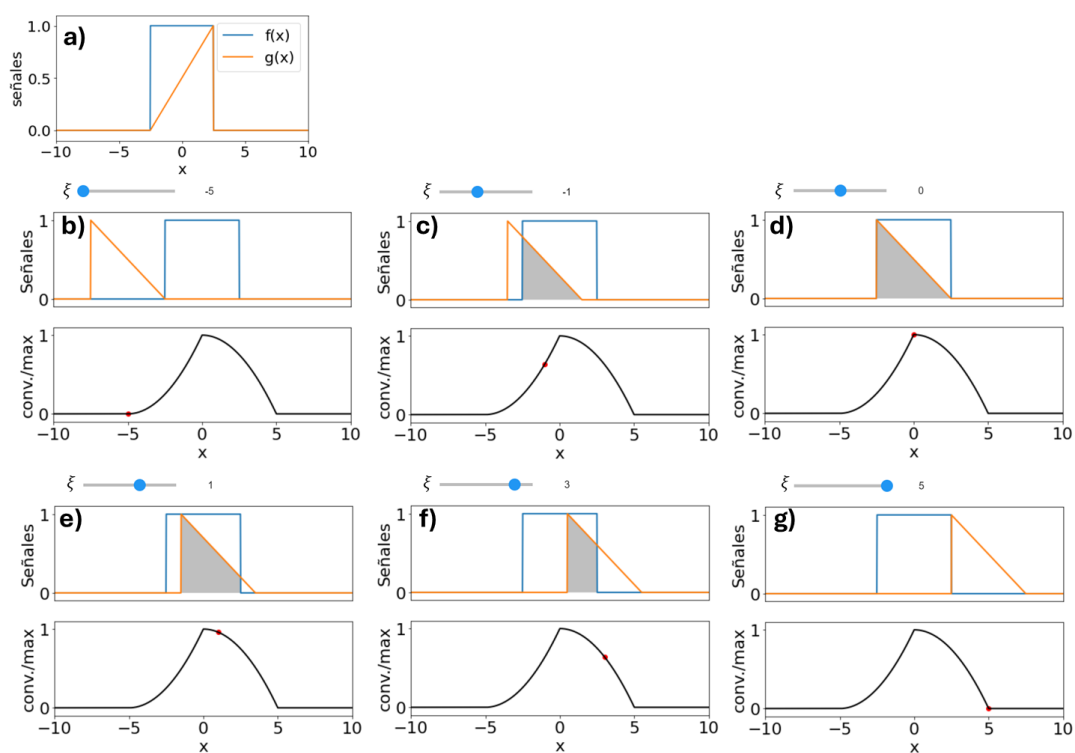


Figura 3.4: Ejemplo de convolución para dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$. Las mismas se encuentran graficadas en (a). Se observa el proceso de convolución para diferentes desplazamientos: (b) $\xi = -5$, (c) $\xi = -1$, (d) $t = 0$, (e) $\xi = 1$, (f) $\xi = 3$, y (g) $\xi = 5$. En cada caso se detalla el área integrada (arriba en gris) y el valor resultante de la convolución (abajo como un punto rojo).

Nota: todo esto que pensamos en una coordenada espacial unidimensional, también vale para la coordenada temporal y para múltiples dimensiones.

3.2. Convolución: intrínseca en el proceso de medición

Si observamos los ejemplos de mediciones ilustrados en la Fig. 3.1, notamos que en casi todos los casos existe “algo” que se desplaza a lo largo de aquello que se desea medir (ya sea el detector o el haz de iluminación). En cada posición, la medición recibe contribuciones de una región finita alrededor del punto considerado. La importancia de cada contribución está determinada por la respuesta espacial del detector o del sistema de medición. En consecuencia, el resultado del proceso de medición, $M(x)$, puede describirse como la **convolución** entre la señal que se desea medir $S(x)$ y la respuesta espacial del detector $R(x)$. Reescribiendo la expresión de la convolución, obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) R(x - \tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Aquí vemos que la función $R(x - \tau)$ determina cuánto contribuye a la medición realizada en x la señal proveniente de la posición τ . Si la respuesta espacial se normaliza de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 1, \quad (3.4)$$

la medición puede interpretarse como un promedio ponderado de la señal alrededor de cada posición.

Revisemos los ejemplos que vimos al inicio del capítulo:

1. Interferometría acústica.

- $S(x)$: señal de interferencia *ideal*, es decir, la distribución espacial de la amplitud que se desea medir punto por punto.
- $R(x)$: respuesta espacial del detector piezoeléctrico. Para un detector puntual sería una delta de Dirac, $R(x) = \delta x$, pero en la práctica tiene una extensión espacial finita; por ejemplo, una respuesta uniforme podría tener soporte en $[-\Delta x, +\Delta x]$.
- $M(x)$: medición efectiva, obtenida al promediar la señal de interferencia $S(x)$ dentro del área de respuesta $R(x)$.

2. Espectrometría óptica. En un espectrómetro, cada longitud de onda se dispersa hacia una posición distinta en la coordenada x . Una vez calibrada la relación entre posición y longitud de onda, podemos expresar todas las funciones directamente en función de la longitud de onda λ . Luego, la intensidad en función de λ constituye el espectro.

- $S(\lambda)$: espectro *ideal*, intensidad de la luz en cada longitud de onda sin efectos instrumentales.

- $R(x)$: respuesta del detector (fotodiodo o píxel), extendida sobre un rango $[x - \Delta, x + \Delta]$, luego de calibrar, obtenemos $R(\lambda)$ en $[\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$.
- $M(\lambda)$: espectro medido, resultado de la convolución entre el espectro ideal $S(\lambda)$ y la respuesta del detector $R(\lambda)$.

Entonces

$$M(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda') R(\lambda - \lambda') d\lambda'. \quad (3.5)$$

3. Formación de imágenes (sombras).

- $S(x)$: sombra *ideal* que se obtendría con una fuente puntual.
- $R(x)$: distribución espacial de la fuente de luz (tamaño y forma). Una fuente extensa suaviza los bordes de la sombra.
- $M(x)$: En este modelo, la sombra observada puede describirse como la convolución entre la sombra producida por una fuente puntual y la distribución espacial efectiva de la fuente.

4. Microscopía de fluorescencia.

- $S(x)$: distribución de fluorescencia *ideal* de la muestra, punto por punto.
- $R(x)$: respuesta espacial efectiva del sistema de microscopía, que en el modelo más simple está determinada por el perfil del foco láser (aproximadamente un área de $1 \mu\text{m}$ de diámetro).
- $M(x)$: imagen de fluorescencia registrada, que resulta de la convolución entre la fluorescencia real $S(x)$ y el perfil focal $R(x)$.

Supongamos ahora el caso *ideal* en el que la respuesta del detector se comporta como una delta de Dirac. En términos físicos, esto equivaldría a que el haz pudiera enfocarse en un área infinitamente pequeña o a que el detector (ya sea piezoeléctrico, fotodiodo, etc.) tuviera una extensión espacial infinitesimal. Sabemos que en la práctica esto no es posible, pero sirve como referencia conceptual.

Si escribimos $R(x - \tau) = \delta(x - \tau)$ y reemplazamos en la expresión 3.3, obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \delta(x - \tau) d\tau = S(x). \quad (3.6)$$

Esto significa que, matemáticamente, en el caso de un detector “ideal” la medición coincide exactamente con la señal que se desea medir. Ahora bien, la pregunta que debemos hacernos es: **¿qué tan ideal puede ser realmente un detector físico?**

3.3. El detector ideal y el real

Veamos ahora un ejemplo concreto de medición: el doblete del sodio. Este consiste en dos líneas espectrales muy angostas, centradas en las longitudes de onda 589.0 nm y 589.6 nm. Para construir un ejemplo sencillo, supondremos que cada línea tiene un perfil lorentziano de ancho característico $\sim 0,1$ nm. En la Fig. 3.5 estas líneas están representadas en color naranja.

Para registrarlas, utilizamos una red de difracción que separa las longitudes de onda y un detector que barre el espectro midiendo la intensidad, como se ilustra en la Fig. 3.1. Con el fin de controlar la resolución, colocamos solidariamente al detector una rendija de ancho variable Δx , de modo que la luz que atraviesa la rendija es capturada por el detector, mientras que la que queda fuera no contribuye a la medición. Mediante una calibración podemos asociar la posición x con la longitud de onda λ , de manera que el tamaño de la rendija se expresa en unidades espectrales como $\Delta\lambda = w$. Cuanto más angosta es la respuesta instrumental en comparación con las escalas espectrales que se desean resolver, más fielmente se reproduce la estructura del espectro.

La función de respuesta $R(\lambda)$ del sistema rendija+detector, calibrada en longitud de onda, corresponde a una función cuadrada, representada en la Fig. 3.5(a). En las Figs. 3.5(b-c) se muestra en verde el resultado de la medición, simulado como la convolución entre la respuesta del detector $R(\lambda)$ y las líneas espectrales que se desean caracterizar.

Para estudiar únicamente el efecto del ancho de la rendija sobre la resolución, normalizaremos su respuesta de modo que su integral sea igual a uno. Para una rendija de ancho espectral w escribiremos

$$R(\lambda) = \begin{cases} 1/w, & |\lambda| \leq w/2, \\ 0, & |\lambda| > w/2. \end{cases} \quad (3.7)$$

De este modo, al disminuir w , la respuesta se aproxima a una delta de Dirac y la señal medida reproduce cada vez con mayor fidelidad al espectro original.

Desarrollando la intuición: Usando la simulación (Jupyter notebook (convolucion.ipynb)), les sugerimos responder las siguientes preguntas (y diseñar otras!) para trabajar sobre nuestra intuición acerca de la convolución en el proceso de medición.

1. Cambiar la resolución del espectrómetro. Qué pasa cuando la función resolución se aproxima a una delta?
2. Cambiar la distancia entre líneas espectrales manteniendo la misma resolución del espectrómetro.

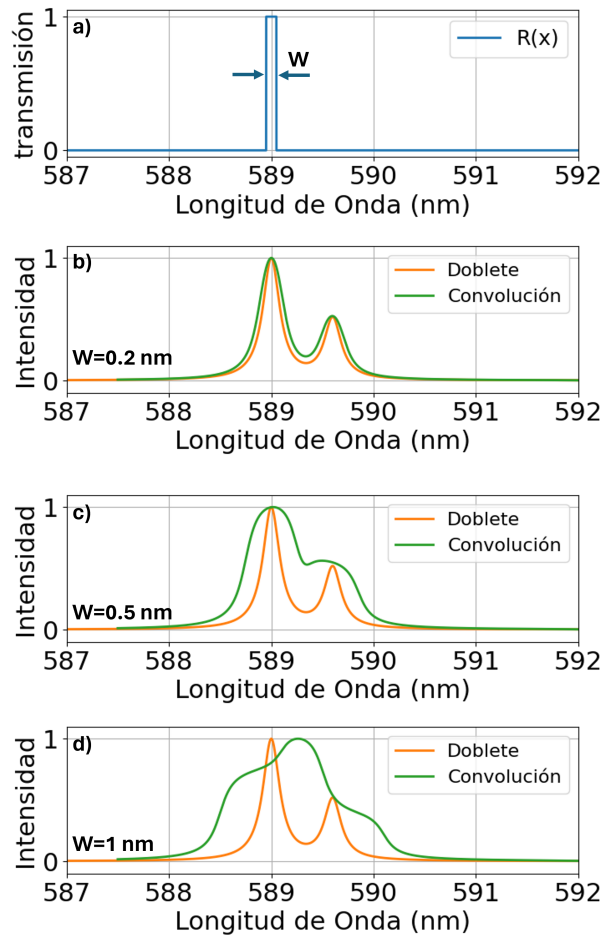


Figura 3.5: En (a) se muestra la respuesta espectral normalizada $R(\lambda)$ asociada a una rendija de ancho w . (b) Se detalla la comparación entre el espectro del doblete de sodio (línea sólida naranja) y el espectro obtenido al medir (línea sólida verde) utilizando una rendija de ancho $W = 0,2$ nm, (c) $W = 0,5$ nm y (d) $W = 1,0$ nm.

3. Simular ruido de alta frecuencia sumando a las líneas espectrales algo como $0.1 \sin(1000 x)$. Observar que la convolución con una respuesta de ancho finito suaviza las variaciones rápidas de la señal y atenúa el ruido de alta frecuencia espacial/espectral, es decir, funciona como filtro pasa bajos
4. ¿Cómo debe ser el ancho w de la respuesta instrumental en relación con el ancho y la separación de las líneas espectrales para poder distinguirlas?

Este ejemplo muestra que la resolución no es una propiedad exclusiva de la señal ni del detector, sino que surge de comparar la escala espacial o espectral de la estructura que se desea medir con el ancho de la respuesta instrumental.

Capítulo 4

Ondas estacionarias

Una onda estacionaria puede formarse por la superposición de dos ondas de igual frecuencia y amplitud que se propagan en sentidos opuestos. El patrón resultante no se desplaza: las posiciones de sus nodos y antinodos permanecen fijas en el espacio¹. Por ejemplo, en la figura 4.1 se observan dos ondas contrapropagantes y su superposición en distintos tiempos ($t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$, donde T es el período de la onda).

La onda que se propaga hacia la izquierda se puede expresar como

$$\Psi_A(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \phi_A), \quad (4.1)$$

y la onda que se propaga hacia la derecha como

$$\Psi_B(x, t) = B \cos(\omega t - kx + \phi_B). \quad (4.2)$$

Consideremos entonces que $A = B$ y, para simplificar la expresión, que las fases iniciales son nulas. La onda resultante es

$$\Psi(x, t) = \Psi_A(x, t) + \Psi_B(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (4.3)$$

En la figura 4.1c se observa la superposición de ambas ondas formando una onda estacionaria. El valor de la perturbación cambia con el tiempo, pero la amplitud de oscilación depende de la posición y está dada por $2A|\cos(kx)|$. Los puntos indicados con la letra Q, denominados nodos, presentan desplazamiento nulo para todo tiempo, mientras que los indicados con la letra P, denominados antinodos, presentan la máxima amplitud de oscilación.

A diferencia de las ondas propagantes, una onda estacionaria pura no presenta transporte neto de energía. Además, puede verse gráficamente en la figura 4.1c que la distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$.

¹Si las ondas contrapropagantes tienen amplitudes diferentes, la superposición no forma una onda estacionaria pura: los mínimos de amplitud no son nulos y, por lo tanto, no existen nodos verdaderos. Además, aparece un transporte neto de energía en la dirección de la onda de mayor amplitud.

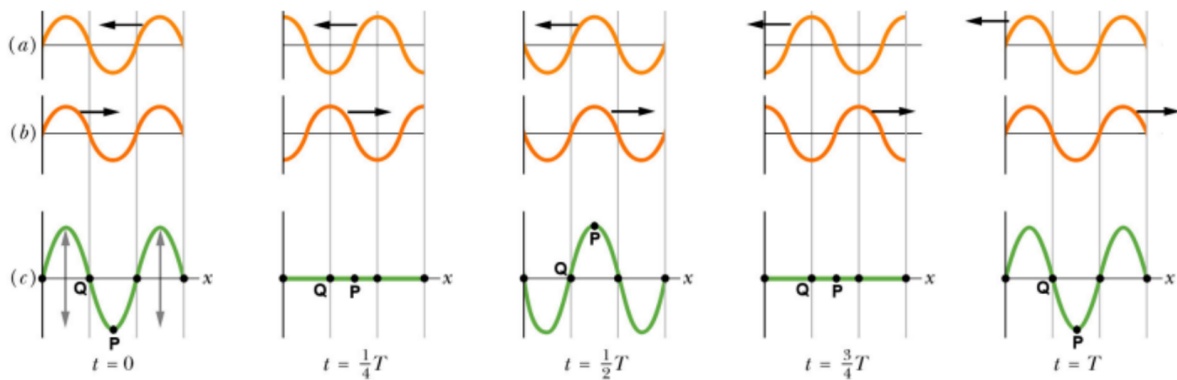


Figura 4.1: Dos ondas, una que se propaga hacia la izquierda (a) y otra hacia la derecha (b), se superponen para formar una onda estacionaria (c)

Podríamos preguntarnos, ¿cómo es que generamos dos ondas que se propaguen en direcciones opuestas a partir de una única fuente de ondas? Los cambios en las características de los medios en donde se propagan las ondas (cambios de sección en tubos, fijaciones en las cuerdas, cambio de índice de refracción para la luz, etc), producen reflexiones.

Por ejemplo, en la figura 4.2, se muestra la reflexión de una onda de desplazamiento en una pared rígida. La onda $\Psi(x, t)$ ahora está compuesta por la superposición de una onda que incide en la pared $\Psi_I(x, t)$ y una onda que se refleja $\Psi_R(x, t)$. Como el desplazamiento debe ser nulo en la pared, la condición de borde es

$$\Psi(x_o, t) = \Psi_I(x_o, t) + \Psi_R(x_o, t) = 0. \quad (4.4)$$

En el caso ideal de reflexión total, la onda reflejada tiene igual amplitud que la incidente, pero se desfasa en π , puesto que $\Psi_I(x_o, t) = -\Psi_R(x_o, t)$. Nota: para dibujar la onda reflejada, tuvimos que espejar respecto a la dirección horizontal y vertical, por qué?

Las ondas estacionarias son más comunes de lo que tal vez nos imaginamos. Por ejemplo, son esenciales para el funcionamiento de los instrumentos musicales. En la figura 4.3, se muestran dos ejemplos típicos de un instrumento de viento (ondas longitudinales en gases) y uno de cuerdas (ondas transversales en cuerdas). La frecuencia fundamental determina principalmente la altura o tono de la nota, mientras que el contenido relativo de los distintos modos contribuye a determinar el timbre (dos notas iguales no suenan perfectamente igual en instrumentos distintos, aun estos sean del mismo tipo). La frecuencia del modo más bajo se denomina frecuencia fundamental y determina principalmente la altura o tono de la nota. Las componentes de frecuencia superiores contribuyen al timbre del instrumento. Cuando estas frecuencias son múltiplos enteros de la fundamental se denominan armónicos. El término sobretono se utiliza, en general, para referirse a cualquier componente por encima de la fundamental. Tanto en los instrumentos de viento como cuerdas, las vibraciones de las ondas estacionarias en ellos producen vibraciones del aire

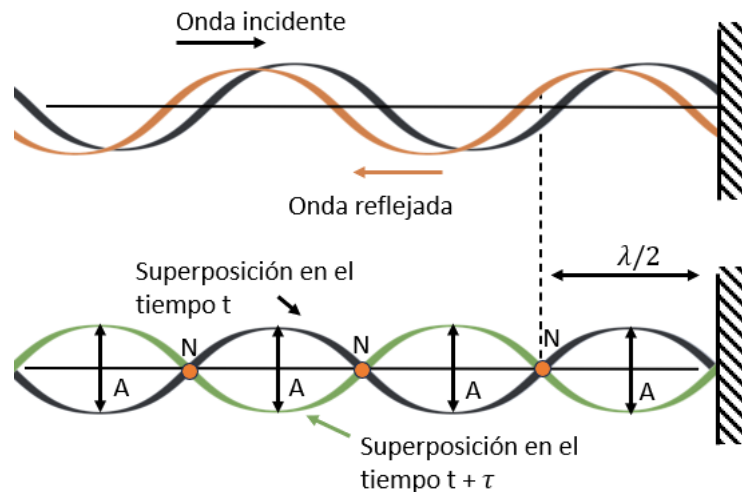


Figura 4.2: Arriba: una onda incidente (en negro) incide sobre una pared rígida para una onda de desplazamiento. Esto produce una onda reflejada (marrón) que viaja en sentido contrario de igual amplitud. Esto genera una onda resultante que es la superposición de las ondas incidentes y reflejadas (abajo) formando nodos y antinodos.

en su entorno generando una onda longitudinal en el aire, que se propaga hasta nuestros oídos, lo que permite que escuchemos a los instrumentos musicales.

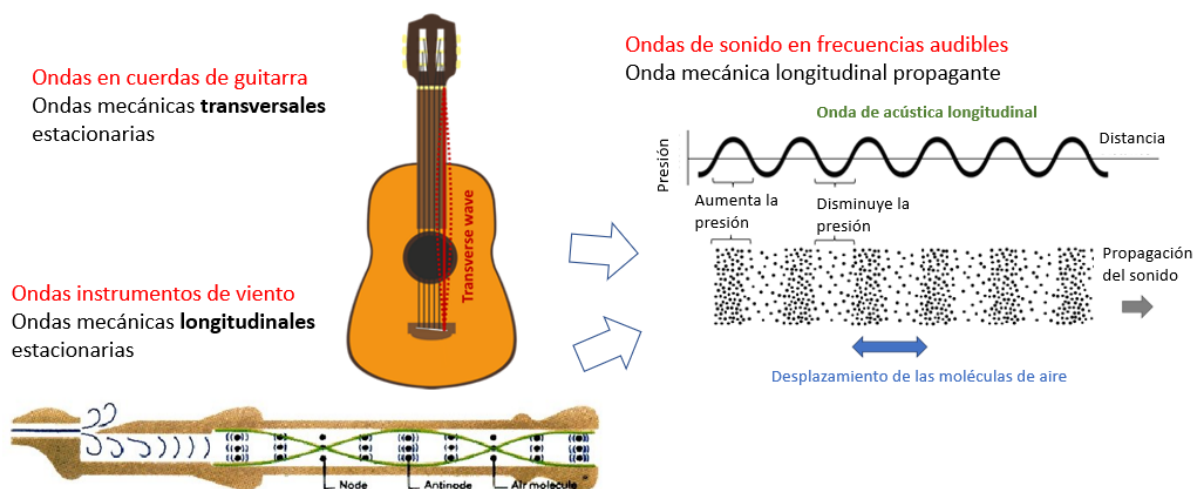


Figura 4.3: Las ondas de sonido provocan perturbaciones en el aire al desplazar las moléculas, dando lugar a una onda longitudinal que permite la propagación del sonido. En el caso de instrumentos de cuerdas, encontramos mayoritariamente ondas mecánicas transversales estacionarias mientras que en instrumentos de viento ondas mecánicas longitudinales.

Para accionar a las notas, ambos sistemas deben ser forzados. En el caso de los instrumentos de cuerda, los dos extremos de las cuerdas se encuentran fijos (condición de borde extremos fijos) y el sistema se puede forzar por frotamiento (violín, viola, cello) o por percusión (los tres anteriores, la guitarra, el piano). En los instrumentos de viento se excita la columna de aire (forzado en un extremo), y las condiciones de borde dependen

de la geometría y del mecanismo de excitación del instrumento.

En base a lo explicado previamente, nos interesa saber como se forman las ondas estacionarias, como influyen distintas condiciones de borde y como son los sistemas forzados. Intentemos responder a estas preguntas empleando dos sistemas típicos: cuerdas y tubos.

4.1. Ondas estacionarias en cuerdas

4.1.1. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno para una cuerda dependen de cómo se encuentran sujetos sus extremos. Consideraremos, en particular, extremos fijos, libres o forzados, como se esquematiza en la figura 4.4.

Si un extremo de la cuerda está fijo en la posición $x = x_0$, su desplazamiento debe ser nulo para todo tiempo. Por lo tanto, la condición de contorno es

$$\Psi(x_0, t) = 0. \quad (4.5)$$

En el caso ideal de reflexión total, esta condición implica que la onda reflejada tiene la misma amplitud que la incidente y presenta un cambio de fase de π .

En cambio, si el extremo de la cuerda está libre, la fuerza transversal en ese punto debe ser nula. Para pequeñas oscilaciones, la fuerza transversal es proporcional a la pendiente de la cuerda, por lo que la condición de contorno es

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (4.6)$$

En este caso, la onda reflejada no presenta inversión de fase. Las ondas incidente y reflejada se superponen de manera que la pendiente de la onda total sea nula en el extremo libre.

Tarea: Escribir las ondas incidente y reflejada que satisfacen cada una de las condiciones de contorno anteriores y verificar el cambio de fase que se produce en cada reflexión.

A partir de las condiciones de borde planteadas podemos proponer varias situaciones esquematizadas en la figura 4.5: que la cuerda tenga dos extremos fijos, que la cuerda tenga dos extremos libres, que la cuerda tenga un extremo fijo y uno libre. Para analizar que sucede podemos plantear la forma de la onda estacionaria genérica

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.7)$$

donde φ es la fase inicial temporal y ϕ la fase inicial espacial. Luego proponemos las condiciones de borde adecuadas según el problema particular.

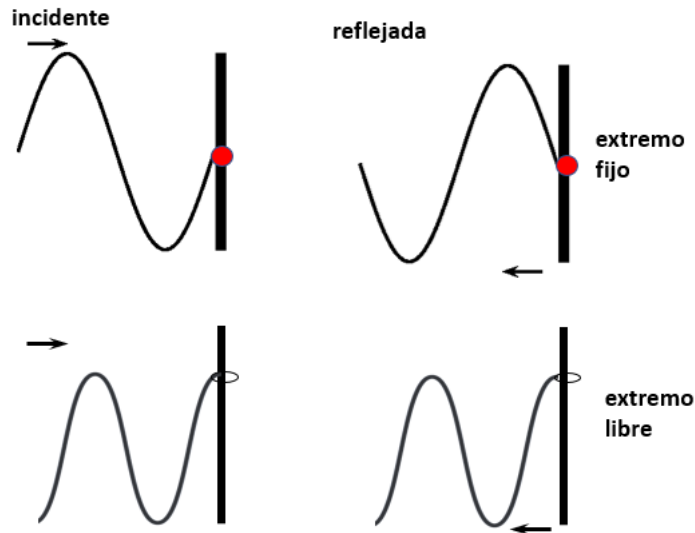


Figura 4.4: Arriba: una onda incide sobre un extremo fijo (izquierda). Esto genera una onda reflejada **invertida** (derecha), es decir, desfasada en π . Abajo: una onda incide en un extremo libre (izquierda) y produce una onda reflejada de igual amplitud y sin inversión de fase. La superposición de las ondas incidente y reflejada produce pendiente nula en el extremo.

4.1.2. Cuerda con dos extremos fijos

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 en ambos extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

Si la cuerda tiene dos extremos fijos en las posiciones $x = 0$ y $x = L$, las condiciones de contorno son

$$\Psi(0, t) = 0, \quad \Psi(L, t) = 0.$$

Al imponer estas condiciones sobre una onda estacionaria (ec. 4.7) se obtiene que sólo ciertos valores del número de onda están permitidos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

o, equivalentemente,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (4.9)$$

Es decir, en la longitud L de la cuerda entra un número entero de medias longitudes de onda. Los modos normales pueden escribirse como

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.10)$$

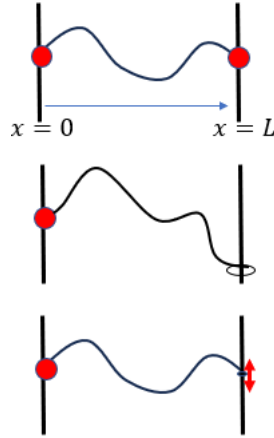


Figura 4.5: Ejemplo de tres configuraciones con distintas condiciones de contorno. Arriba, una onda con sus dos extremos fijos (puntos rojos). Medio: una onda con un extremo fijo y el otro extremo libre. Abajo: una onda incide en un extremo libre y produce una onda reflejada de igual amplitud, sin inversión de fase.

con A_n y φ_n parámetros a determinar a partir de las condiciones iniciales. Para una cuerda ideal,

$$\omega_n = vk_n, \quad v = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}}, \quad (4.11)$$

siendo $\mathcal{T}$ la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal (en unidades de kg/m). Por lo tanto,

$$f_n = \frac{nv}{2L}. \quad (4.12)$$

La frecuencia f_1 se denomina frecuencia fundamental y las restantes son sus armónicos. En la figura 4.6, se esquematizan los primeros modos normales, sus frecuencias ($f_n = \omega_n/2\pi = nv/2L$) y longitudes de onda.

4.1.3. Cuerda con un extremo libre y uno fijo

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 y 4.6 en cada uno de los extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

Si la cuerda tiene un extremo fijo en $x = 0$ y uno libre en $x = L$, las condiciones de contorno son

$$\Psi(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

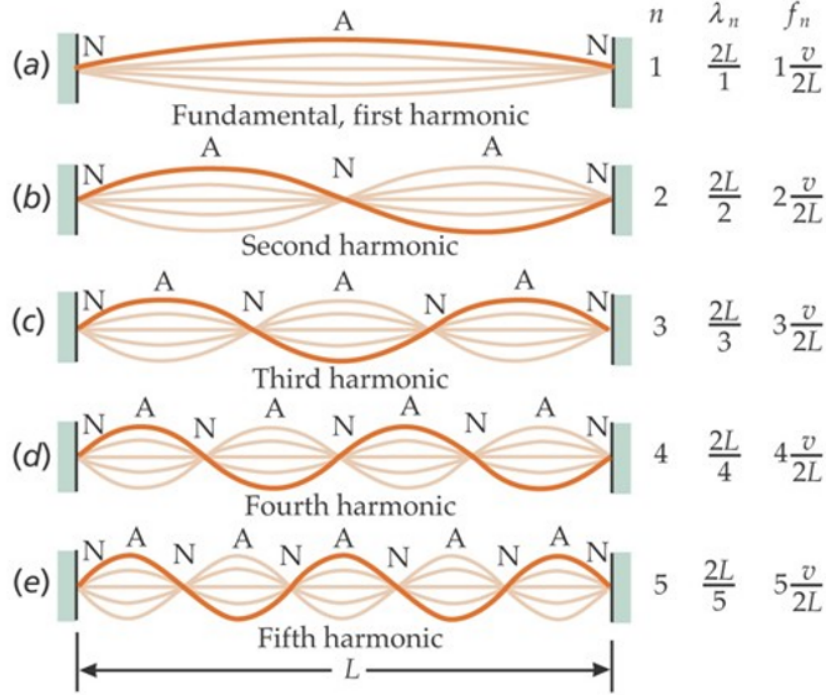


Figura 4.6: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con dos extremos fijos. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

Al imponer estas condiciones se obtiene que los números de onda permitidos son

$$k_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

y, por lo tanto,

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1}. \quad (4.14)$$

Es decir, la longitud de la cuerda contiene un número impar de cuartos de longitud de onda (o la onda entra un número entero de veces en $4L$). Los modos normales pueden escribirse como

$$\Psi_m(x, t) = A_m \sin(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi_m). \quad (4.15)$$

Usando la relación de dispersión $\omega_m = vk_m$, las frecuencias permitidas son

$$f_m = \frac{(2m-1)v}{4L}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, las frecuencias de los modos corresponden a múltiplos impares de la frecuencia fundamental:

$$f_m = (2m-1)f_1. \quad (4.17)$$

En la figura 4.7 se pueden observar graficados los primeros modos normales, sus frecuencias y longitudes de onda.

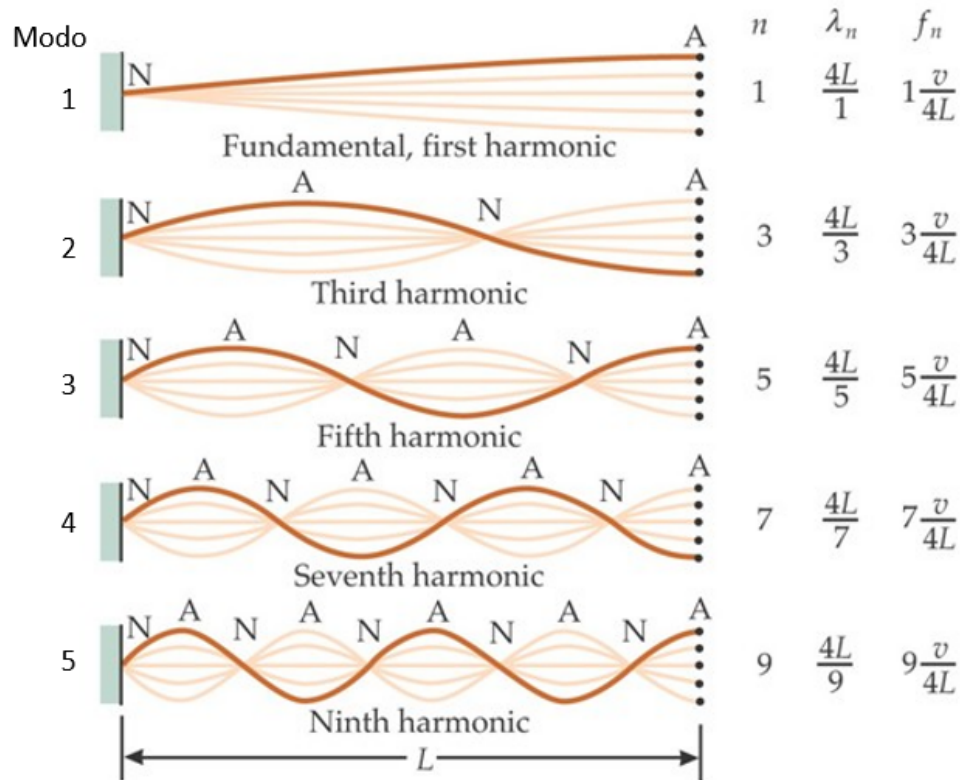


Figura 4.7: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con un extremo fijo y uno libre. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

4.1.4. Cuerda con un extremo fijo y otro forzado

Supongamos que ahora tenemos una cuerda con un extremo fijo en $x = 0$ y uno forzado armónico en $x = L$ ($D \cos(\omega t)$). El extremo fijo será un nodo, pero el extremo forzado se verá obligado a moverse como el forzante, esto es

$$\begin{aligned}\Psi(0, t) &= 0 \\ \Psi(L, t) &= D \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Luego de aplicar estas dos condiciones a la ecuación 4.7, se obtiene que

$$\Psi(x, t) = \frac{D}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.18)$$

En donde se usó que dado que la solución transitoria decayó, la cuerda debe oscilar con la misma frecuencia y fase que el forzante.

El denominador de la ecuación 4.18 se anula cuando $kL = n\pi$ con $n = 1, 2, 3\ldots$ (que son los mismos valores que se obtienen para extremos fijo-fijo o libre-libre). De este modo si el forzante tiene frecuencia $\omega = \omega_n = vk_n$, la solución diverge (es un sistema resonante).

Cerca de las frecuencias naturales $kL = n\pi$, la amplitud predicha por este modelo ideal crece fuertemente. La divergencia matemática se debe a que no se incluyó amortiguamiento; en el sistema real la amplitud permanece finita. Si el desplazamiento impuesto por el forzante es mucho menor que la amplitud de oscilación de la cuerda, el extremo forzado puede aproximarse como un nodo. Esto ocurre en la frecuencia de resonancia, donde $D/\sin(kL) \gg D$. Por esta razón podemos considerar al extremo forzado como un nodo.

¿Qué pasa si forzamos con una frecuencia que no sea de un modo normal?

Cuando la frecuencia del forzante coincide o se aproxima a una frecuencia natural del sistema, las ondas generadas y reflejadas interfieren constructivamente y se obtiene una gran amplitud de oscilación. Para otras frecuencias, las distintas contribuciones no se suman completamente en fase y la amplitud estacionaria es menor. En un sistema real, las pérdidas y el amortiguamiento determinan el ancho y la amplitud máxima de las resonancias.

4.1.5. Experimento: ondas estacionarias en cuerdas.

En esta experiencia se estudiarán ondas estacionarias en cuerdas. El dispositivo experimental se observa en la figura 4.8. En uno de los extremos de la cuerda se sujeta un portapesas y se la posiciona sobre una polea. En el portapesas se pueden colocar distintas masas para tensionar la cuerda. Se debe tener particular cuidado durante el montaje de que la cuerda este correctamente nivelada. Se excita a la cuerda en el otro extremo empleando un wave driver (un parlante con membrana). El wave driver tiene una pieza con una ranura para sujetar a la cuerda. Se alimenta al wave driver utilizando el generador de funciones y un amplificador de señales. Además se puede emplear un osciloscopio para medir la señal de alimentación. En el laboratorio se cuenta con cuerdas de distinta densidad, masas de distinto peso, balanza, micrómetro.

Advertencia: el *wave driver* posee una traba para bloquear su accionamiento mecánico cuando no está en uso. No te olvides de retirar la traba antes de comenzar a usarlos. Antes de conectarlo, verificar cuál es el voltaje máximo de alimentación permitido para el *wave driver*.

Experimental:

- a) ¿Cómo se genera aproximadamente una condición de extremo fijo del lado de la polea? ¿Dónde se encuentra la posición efectiva de ese extremo?

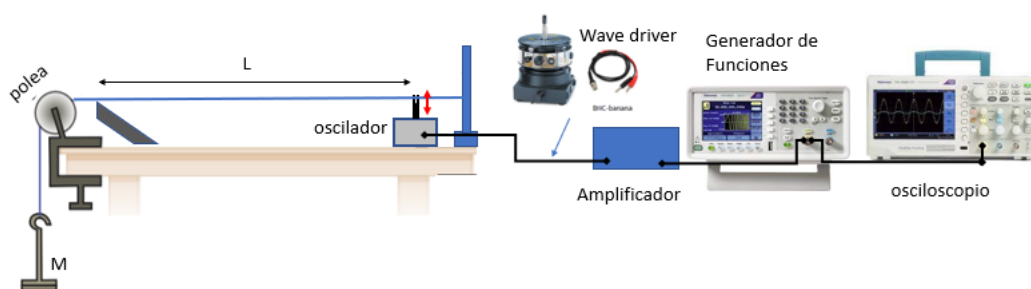


Figura 4.8: Esquema experimental para la experiencia con cuerdas.

- b) Caracterizar las cuerdas que se van a utilizar determinando su densidad lineal μ . ¿Qué magnitudes deben medir para obtenerla?
- c) ¿Cómo se genera la tensión $\mathcal{T}$ en la cuerda? Si se desprecia el rozamiento en la polea y la masa colgante se encuentra en equilibrio, ¿qué relación existe entre $\mathcal{T}$ y la masa colgante? ¿Qué rango de tensiones es razonable utilizar?
- d) A partir de la tensión y de la densidad lineal, calcular la velocidad de propagación esperada,

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}}. \quad (4.19)$$

- e) Buscar los modos normales del sistema. Para cada modo, caracterizar su frecuencia y su longitud de onda. ¿Cómo puede determinarse la velocidad de propagación a partir de estas mediciones?
- f) Medir la velocidad de propagación para distintos valores de la tensión. ¿Cuántos valores es razonable medir? ¿Qué dependencia esperan encontrar entre v y $\mathcal{T}$?
- g) Repetir las mediciones utilizando una cuerda de diferente densidad lineal. ¿Qué dependencia esperan encontrar entre v y μ ?

4.2. Ondas estacionarias en tubos

Ya estudiamos ondas que se propagan en gases cuando realizamos el experimento de ultrasonido (Capítulo 2). Recordemos que, en el aire, la onda se propaga a través de compresiones y expansiones del gas, sin que exista un movimiento neto de las partículas del medio, aunque estas puedan oscilar localmente.

En el Capítulo 2 introdujimos la relación entre el desplazamiento longitudinal de las partículas del aire y las perturbaciones de presión y densidad, de manera que escribimos

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t),$$

y

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, t),$$

donde $p(x, t)$ y $\delta\rho(x, t)$ representan las perturbaciones de presión y densidad producidas por la onda.

Retomemos ahora esta relación con un poco más de detalle, ya que será necesaria para analizar las condiciones de borde y los modos normales en tubos.

Supongamos que el gas se encuentra en equilibrio dentro de un tubo de sección transversal A , a una presión P_0 y con una densidad ρ_0 , como se esquematiza en la figura 4.9. Llamemos $\Psi(x, t)$ al desplazamiento longitudinal de las partículas de aire respecto de su posición de equilibrio.

Consideremos inicialmente un pequeño elemento de gas de longitud Δx y volumen $V_o = \Delta x A$. Cuando se propaga la onda, los extremos de este elemento se desplazan cantidades $\Psi(x, t)$ y $\Psi(x + \Delta x, t)$, respectivamente. Por lo tanto, la variación de volumen es

$$\Delta V = A [\Psi(x + \Delta x, t) - \Psi(x, t)]. \quad (4.20)$$

El movimiento del aire produce variaciones de presión y densidad. La presión está relacionada con la compresión o expansión del gas. Cuando se comprime a un volumen más chico, la presión aumenta. Cuando se expande a un volumen más grande la presión disminuye. La perturbación de presión está relacionada con la variación relativa de volumen mediante el módulo volumétrico K ,

$$p = -K \frac{\Delta V}{V_o}. \quad (4.21)$$

Reemplazando las expresiones anteriores y tomando el límite $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene

$$p(x, t) = -K \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.22)$$

De manera análoga, la conservación de la masa permite relacionar la perturbación de densidad con el desplazamiento:

$$\delta\rho(x, t) = -\rho_o \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.23)$$

con ρ_o la densidad media del gas.

Estas expresiones muestran que una compresión, para la cual $\partial \Psi / \partial x < 0$, produce un aumento de la presión y de la densidad, mientras que una expansión produce una disminución de ambas.

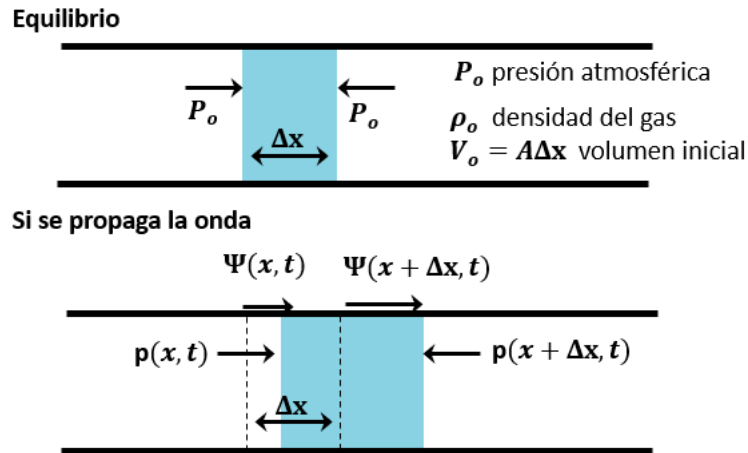


Figura 4.9: Esquema de un gas en equilibrio (arriba) y un gas en el que se propaga una onda (abajo)

4.2.1. Condiciones de borde en tubos

Las condiciones de borde en los tubos pueden ser extremo cerrado, extremo abierto o extremo forzado (también existen otras como los cambios de sección, pero por ahora tomamos estas tres). Miremos primero qué pasa con el extremo cerrado que está a la derecha de la figura 4.10. Las partículas muy cercanas a la pared rígida ideal se encuentran quietas, de modo que la condición de borde se puede expresar como

$$\Psi(x_o, t) = 0, \quad (4.24)$$

donde x_o es la posición del extremo. En el momento de la foto, las partículas cercanas a la pared se mueven hacia la pared, por lo que la presión en ese extremo es máxima. Es decir, en el extremo cerrado hay un nodo de desplazamiento y antinodo de presión.

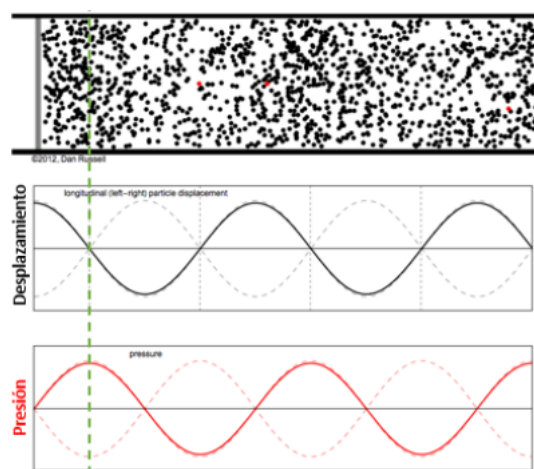


Figura 4.10: Condiciones de borde Forzado- cerrado. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

En el caso de un extremo abierto, como el que se muestra en la figura 4.11, la condición que hay que pedir, es que la presión inmediatamente antes e inmediatamente después del extremo sea la misma, por lo que $p(x_o, t) \sim 0$. De este modo, la variación de presión es nula, por lo que la condición es que

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_o} = 0. \quad (4.25)$$

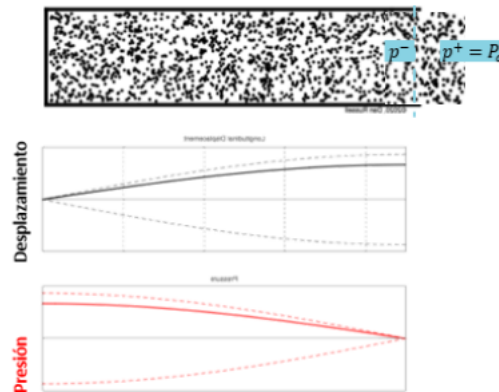


Figura 4.11: Condiciones de borde cerrado-abierto. A la derecha, el extremo está abierto y las presiones en el interior y exterior se igualan. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

Esto corresponde a un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento. En un tubo real, esta condición se cumple aproximadamente en una posición efectiva ligeramente desplazada respecto del extremo geométrico del tubo.

Analicemos ahora el extremo forzado. Podemos suponer que las partículas se mueven igual que el forzante (igual que el piezoeléctrico o igual que el parlante), en cuyo caso la condición será que $\Psi(L, t) = D \cos(\omega t)$, suponemos al extremo forzado en $x = L$. Utilizando esta condición obtenemos los mismos resultados que para la cuerda: $kL = n\pi$ y la función de onda

$$\Psi(x, t) = \frac{D}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.26)$$

Es decir, las resonancias aparecen próximas a las frecuencias naturales correspondientes a una configuración cerrado-cerrado. Sin embargo, también podríamos modelar al parlante suponiendo que impone principalmente una perturbación de presión en el extremo. En ese caso

$$p(L, t) = -K \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=L} = P_D \cos(\omega t). \quad (4.27)$$

A partir de esta condición se obtiene que la amplitud de la onda es

$$A = \frac{-P_D}{Kk \cos(kL)} \quad (4.28)$$

La respuesta aumenta fuertemente cuando $\cos(kL) \rightarrow 0$, es decir, para $k_m = (2m - 1)\pi/2L$, que corresponden a las frecuencias naturales de una configuración cerrado-abierto.

4.2.2. Modos normales en tubos

A partir de las condiciones de borde discutidas en la sección anterior, se pueden obtener los modos normales para tubos con condiciones cerrado-cerrado, cerrado-abierto y abierto-abierto.

Recordemos que, para el desplazamiento longitudinal $\Psi(x, t)$, un extremo cerrado corresponde a un nodo y un extremo abierto a un antinodo. Para la perturbación de presión ocurre lo contrario.

En la Figura 4.12 se muestran esquemáticamente los primeros modos normales para las distintas condiciones de borde.

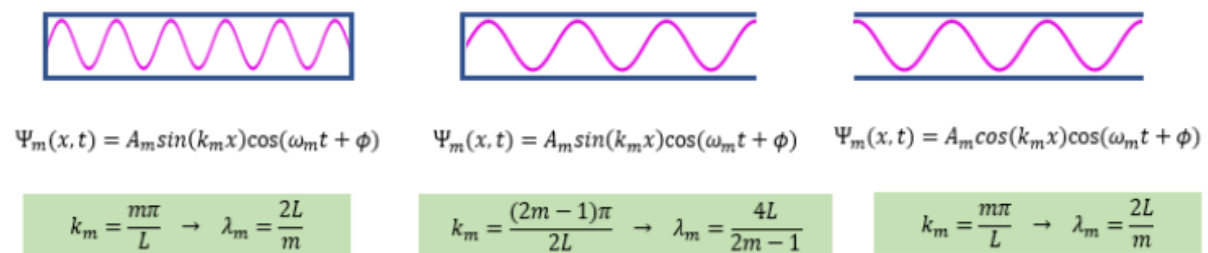


Figura 4.12: Modos normales en tubos, para las condiciones cerrado-cerrado (izquierda), cerrado-abierto (medio), abierto-abierto (derecha)

Tarea: A partir de las condiciones de borde correspondientes, obtener los valores permitidos de k , λ y f para cada una de las configuraciones mostradas en la figura. Comparar los resultados obtenidos para los casos cerrado-cerrado, cerrado-abierto y abierto-abierto.

4.2.3. Experimentando con tubos: el tubo de Kundt

El dispositivo experimental que se empleará en la práctica se muestra en la figura 4.13. Consiste en un tubo de longitud L , que incorpora una regla para medir posiciones dentro del mismo. En un extremo del tubo hay un pistón móvil que actúa como extremo cerrado y permite variar la longitud del mismo. Este se puede remover dejando al tubo con una longitud fija con aquel extremo abierto. Dentro del tubo hay un micrófono móvil con el cual se mide una señal asociada a la perturbación acústica en distintas posiciones del tubo. El micrófono se conecta a un amplificador y luego al osciloscopio para poder medir

la señal. El otro extremo del tubo se encuentra abierto y a una distancia d_o ($d_o \ll L$) de un parlante con el cual se emitirá la señal. El parlante está conectado a un generador de funciones mediante un cable BNC-banana. El generador de funciones a su vez está conectado al osciloscopio para medir la señal emitida. Todas las conexiones salvo las que se indica lo contrario son con cables BNC-BNC. **No superar los 2 Vpp que se mandan al parlante, sino se distorsiona la señal.**

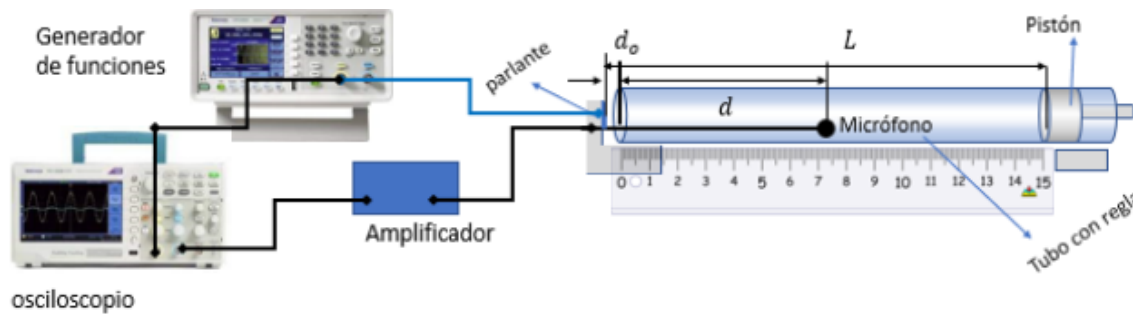


Figura 4.13: Dispositivo experimental que se empleará en la práctica de ondas estacionarias en tubos

Experimental:

- Determinar que mide el micrófono: Presión o desplazamiento. ¿Cómo lo hago? ¿Dónde mido? ¿Qué espero medir?
- Diseñar un experimento para determinar si el parlante fuerza principalmente en presión o en desplazamiento. ¿Qué condición de borde efectiva describe mejor al extremo excitado?

En todas las experiencias siguientes, repetir el experimento con pistón (cerrado), sin pistón (abierto).

- Medir las variaciones de presión o desplazamiento en los modos a lo largo del tubo. ¿Cuántos modos puedo observar? ¿Puedo definir la posición de los nodos? ¿Y de los antinodos? ¿Que error le asigno? ¿Cuál tiene menor error?
- Dejando L fijo, estudiar la dependencia entre la frecuencia ν , la longitud de onda de los modos λ y el número de modos. Pensar como es conveniente medir λ . Usando estos datos, medir la velocidad de propagación del sonido y el largo efectivo del tubo.
- Diseñar un experimento para medir la velocidad de propagación variando la longitud del tubo.
- Determinar la velocidad de propagación a partir del retardo entre una señal impulsiva y la señal medida. Adquirir una señal completa y guardar los datos (Los

vamos a usar pronto!).

g) Comparar la velocidad del sonido obtenida por los distintos métodos.

4.2.4. Velocidad del sonido en un gas

En la sección anterior relacionamos el desplazamiento longitudinal de las partículas del gas con las perturbaciones de presión y densidad:

$$p(x, t) = -K \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}, \quad (4.29)$$

$$\delta \rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.30)$$

Estas relaciones también permiten obtener la velocidad de propagación del sonido en un gas.

¿De qué depende el módulo volumétrico del gas?

Durante la propagación de una onda sonora, distintas regiones del gas sufren compresiones y expansiones periódicas. Estas variaciones ocurren, en general, en tiempos suficientemente cortos como para que el intercambio de calor entre regiones vecinas sea pequeño durante un ciclo de oscilación. Por este motivo, como primera aproximación, las compresiones y expansiones producidas por una onda sonora pueden considerarse procesos adiabáticos.

Para un gas ideal sometido a una transformación adiabática se cumple

$$PV^\gamma = \text{cte}, \quad (4.31)$$

donde

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (4.32)$$

Como la masa del elemento de gas permanece constante, $\rho V = \text{cte}$, por lo que esta relación también puede escribirse como

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}. \quad (4.33)$$

Para pequeñas perturbaciones alrededor del estado de equilibrio (P_0, ρ_0) ,

$$p = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \delta \rho. \quad (4.34)$$

Derivando la ecuación de estado adiabática se obtiene

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}. \quad (4.35)$$

Por lo tanto,

$$p = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \delta \rho. \quad (4.36)$$

Comparando esta expresión con

$$p = -K \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4.37)$$

se obtiene que, para un gas ideal en estas condiciones,

$$K = \gamma P_0. \quad (4.38)$$

Ecuación de movimiento

Consideremos un pequeño elemento de gas de sección transversal A y longitud Δx . La presión sobre la cara izquierda del elemento ejerce una fuerza $P(x, t)A$ hacia la derecha, mientras que sobre la cara derecha actúa una fuerza $P(x + \Delta x, t)A$ hacia la izquierda. Por lo tanto, la fuerza neta es

$$F_x = A [P(x, t) - P(x + \Delta x, t)]. \quad (4.39)$$

Para Δx pequeño,

$$P(x + \Delta x, t) \simeq P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x. \quad (4.40)$$

Como $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ y la presión de equilibrio P_0 es uniforme, se cumple que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.41)$$

Por lo tanto,

$$F_x = -A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x. \quad (4.42)$$

La masa del elemento de gas es, aproximadamente,

$$m = \rho_0 A \Delta x. \quad (4.43)$$

Como $\Psi(x, t)$ representa el desplazamiento longitudinal de las partículas del gas, su aceleración está dada por

$$a = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4.44)$$

Aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$,

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = \rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (4.45)$$

Utilizando

$$p = -K \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4.46)$$

se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (4.47)$$

o

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (4.48)$$

Comparando con la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (4.49)$$

obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (4.50)$$

Como para un gas ideal en una transformación adiabática $K = \gamma P_0$,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (4.51)$$

Dependencia con la temperatura

Para un gas ideal,

$$P_0 V = n R T. \quad (4.52)$$

Utilizando $\rho_0 = m/V$ y $n = m/M$, se obtiene

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{R T}{M}, \quad (4.53)$$

donde M es la masa molar del gas. Por lo tanto,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}. \quad (4.54)$$

Esta expresión muestra que, para un gas dado,

$$v \propto \sqrt{T}, \quad (4.55)$$

donde T es la temperatura absoluta.

Para el aire, alrededor de temperaturas habituales de laboratorio, puede utilizarse aproximadamente

$$v(t) \simeq (331 + 0,60 t) \text{ m/s}, \quad (4.56)$$

donde t está expresada en grados Celsius.

Para pensar: ¿Es consistente la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura obtenida en esta sección con los valores medidos experimentalmente? ¿Qué temperatura del aire debería utilizarse para realizar la comparación?

Capítulo 5

Digitalización y adquisición de señales

En los experimentos que realizamos en el laboratorio medimos magnitudes físicas que varían de manera continua, como una tensión, una intensidad luminosa o una presión acústica. Sin embargo, cuando adquirimos estas señales con un osciloscopio o una computadora, no almacenamos una función continua: obtenemos una cantidad finita de valores numéricos.

El proceso mediante el cual una señal continua se transforma en una secuencia de números se denomina *digitalización*. En este proceso aparecen dos operaciones diferentes: el *muestreo*, que discretiza la variable independiente (por ejemplo, el tiempo), y la *cuantización*, que discretiza los valores de amplitud de la señal. Un ejemplo de señal muestreada y cuantizada se puede observar en la figura 5.1

La cuantización depende de los bits que tenga la placa de adquisición del osciloscopio o del instrumento que estemos usando. Por ejemplo, si nuestra placa es de 12 bits, significa que todo el rango dinámico que puede medir nuestro instrumento ΔV , va a estar dividido en valores digitales $\delta V = \Delta V/2^{12}$. El muestreo de una señal dependiente del tiempo corresponde a tomar datos equiespaciados en un tiempo δt o a una frecuencia de muestreo $f_s = 1/\delta t$ determinada.

Estas dos operaciones introducen limitaciones que debemos conocer para diseñar correctamente una medición.

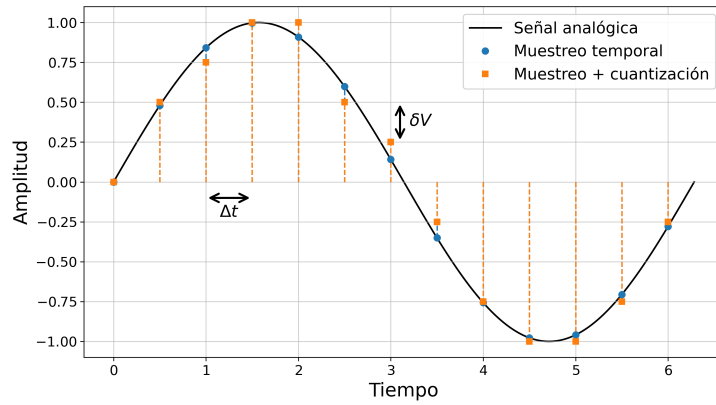


Figura 5.1: Ejemplo de señal analógica (curva negra) luego de ser muestreada temporalmente (puntos azules) y luego de ser cuantizada en voltajes (puntos naranjas).

5.1. Señales analógicas y digitales

Consideremos una señal eléctrica $V(t)$. Idealmente, tanto el tiempo como la amplitud de la señal pueden tomar valores continuos. Decimos entonces que $V(t)$ es una señal analógica.

Un sistema de adquisición digital, en cambio, registra la señal solamente en determinados instantes de tiempo y representa cada valor medido mediante un número perteneciente a un conjunto finito de posibilidades.

De esta forma, una señal continua

$$V(t) \quad (5.1)$$

se transforma en una secuencia de valores

$$\{V_0, V_1, V_2, \dots, V_{N-1}\}. \quad (5.2)$$

Cada uno de estos valores corresponde a la señal medida en un determinado instante de tiempo.

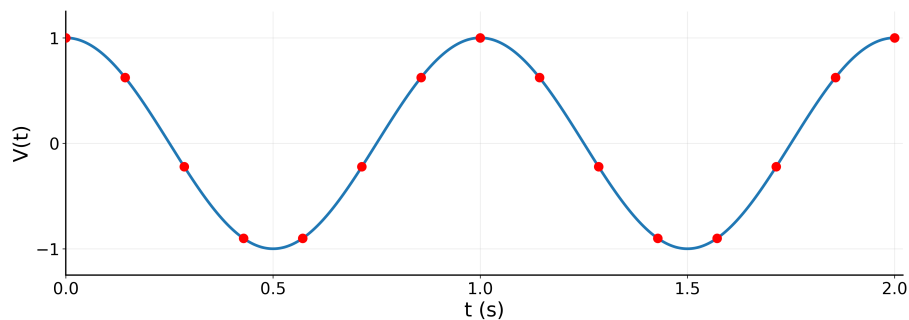


Figura 5.2: Esquema de una señal analógica de 1 Hz y de los valores obtenidos al muestrearla en distintos instantes de tiempo (frecuencia de muestreo 7 Hz).

5.2. Muestreo

Supongamos que adquirimos la señal en intervalos regulares de tiempo δt . Los instantes en los cuales se realiza la medición son

$$t_n = n\delta t, \quad (5.3)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

La señal digitalizada puede escribirse entonces como

$$V_n = V(t_n) = V(n\delta t). \quad (5.4)$$

La cantidad de muestras adquiridas por unidad de tiempo se denomina *frecuencia de muestreo*,

$$f_s = \frac{1}{\delta t}. \quad (5.5)$$

Por ejemplo, si se adquiere una muestra cada

$$\delta t = 1 \mu s, \quad (5.6)$$

la frecuencia de muestreo es

$$f_s = 1 \text{ MHz}. \quad (5.7)$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo, menor será la separación temporal entre mediciones y mayor será la cantidad de información que tendremos acerca de las variaciones rápidas de la señal.

Si adquirimos N puntos separados por un intervalo δt , el tiempo total registrado es aproximadamente

$$\Delta t = N\delta t. \quad (5.8)$$

Por lo tanto, al realizar una adquisición debemos elegir tanto la separación temporal entre puntos como la duración total de la medición.

5.3. Frecuencia de Nyquist y aliasing

Veamos primero el ejemplo de una señal senoidal de 1 Hz muestreada con una frecuencia $f_s = 7 \text{ Hz}$, como se muestra en la Fig. 5.3. Los puntos obtenidos al muestrear la señal no determinan una única función continua. Por esos mismos puntos pasan también señales senoidales de 6 Hz, 8 Hz y 13 Hz, entre otras.

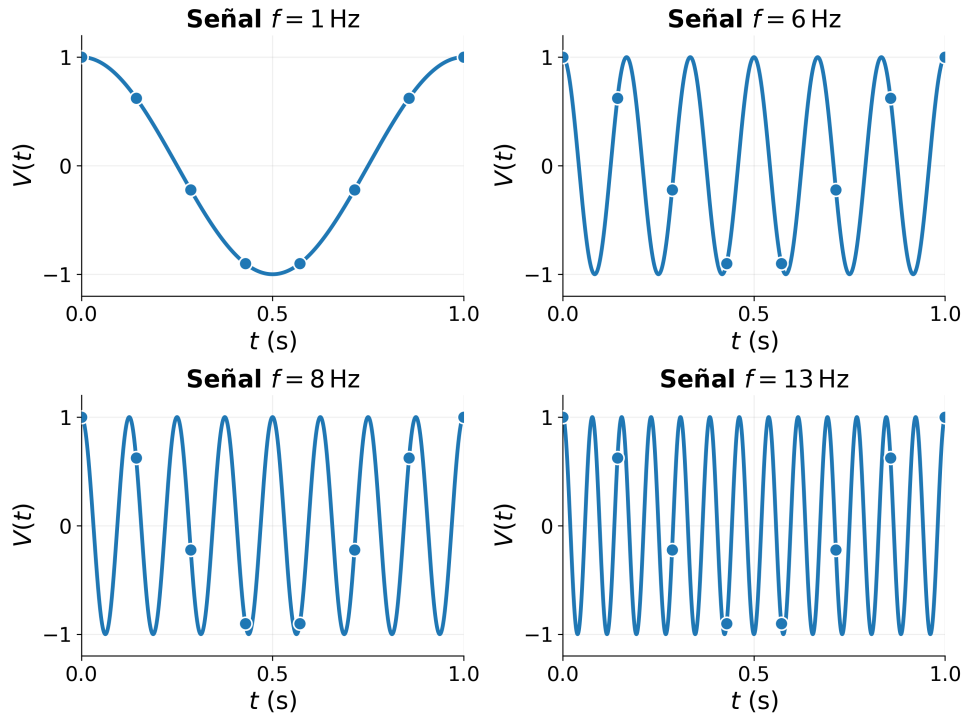


Figura 5.3: Una señal de 1 Hz muestreada con una frecuencia $f_s = 7$ Hz. Las mismas muestras son compatibles con distintas señales senoidales continuas.

En general, para una señal senoidal de frecuencia f , otras frecuencias de la forma

$$f' = |nf_s \pm f|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

pueden producir los mismos valores en los instantes de muestreo.

En el ejemplo anterior, aunque existen muchas señales compatibles con las muestras, todas las frecuencias alternativas son mayores que

$$\frac{f_s}{2} = 3,5 \text{ Hz}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, dentro del intervalo

$$0 \leq f < 3,5 \text{ Hz}, \quad (5.11)$$

la única señal senoidal compatible con las muestras es la de 1 Hz.

Consideremos ahora la misma señal de 1 Hz, pero muestreada con

$$f_s = 4 \text{ Hz}. \quad (5.12)$$

En este caso, las mismas muestras también son compatibles con señales de 3 Hz, 5 Hz, 7 Hz, etc. Sin embargo,

$$\frac{f_s}{2} = 2 \text{ Hz}, \quad (5.13)$$

por lo que la señal de 1 Hz sigue siendo la única compatible con las muestras dentro del intervalo

$$0 \leq f < 2 \text{ Hz.} \quad (5.14)$$

Veamos ahora qué ocurre si disminuimos aún más la frecuencia de muestreo. Supongamos que la misma señal de 1 Hz se muestrea con $f_s = 1,5 \text{ Hz}$. En este caso, las mismas muestras son compatibles con señales de 0,5 Hz, 1 Hz, 2 Hz, 2,5 Hz, etc. Como ahora

$$\frac{f_s}{2} = 0,75 \text{ Hz,} \quad (5.15)$$

la única frecuencia compatible con las muestras dentro del intervalo

$$0 \leq f < 0,75 \text{ Hz} \quad (5.16)$$

es 0,5 Hz, que no es la frecuencia de la señal original.

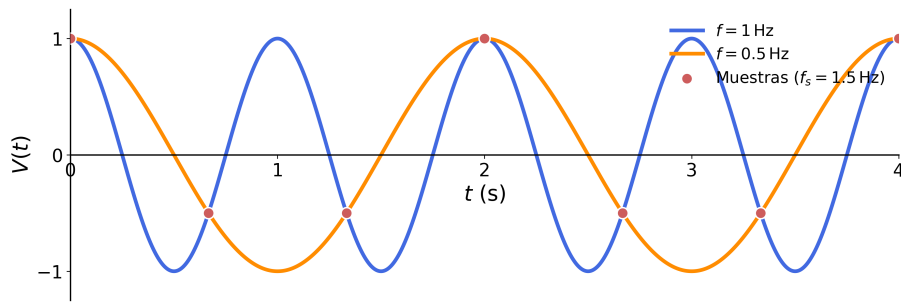


Figura 5.4: Una señal de 1 Hz muestreada con $f_s = 1,5 \text{ Hz}$. Una señal de 0,5 Hz produce exactamente los mismos valores en los instantes de muestreo.

Estos ejemplos muestran que las muestras, por sí solas, no determinan una única señal continua. Sin embargo, para una frecuencia de muestreo f_s dada, si restringimos el análisis a señales senoidales con frecuencias en el intervalo

$$0 \leq f < \frac{f_s}{2}, \quad (5.17)$$

cada frecuencia queda identificada de manera unívoca por sus muestras. El límite superior de este intervalo se denomina *frecuencia de Nyquist* y está dado por

$$f_N = \frac{f_s}{2}. \quad (5.18)$$

Por lo tanto, si esperamos que la señal que queremos medir contenga componentes de frecuencia hasta un valor máximo $f_{\max}$, debemos elegir la frecuencia de muestreo de manera que

$$f_{\max} < f_N. \quad (5.19)$$

Equivalentemente,

$$f_s > 2f_{\max}. \quad (5.20)$$

Esta condición se conoce como *criterio de Nyquist*.

Si una señal contiene componentes con frecuencias mayores que f_N , estas pueden resultar indistinguibles, después del muestreo, de componentes de menor frecuencia. Este fenómeno se denomina *aliasing*. Por ejemplo, en el caso anterior, una señal de 1 Hz muestreada a $f_s = 1,5$ Hz produce exactamente las mismas muestras que una señal de 0,5 Hz. Por lo tanto, dentro del intervalo de Nyquist, la frecuencia de 1 Hz queda representada por un *alias* de 0,5 Hz.

Es importante notar que satisfacer el criterio de Nyquist evita esta ambigüedad para una señal limitada en frecuencia, pero no significa necesariamente que la forma temporal de la señal resulte visualmente bien representada por los puntos muestreados utilizando apenas dos muestras por período. En la práctica, cuando nos interesa observar con detalle la forma de una señal directamente en el osciloscopio, utilizamos una frecuencia de muestreo considerablemente mayor.

Para pensar: Queremos adquirir una señal sinusoidal de 40 kHz. ¿Qué condición debe cumplir la frecuencia de muestreo según el criterio de Nyquist? ¿Sería conveniente utilizar un valor apenas superior a ese límite para observar con detalle la forma de la señal en un osciloscopio? ¿Por qué?

5.4. Cuantización de la amplitud

Hasta ahora discretizamos el tiempo, pero supusimos que la amplitud de la señal podía medirse con precisión arbitraria. Esto tampoco ocurre en un instrumento digital.

La amplitud medida debe convertirse en un número perteneciente a un conjunto finito de valores. Este proceso se denomina *cuantización*.

La unidad básica de información digital es el *bit*, que puede tomar solamente dos valores:

$$0 \quad \text{o} \quad 1. \quad (5.21)$$

Con N_b bits pueden representarse

$$2^{N_b} \quad (5.22)$$

valores diferentes.

Por ejemplo, con 8 bits existen

$$2^8 = 256 \quad (5.23)$$

códigos posibles.

Un conjunto ordenado de 8 bits se denomina *byte*.

Si un conversor de N_b bits mide tensiones dentro de un rango $V_{\min}$ a $V_{\max}$, la separación aproximada entre niveles de cuantización es

$$\Delta V \simeq \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^{N_b}}. \quad (5.24)$$

Cuanto mayor sea el número de bits, menor será ΔV y mayor será la resolución con la cual podemos representar la amplitud de la señal.

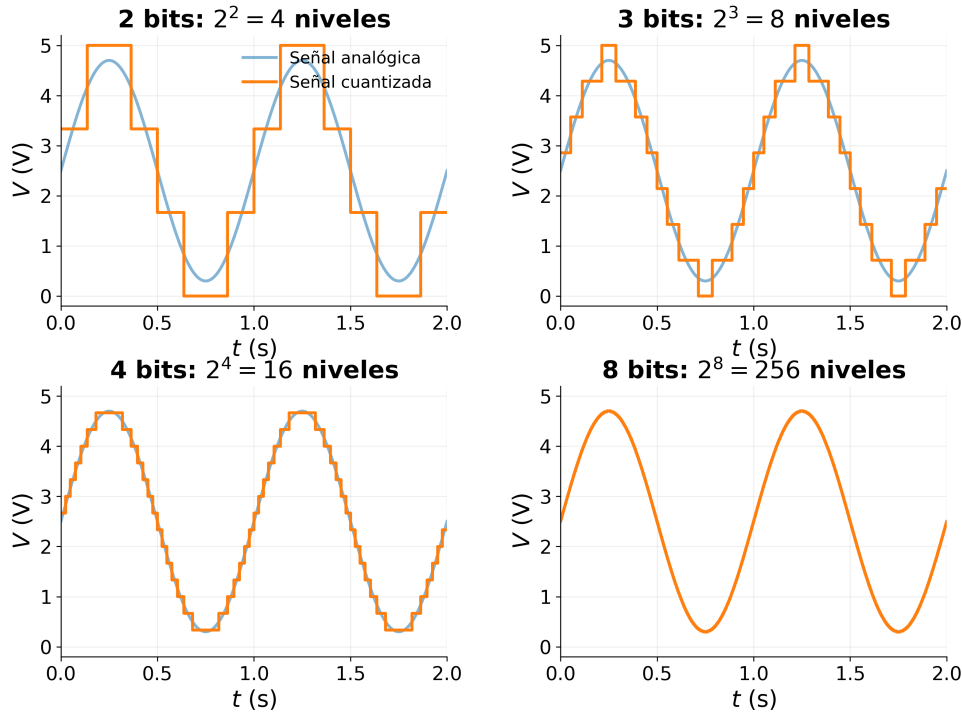


Figura 5.5: Cuantización de una señal utilizando distintos números de bits.

Supongamos que queremos digitalizar una tensión de 2 V utilizando un conversor de 8 bits cuyo rango de entrada está entre 0 y 5 V. Con 8 bits existen $2^8 = 256$ códigos posibles, numerados entre 0 y 255. El ancho de cada intervalo de cuantización es

$$\Delta V = \frac{5 \text{ V}}{256} \simeq 19,5 \text{ mV}. \quad (5.25)$$

Para una tensión $V_a = 2 \text{ V}$,

$$\frac{V_a}{\Delta V} = \frac{2 \text{ V}}{19,5 \text{ mV}} \simeq 102,4. \quad (5.26)$$

Por lo tanto, esta tensión corresponde aproximadamente al código decimal

$$N = 102, \quad (5.27)$$

que en base binaria se escribe

$$102_{10} = 01100110_2. \quad (5.28)$$

Por lo tanto, el valor medido de 2 V queda representado digitalmente por la secuencia

$$0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0. \quad (5.29)$$

Es importante distinguir el valor de la magnitud física que estamos midiendo de los niveles eléctricos utilizados para representar los bits. Por ejemplo, en un determinado circuito el cero lógico podría representarse mediante un nivel cercano a 0 V y el uno lógico mediante un nivel alto de tensión. Estos niveles eléctricos codifican la información digital y no corresponden directamente a la tensión original de 2 V.

5.5. Frecuencia de muestreo, número de bits y cantidad de datos

Cada muestra adquirida contiene un cierto número de bits. Si adquirimos una señal con una frecuencia de muestreo f_s y utilizamos N_b bits por muestra, la cantidad de información generada por unidad de tiempo aumenta tanto al aumentar f_s como al aumentar N_b .

Por ejemplo, ignorando por el momento información adicional necesaria para la transmisión, una señal adquirida a 1 MHz con 8 bits por muestra produce del orden de

$$8 \times 10^6 \text{ bits/s}. \quad (5.30)$$

Esto muestra que al aumentar la resolución temporal o la resolución en amplitud también aumenta la cantidad de datos que debemos almacenar o transmitir.

La cantidad de bits transmitidos por unidad de tiempo se denomina *bit rate* y se expresa habitualmente en bits por segundo.

5.6. ¿Qué estamos eligiendo cuando configuramos un osciloscopio?

Cuando utilizamos un osciloscopio digital, muchas de las decisiones que tomamos al configurar la medición están relacionadas con los conceptos discutidos en este capítulo.

La escala temporal, la frecuencia de muestreo y la cantidad de puntos adquiridos determinan qué tan rápidamente podemos observar variaciones en la señal y durante cuánto tiempo podemos registrarla.

Por otro lado, el rango vertical utilizado y el número de bits del conversor determinan la resolución con la cual podemos distinguir diferentes amplitudes. Conviene elegir el rango vertical de modo que la señal ocupe una fracción importante de la escala disponible, sin saturar, ya que de este modo se aprovecha mejor la resolución del conversor.

Por lo tanto, antes de adquirir una señal deberíamos preguntarnos:

- ¿Cuál es la frecuencia máxima que espero encontrar?
- ¿Qué frecuencia de muestreo necesito?
- ¿Cuántos puntos por período quiero medir?
- ¿Durante cuánto tiempo necesito adquirir la señal?
- ¿Cuál es el rango de amplitudes esperado?
- ¿Qué resolución en amplitud necesito?

Estas decisiones forman parte del diseño del experimento y no deberían dejarse únicamente en manos de la configuración automática del instrumento.

5.7. De la señal digitalizada a sus componentes de frecuencia

Hasta ahora pensamos una señal como una sucesión de valores medidos en función del tiempo. Sin embargo, también podemos preguntarnos qué frecuencias contiene esa señal.

Por ejemplo, una señal sinusoidal contiene una única frecuencia, mientras que una señal cuadrada necesita la superposición de muchas señales sinusoidales de diferentes frecuencias para reproducir su forma.

Esta forma alternativa de describir una señal será el tema del próximo capítulo. Para hacerlo utilizaremos las series y transformadas de Fourier.

Capítulo 6

Composición de señales

En Física 2 estudiamos la propagación de ondas en sistemas que soportan modos normales. Vimos que, debido al **principio de superposición**, una solución general puede escribirse como una combinación lineal de esos modos. Las amplitudes y fases de cada componente se determinan a partir de las condiciones iniciales y de contorno.

En muchos de esos problemas, las funciones seno y coseno que aparecen en los modos normales forman una base adecuada para representar la condición inicial. Esto conduce naturalmente a las **series de Fourier**, que permiten expresar una función periódica como una superposición de componentes armónicas.

En líneas generales, para hallar la solución se propone que la solución general a tiempo inicial es una superposición de modos normales. Luego, para hallar las amplitudes y fases de cada término de la superposición usamos la condición inicial expresada en una base Fourier (que, elegida apropiadamente, coincide con la de los modos normales), e igualamos la solución general en el tiempo inicial a la condición inicial.

Para señales no periódicas, o cuando el contenido en frecuencias forma un continuo, esta descripción se generaliza mediante la **transformada de Fourier**. En ambos casos, la idea central es la misma: describir una señal a partir de las componentes armónicas que la forman.

¡Atención! Si no recordás estos conceptos de Física 2, podés leer primero la Sección 6.1, donde repasamos brevemente las series y transformadas de Fourier y un ejemplo de modos normales, y luego retomar desde aquí.

Esta forma de representar una señal no es exclusiva de los problemas de ondas. Se utiliza ampliamente en distintas áreas de la física y resulta particularmente útil para entender cómo se generan, transmiten y miden señales en sistemas reales.

Consideremos, por ejemplo, una señal cuadrada periódica como la que puede generar

un generador de funciones. Aunque su forma temporal no es sinusoidal, puede representarse mediante una superposición de señales armónicas de distintas frecuencias. La frecuencia más baja corresponde a la frecuencia fundamental y las restantes aparecen en determinados múltiplos de ella, que denominamos armónicos.

La forma temporal de la señal depende de cuántas de estas componentes estén presentes. Una onda cuadrada ideal, con flancos perfectamente verticales, requiere una cantidad infinita de armónicos. Si solamente se conservan algunas componentes, los flancos se suavizan y la señal deja de ser perfectamente cuadrada.

Esto resulta particularmente importante porque ningún sistema físico puede generar, transmitir o detectar un rango infinito de frecuencias. Todo instrumento posee un **ancho de banda** finito, es decir, un intervalo limitado de frecuencias para las cuales su respuesta es apreciable. Por lo tanto, cuando una señal atraviesa un sistema real, algunas de sus componentes espectrales pueden ser atenuadas y su forma temporal puede modificarse.

Para una señal periódica, podremos analizar este problema mediante su serie de Fourier: para reproducir adecuadamente su forma, el sistema deberá transmitir la frecuencia fundamental y un número suficiente de armónicos. Para señales no periódicas, como un pulso aislado, utilizaremos la transformada de Fourier y hablaremos de un espectro continuo de frecuencias.

Esta relación entre la descripción temporal y el contenido en frecuencias será uno de los ejes de este capítulo. La utilizaremos tanto para sintetizar señales como para estudiar cómo responde un sistema a distintas frecuencias y qué información podemos obtener a partir de las señales medidas.

¡Analicemos estas ideas haciendo experimentos!

6.1. Recordando algunas cosas estudiadas en Física 2

6.1.1. La serie y la transformada de Fourier

Consideremos una función periódica $S(x)$ de período L . Definimos

$$k_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad (6.1)$$

de modo que las componentes de Fourier corresponden a los números de onda

$$k_n = nk_0 = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.2)$$

La base de Fourier

$$\{1, \cos(k_n x), \sin(k_n x)\}$$

permite escribir, bajo condiciones suficientemente generales, una función periódica como una combinación de senos y cosenos.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)]. \quad (6.3)$$

Los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx, \quad (6.4)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx. \quad (6.5)$$

En la Fig. 6.1 se pueden observar las series de Fourier de diversas ondas periódicas.

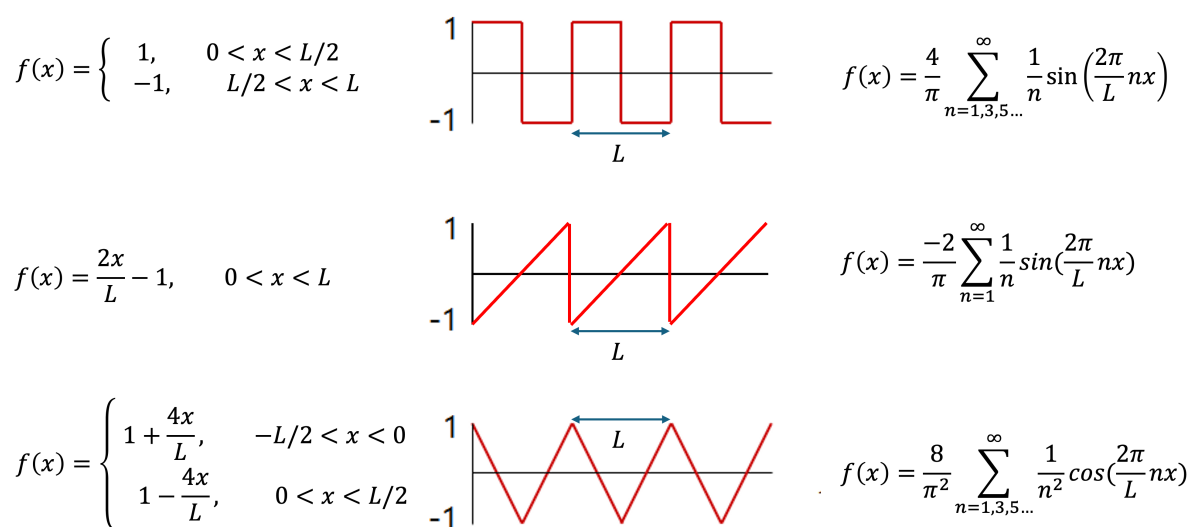


Figura 6.1: Series de Fourier de ondas periódicas cuadrada, diente de sierra y triangular.

Nota: Todo este razonamiento puede aplicarse también a una señal periódica en el tiempo. En ese caso reemplazamos $x \rightarrow t$ y utilizamos frecuencias $\nu_n = n\nu_0$, o, equivalentemente, $\omega_n = n\omega_0$.

Tarea: Usando algún lenguaje de programación, graficar las series de Fourier de la Fig.6.1 truncando la suma en un número finito N de términos.

¿Qué sucede cuando N aumenta? ¿Cuántos términos son necesarios para que la serie reproduzca razonablemente la función? ¿Cómo podrías definir un error entre la función original y la serie truncada? En las funciones que presentan discontinui-

dades, ¿qué sucede cerca de ellas al aumentar N ? ¿Desaparecen completamente las oscilaciones?

Así como existe una base de senos y cosenos, dado que la exponencial compleja es una combinación lineal de senos y cosenos ($e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$), también podemos definir la serie de Fourier en una base exponencial compleja como

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ik_n x}, \quad (6.6)$$

donde $k_n = \frac{2\pi n}{L}$, y los coeficientes de Fourier están dados por

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L S(x) e^{-ik_n x} dx. \quad (6.7)$$

Si $S(x)$ es una función real, los coeficientes correspondientes a valores positivos y negativos de n no son independientes, sino que satisfacen $C_{-n} = C_n^*$. Por esta razón, en la representación compleja aparecen componentes con k positivo y negativo, aunque la función original sea real.

En una serie de Fourier, las componentes espectrales se encuentran separadas por

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}.$$

A medida que aumenta L , esta separación disminuye. En el límite de una función no periódica, que podemos pensar formalmente como $L \rightarrow \infty$, los valores permitidos de k forman un continuo y la suma sobre componentes discretas se transforma en una integral. Esto conduce naturalmente a la transformada de Fourier. Normalmente esto es útil para señales no periódicas o sistemas no confinados.

La transformada de Fourier de una función que depende de la coordenada espacial $f(x)$ se define como

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (6.8)$$

La función original puede recuperarse mediante la transformada inversa,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (6.9)$$

De manera análoga, para una función temporal $f(t)$ definimos la transformada de Fourier en función de la frecuencia ν como

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (6.10)$$

y la transformada inversa como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (6.11)$$

La frecuencia ν está expresada en Hz y se relaciona con la frecuencia angular mediante

$$\omega = 2\pi\nu.$$

En la Fig. 6.2 se pueden observar las transformadas de algunas funciones que solemos usar, en función de la frecuencia angular (ω); recordemos que $\omega = 2\pi\nu$.

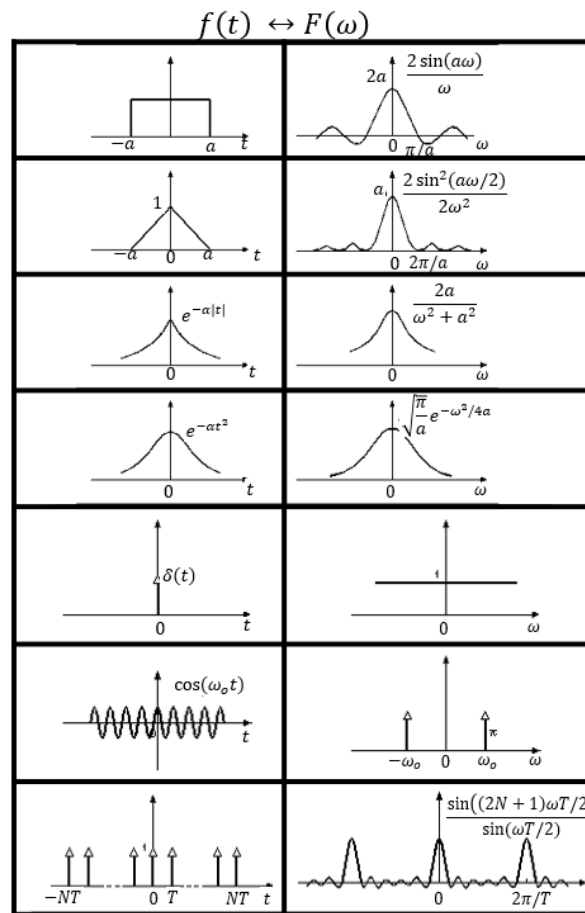


Figura 6.2: Transformadas de Fourier de algunas funciones y señales de uso frecuente.

Pensar: Podrías asociar las transformadas de la Fig. 6.2 a fenómenos que estudiaste en Física 2?

Veamos ahora ejemplos en donde usaron transformadas y series en Física 2.

6.1.2. Serie de Fourier y condiciones iniciales en un sistema acotado

Vamos a recordar brevemente un ejemplo estudiado en Física 2. Si necesitás más detalles, podés consultar el apunte de esa materia [?].

En esta sección seguiremos el mismo procedimiento utilizado en Física 2 para resolver el problema de condiciones iniciales: extenderemos periódicamente la condición inicial, elegiremos la simetría adecuada para representarla mediante una serie de Fourier y compararemos luego sus coeficientes con las amplitudes de los modos normales.

Tomemos como ejemplo una cuerda de longitud L con sus dos extremos fijos. Tal como vimos en la Sección 4.1.2, uno de sus modos normales puede escribirse como

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (6.12)$$

con $k_n = n\pi/L$. La solución más general es una superposición de modos normales

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right) \quad (6.13)$$

en donde las constantes A_n y φ_n están determinadas por las condiciones iniciales. Vamos a suponer que la cuerda parte del reposo, es decir $\dot{\Psi}(x, 0) = 0$, de una posición inicial dada por la expresión

$$\tilde{\Psi}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_o & \text{si } \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \quad (6.14)$$

Si pedimos que la cuerda parta del reposo en la expresión 6.13, obtenemos que

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin(k_n x) \sin(\phi_n) = 0. \quad (6.15)$$

Una elección que satisface esta condición es $\phi_n = 0$ para todos los modos; un eventual cambio de signo puede absorberse en el coeficiente A_n .

La condición inicial para la deformación implica que debe cumplirse

$$\Psi(x, 0) = \tilde{\Psi}(x, 0).$$

La solución del problema está escrita como una superposición de funciones seno, mientras que la condición inicial $\tilde{\Psi}(x, 0)$ está especificada como una función por tramos. Para poder comparar ambas expresiones término a término, debemos desarrollar la condición inicial en una serie de Fourier

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \tilde{\Psi}(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nk_0 x) + b_n \sin(nk_0 x)]. \quad (6.16)$$

Dado que una serie de Fourier representa una función periódica, debemos construir una extensión periódica de $\tilde{\Psi}(x, 0)$. La pregunta es entonces qué período debe tener esta extensión y qué condiciones debe cumplir.

En primer lugar, se tienen que cumplir las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$. En segundo lugar, queremos que el desarrollo de Fourier pueda compararse término a término con el desarrollo en modos normales. Para ello, ambos deben contener los mismos números de onda. Los modos normales de la cuerda tienen

$$k_p = \frac{p\pi}{L},$$

y, por lo tanto, sus longitudes de onda son

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L}{p}. \quad (6.17)$$

En particular, el modo fundamental tiene longitud de onda $\lambda_1 = 2L$, y las restantes longitudes de onda son fracciones enteras de ésta. Elegimos entonces para la extensión periódica de $\tilde{\Psi}(x, 0)$ una longitud de onda igual a la fundamental, $\Lambda = \lambda_1 = 2L$. Como $k_0 = 2\pi/\Lambda$, resulta $k_0 = \frac{\pi}{L}$, de modo que las funciones seno y coseno de la serie de Fourier tienen los mismos números de onda que los modos normales de la cuerda. Entonces, la igualdad entre series queda

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \tilde{\Psi}(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (6.18)$$

Ya conocemos el período de la extensión. Falta determinar cómo extender la función fuera del intervalo $0 < x < L$. En el desarrollo en modos normales aparecen únicamente funciones seno. Para poder identificar ambos desarrollos término a término necesitamos, por lo tanto, que todos los coeficientes de los cosenos sean nulos, $a_n = 0$. Esto se logra construyendo una extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$, como se muestra en la Fig. 6.3. La extensión resultante tiene período $2L$, satisface las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$ y contiene únicamente términos seno en su serie de Fourier.

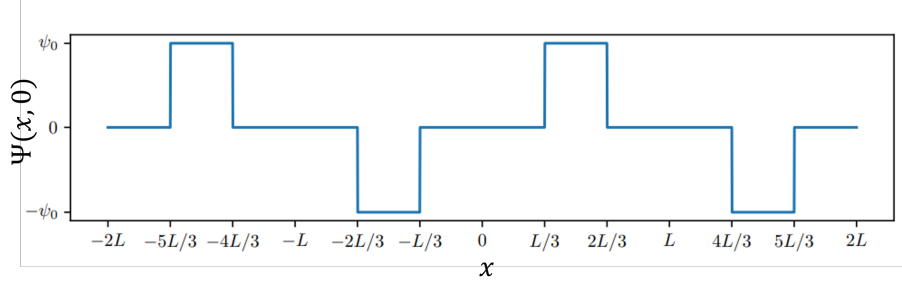


Figura 6.3: Extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$.

Solo queda ahora resolver las integrales de las ecuaciones 6.4 y 6.5 tomando como período $2L$, es decir:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \tilde{\Psi}(x, 0) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (6.19)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \tilde{\Psi}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (6.20)$$

a partir de las que se obtiene

$$a_n = 0 \quad (6.21)$$

$$b_{2n} = 0 \quad (6.22)$$

$$b_{2p-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right). \quad (6.23)$$

Debido a la simetría de la condición inicial, los coeficientes correspondientes a los modos pares se anulan. Por lo tanto, para esta condición inicial particular solamente se excitan los modos normales impares. Comparando ambos desarrollos (eq. 6.18), se obtiene

$$A_{2p-1} = b_{2p-1}, \quad A_{2p} = 0. \quad (6.24)$$

Por lo tanto

$$\Psi(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) \sin\left(\frac{(2p-1)\pi x}{L}\right) \cos(\omega_{2p-1}t) \quad (6.25)$$

Este resultado muestra que la condición inicial determina qué modos normales se excitan y con qué amplitud. En este ejemplo particular, la simetría de la deformación inicial hace que los coeficientes correspondientes a los modos pares se anulen, por lo que la evolución temporal resulta de la superposición de los modos impares.

6.1.3. Ejemplos del uso de la transformada de Fourier en óptica

Observando la Fig. 6.2, podemos recordar varios problemas estudiados en óptica en Física 2 en los cuales aparece naturalmente la transformada de Fourier.

Recordar que aunque en la figura las transformadas están escritas para una señal temporal, la misma operación puede aplicarse a una distribución espacial. En ese caso, la correspondencia es $t \longleftrightarrow x, \omega \longleftrightarrow k_x$, donde k_x representa una frecuencia espacial angular.

1. Difracción por una rendija.

En la aproximación de Fraunhofer, el campo difractado en el campo lejano es proporcional a la transformada de Fourier de la función de apertura:

$$E(k_x) \propto \mathcal{F}\{A(x)\}. \quad (6.26)$$

Para una rendija rectangular, la transformada de Fourier tiene forma de seno cardinal (*sinc*). La intensidad observada es proporcional al módulo cuadrado del campo,

$$I(k_x) \propto |E(k_x)|^2, \quad (6.27)$$

por lo que el patrón de intensidad tiene forma sinc^2 .

2. Interferencia de N fuentes puntuales.

Consideremos N fuentes puntuales igualmente espaciadas una distancia d . La distribución espacial de las fuentes puede representarse mediante una suma finita de deltas de Dirac. En campo lejano, el campo resultante está relacionado con la transformada de Fourier de esta distribución.

Los máximos principales aparecen para

$$k_x = \frac{2\pi m}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.28)$$

o, utilizando $k_x = k \sin \theta$,

$$d \sin \theta = m\lambda. \quad (6.29)$$

Al aumentar el número de fuentes N , las posiciones de los máximos principales no cambian, pero estos se hacen más angostos.

3. Red de difracción.

Una red real está formada por N rendijas de ancho finito. En este caso, el campo difractado puede interpretarse como el producto entre el campo de difracción producido por una rendija individual y el término de interferencia correspondiente a las N rendijas:

$$E_{\text{red}}(k_x) = E_{\text{rendija}}(k_x) E_N(k_x). \quad (6.30)$$

Por lo tanto, la intensidad resulta

$$I_{\text{red}}(k_x) = I_{\text{rendija}}(k_x) I_N(k_x). \quad (6.31)$$

El patrón de interferencia producido por las N rendijas queda así modulado por la envolvente de difracción correspondiente a una única rendija.

Estos ejemplos muestran que la transformada de Fourier no sólo permite analizar el contenido temporal en frecuencias de una señal. También permite describir su contenido en frecuencias espaciales y aparece naturalmente en problemas de propagación, interferencia y difracción.

6.1.4. Sintetizando señales periódicas

Sabemos que, en general, si la señal es periódica podemos escribirla como una suma de señales armónicas a partir de la serie de Fourier. Tomemos el ejemplo particular de la señal cuadrada (ustedes en clase pueden tomar la que más les interese). Una señal periódica cuadrada de amplitud A cuya frecuencia es ν_o como la que se muestra en la figura 6.4, puede ser representada por la serie de Fourier cuyos términos corresponden a múltiplos impares de la frecuencia fundamental:

$$S(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \sin(2\pi\nu_o t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi(3\nu_o)t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi(5\nu_o)t) + \dots \right\}. \quad (6.32)$$

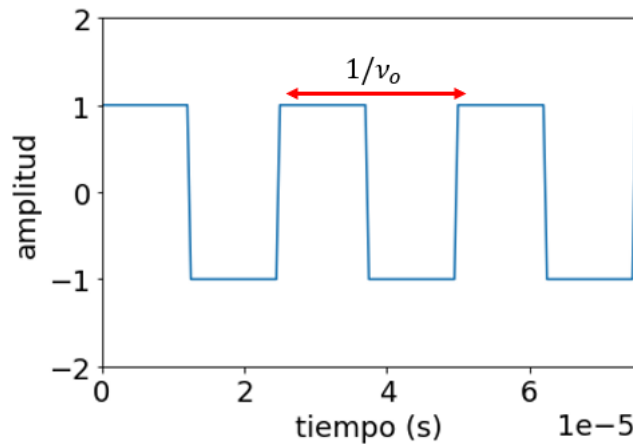


Figura 6.4: Señal periódica cuadrada de amplitud A y frecuencia ν_o .

Importante: Observar que las amplitudes relativas de los armónicos no dependen de ν_0 :

$$A_m = \frac{4A}{\pi(2m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Al cambiar ν_0 no cambian estos coeficientes, pero sí cambian las frecuencias en las que aparecen las componentes espectrales, $\nu_m = (2m+1)\nu_0$.

En la figura 6.5(a) se puede observar la dependencia temporal de la señal y los primeros términos de la serie de Fourier. En la figura 6.5(b) se muestra el **espectro de amplitud**; es decir, los coeficientes de la serie de Fourier en función de la frecuencia, considerando solamente las frecuencias positivas. Se observa que, a medida que aumenta el número de armónico, su amplitud disminuye como $1/(2m+1)$.

Si bien la serie contiene infinitos términos, un número finito de armónicos permite obtener una aproximación cada vez mejor de la señal. En la figura 6.6 se muestra la reconstrucción de la señal considerando $N = 1$ y $N = 10$ términos de la serie de Fourier.

Al aumentar el número de armónicos incluidos, los flancos de la señal se hacen cada vez más abruptos. Una señal cuadrada ideal, con discontinuidades perfectamente verticales, requeriría un número infinito de componentes de frecuencia.

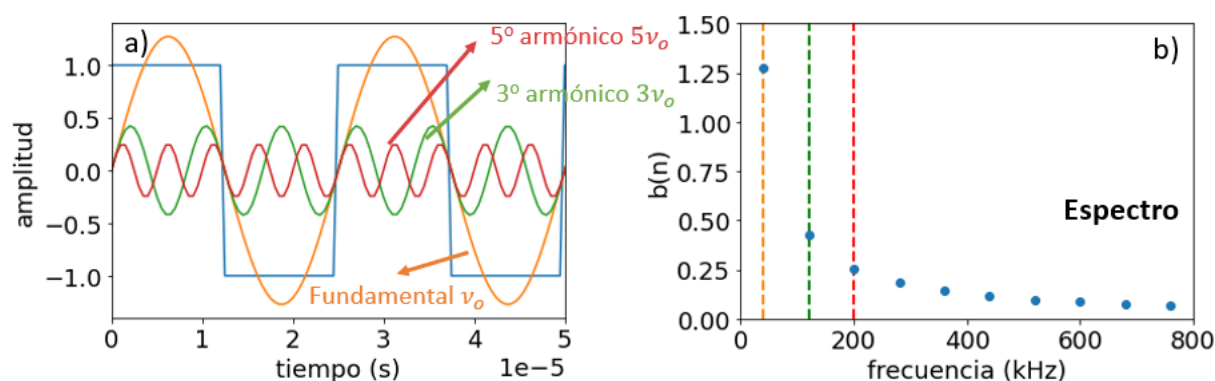


Figura 6.5: (a) Señal cuadrada (en azul) y los primeros tres términos de su serie de Fourier correspondientes al modo fundamental (amarillo), tercer (verde) y quinto (rojo) armónico. (b) Espectro de amplitud de la señal cuadrada, considerando las frecuencias positivas.

Ejercicio previo a la clase: Programar la serie de Fourier y graficarla para distintos valores de N . Estimar numéricamente el error de aproximación y definir cuántos términos es razonable tomar para tener una buena aproximación de la señal. Describir el criterio elegido.

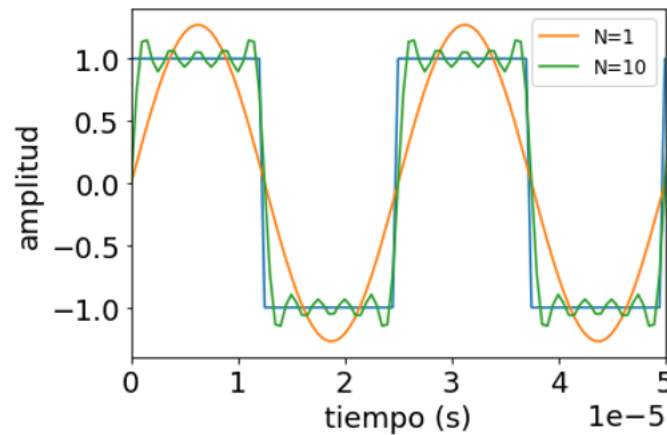


Figura 6.6: Aproximación a la señal cuadrada (azul) tomando $N=1$ (amarillo) y $N=10$ (verde) términos de la serie de Fourier.

Tal como se mencionó en la introducción de este capítulo, una señal periódica puede representarse como una superposición de componentes armónicas. Cuando esta señal es generada, transmitida o medida por un sistema real, su ancho de banda finito limita las componentes espectrales que pueden reproducirse sin una atenuación significativa.

Como ejemplo, consideremos la señal de la Fig. 6.6, cuya frecuencia fundamental es $\nu_0 = 40$ kHz. Como se mencionó anteriormente, el término número N de la serie corresponde al armónico $\nu_N = (2N - 1)\nu_0$. Supongamos, como primera aproximación, que el sistema por el que se transmite esta señal tiene una respuesta en frecuencia constante hasta 800 kHz y que las componentes de frecuencia superiores son fuertemente atenuadas. La componente de mayor frecuencia por debajo de 800 kHz corresponde al décimo término de la serie, $\nu_{10} = 19\nu_0 = 760$ kHz, es decir, al armónico 19 de la frecuencia fundamental.

De este modo, podrían transmitirse aproximadamente los primeros diez términos de la serie, y la señal resultante tendría una forma similar a la mostrada en la Fig. 6.6 para $N = 10$.

Para pensar y experimentar:

Experimento 1: Observar en el osciloscopio el detalle de una onda cuadrada generada por el generador de funciones.

- ¿Cuál es el ancho de banda del generador de funciones? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el ancho de banda del osciloscopio? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el contenido espectral de la señal que estamos midiendo?
- ¿Quién lo limita: el osciloscopio o el generador de funciones?
- ¿Cómo cambia la señal medida conforme aumentamos la frecuencia fundamental?

6.2. Sintonizando señales con los piezoeléctricos

En la sección anterior vimos que una señal periódica puede descomponerse en componentes armónicas de distintas frecuencias. Veamos ahora cómo responde el par emisor-receptor cuando cada una de esas componentes atraviesa el sistema.

Vimos que, al alimentar al emisor con una señal sinusoidal de amplitud A_E , en el receptor se mide una señal de la misma frecuencia cuya amplitud $A_R(\nu)$ depende de la frecuencia de alimentación. Durante el barrido en frecuencia mantenemos A_E constante, por lo que la curva $A_R(\nu)$ caracteriza directamente la respuesta en amplitud del par emisor-receptor.

También podemos definir una respuesta relativa en amplitud como

$$T(\nu) = \frac{A_R(\nu)}{A_E}.$$

Como A_E se mantiene constante, $T(\nu)$ y $A_R(\nu)$ tienen la misma dependencia con la frecuencia y difieren únicamente en un factor de escala.

Vemos entonces que, si la frecuencia de alimentación se encuentra cerca del máximo de la respuesta (curva azul en la Fig.6.7), la amplitud medida en el receptor será mucho mayor que para una señal cuya frecuencia se encuentre en las colas de la misma (curva verde).

Podemos caracterizar el ancho de la resonancia mediante el factor de calidad

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu},$$

donde ν_{res} es la frecuencia de resonancia y $\Delta\nu$ es el ancho entre los puntos de media potencia. Como la potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud, en una curva de amplitud estos puntos corresponden a

$$A_R(\nu) = \frac{A_{R,\text{max}}}{\sqrt{2}}.$$

Cuanto menor sea el ancho de la resonancia en relación con su frecuencia central, mayor será el valor de Q y mayor será la selectividad en frecuencia del sistema.

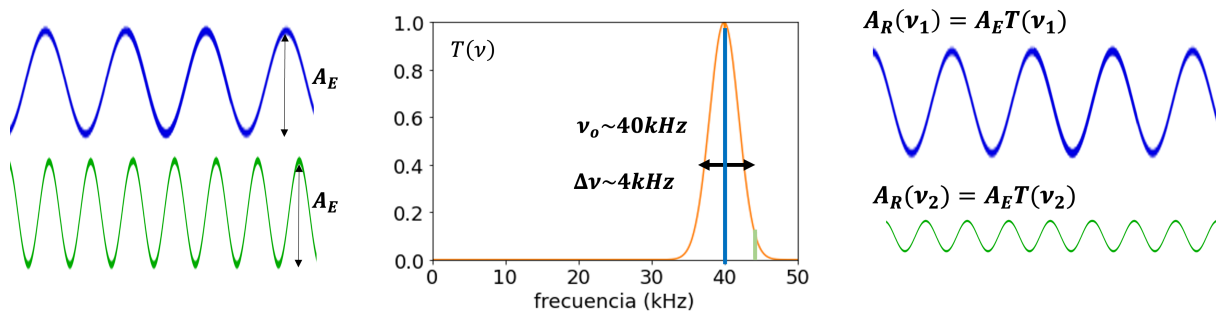


Figura 6.7: Izquierda: dos ejemplos de señales sinusoidales de distinta frecuencia con las cuales se alimenta al par emisor-receptor. Medio: respuesta en amplitud del par emisor-receptor. La frecuencia de la onda azul se encuentra cerca del máximo de la respuesta, mientras que la de la onda verde se encuentra en una de sus colas. Derecha: señal de respuesta para cada excitación. Notar que, para la excitación correspondiente a la onda azul, la amplitud medida en el receptor es mucho mayor que para la correspondiente a la onda verde.

Para pensar

¿Podemos pensar al piezoeléctrico como un filtro en frecuencias? (ver Fig. 6.7)
Explicar. ¿Cómo debería ser Q para sintonizar las frecuencias con mayor precisión?

Cada una de las componentes armónicas de una señal cuadrada excita al par emisor-receptor de acuerdo con su respuesta en amplitud. Si llamamos A_m a la amplitud del armónico de frecuencia ν_m , la amplitud medida en el receptor asociada a esa componente será proporcional a

$$A_{R,m} \propto T(\nu_m)A_m.$$

Por lo tanto, si la respuesta del par emisor-receptor es suficientemente angosta, las componentes cercanas a su frecuencia de resonancia serán detectadas con mayor amplitud que las restantes. En este sentido, el piezoeléctrico puede utilizarse como un filtro para seleccionar componentes de una señal periódica.

Para pensar (antes de la clase) y experimentar (en clase):

Experimento 2: Alimentar al piezoeléctrico emisor con una señal cuadrada. La frecuencia fundamental de la señal cuadrada la podemos cambiar libremente. ¿Qué se espera medir en el piezoeléctrico receptor? ¿Qué pasa cuando cambiamos la fundamental?

Para responder esto podemos hacernos algunas preguntas que motiven el experimento. Aquí van algunos ejemplos, pero ¿qué otras preguntas se te ocurren?

Para una frecuencia fundamental ν_0 dada:

¿Cómo es la separación entre las frecuencias de los armónicos de la señal cuadrada respecto del ancho de la campana de resonancia?

Qué se mide en el receptor si la frecuencia de la señal cuadrada es:

- igual a la de resonancia del PE
- igual a la de resonancia sobre un número entero impar
- igual a la de resonancia sobre un número entero par
- distinta a cualquiera de esas opciones

Si diferentes armónicos se hacen coincidir sucesivamente con la misma frecuencia de resonancia del PE,

¿cómo se relacionan las amplitudes medidas en el receptor con los coeficientes de la serie de Fourier?

¿Cómo utilizarías el piezoeléctrico para medir los coeficientes de la serie de Fourier?

¿Puedo reconstruir la señal empleando esos coeficientes de Fourier?

Explicar... ¡y hacerlo!

6.3. Respuesta temporal de un sistema

En todos los casos que vimos hasta ahora, el par emisor-receptor fue alimentado con señales periódicas y, por lo tanto, con un espectro de frecuencias discreto. Supongamos ahora que lo alimentamos con una señal no periódica cuyo espectro es continuo y cubre el rango de frecuencias en el que responde el par emisor-receptor. Imaginemos, además, que dentro de ese rango el espectro de amplitud de la señal de alimentación es aproximadamente plano; es decir, que todas sus componentes espectrales tienen aproximadamente la misma amplitud. En la figura 6.8 se muestran algunas de las señales incluidas en la señal de alimentación en este experimento imaginario. Como vimos anteriormente, cada componente armónica será detectada con una amplitud determinada por la respuesta en amplitud $T(\nu)$ del par emisor-receptor. Por lo tanto, las componentes cercanas al máximo de la resonancia producirán una respuesta mayor que aquellas ubicadas en las colas. La señal medida en el receptor será la superposición de todas estas contribuciones.

Nota: Por el momento estamos considerando solamente amplitudes. En general, un sistema también puede introducir un cambio de fase diferente para cada frecuencia.

-¿Estás de acuerdo entonces con que, si conocemos el espectro de la señal de alimentación y analizamos el espectro de la señal medida en el receptor, podemos obtener información sobre la respuesta en frecuencia del par emisor-receptor? ¿Cómo lo harías?

-¿Qué ocurriría, en particular, si el espectro de amplitud de la señal de alimentación fuera aproximadamente constante en todo el rango de la resonancia?

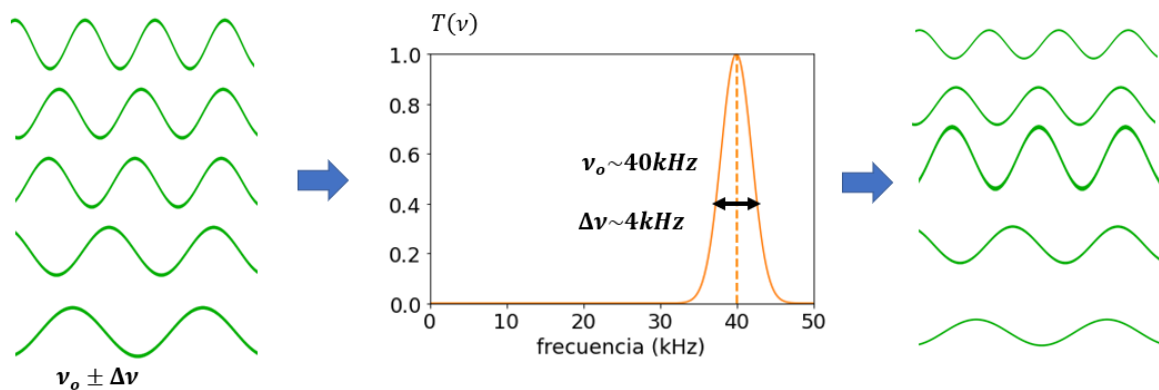


Figura 6.8: Esquema de la respuesta del par emisor-receptor cuando se alimenta al emisor con ondas armónicas de igual amplitud cuyas frecuencias se encuentran dentro del rango donde la respuesta en amplitud $T(\nu)$ es apreciable. La señal medida en el receptor resulta de la superposición de las respuestas a cada una de estas componentes.

Nos preguntamos ahora: ¿es posible excitar simultáneamente al par emisor-receptor en todo el rango de frecuencias en el que puede responder? Es decir, ¿existe alguna señal cuyo espectro sea continuo y suficientemente ancho como para cubrir toda su resonancia? ¿Cómo debería ser esa señal en el tiempo?

Para responder esa pregunta necesitamos pensar en cuáles son las señales con mayor contenido espectral, y nos vamos a ayudar con situaciones que ya conocemos (¡y la figura 6.2!).

Analizar las siguientes situaciones con intuición y conocimiento:

- Un aplauso, un golpe en una mesa, un chasquido con los dedos, la explosión de un chaskiboom (todos lo conocemos no? :)): ¿cuánto dura el evento en el tiempo? “¿qué ancho espectral esperamos para una señal que dura un tiempo tan corto?
- Hacer un experimento en casa grabando alguna de estas señales y utilizar la transformada de Fourier para analizar su contenido espectral.
- La difracción en una rendija en campo lejano: ¿cómo se relacionan la ‘función rendija’ y la ‘función difracción’? ¿Cuánto espacio ocupa la rendija? ¿Cuánto es-

pacio ocupa la difracción? ¿Cómo se relaciona la difracción con la transformada de Fourier de la rendija?

Nota: Recordar la definición de la transformada de Fourier explicada anteriormente.

6.3.1. Respuesta al impulso

Todas las situaciones que describimos anteriormente están relacionadas con señales de tipo impulsivo, es decir, señales de muy corta duración. El impulso ideal se representa mediante una delta de Dirac $\delta(t)$: una señal de duración nula y amplitud infinita, pero de área finita. Su transformada de Fourier es constante, por lo que contiene componentes de todas las frecuencias con igual amplitud (Fig. 6.2).

Experimentalmente no podemos generar una delta ideal. Sin embargo, podemos aproximarnos a ella mediante un pulso cada vez más angosto, manteniendo constante su área. Veamos qué ocurre con su contenido espectral.

En la figura 6.9 se observa un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta t$, de modo que su área es igual a uno. Llamaremos a esta función

$$p_{\Delta t}(t) = \frac{\text{rect}(t)}{\Delta t},$$

donde $\text{rect}(t)$ representa, en este caso, un pulso de ancho Δt y altura 1. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, $p_{\Delta t}(\nu)$ se aproxima a una delta de Dirac.

La transformada de Fourier de un pulso cuadrado de ancho Δt tiene forma de seno cardinal,

$$P_{\Delta t}(\nu) = \text{sinc}(\nu\Delta t),$$

donde usamos $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Esta función tiene su máximo en $\nu = 0$ y sus primeros ceros en $\nu = \pm \frac{1}{\Delta t}$. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, $P_{\Delta t}(\nu)$ se aproxima a 1/

Por lo tanto, su ancho espectral característico es del orden de $1/\Delta t$. Vemos entonces que, a medida que disminuye Δt , el ancho de la función sinc aumenta. Es decir, cuanto más angosto es el pulso en el tiempo, mayor es el rango de frecuencias presente en su espectro.

Entonces, generando el pulso más angosto posible obtendremos el mayor ancho espectral, aunque este seguirá estando centrado en la frecuencia $\nu = 0$.

Experimental: ¿Cuál es el pulso más angosto que se puede generar empleando el generador de funciones del laboratorio? ¿Qué contenido espectral tiene?

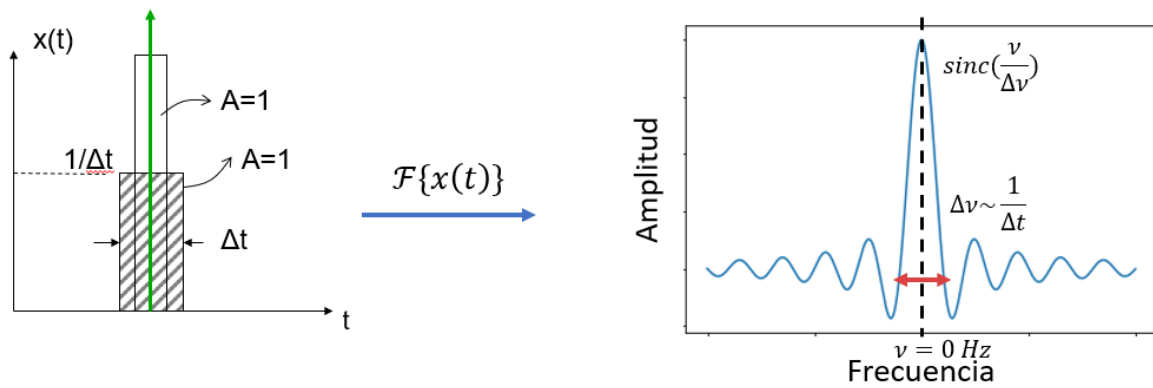


Figura 6.9: Esquema de un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta t$ (izquierda) y su transformada de Fourier (derecha). A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, el pulso se parece cada vez más a una delta y la transformada a una constante.

Todavía podríamos hacer un truco más para correr el centro del espectro a donde nosotros queramos. Consideremos ahora un pulso cuadrado modulado por una señal cosenoidal de frecuencia ν_0 ,

$$x(t) = p_{\Delta t}(t) \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (6.33)$$

Para calcular la TF vamos a usar una propiedad de la transformada, cuya deducción van a aprender más adelante, pero esta tan buena que se las muestro ahora:

Propiedad: Dadas las funciones f y g , la transformada del producto se calcula así:

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\nu) * G(\nu)$$

Es decir: La transformada del producto de dos funciones es la convolución de sus transformadas.

Usando esta propiedad, la TF de $x(t)$ se puede expresar como (la cuenta que sigue va para quienes hayan hecho Matemática 4, quienes aun no hayan cursado vean directamente el resultado):

$$X(\nu) = P_{\Delta t}(\nu) * \mathcal{F}\cos(2\pi\nu_0). \quad (6.34)$$

reemplazando por la transformada de la función coseno se obtiene

$$X(\nu) = P_{\Delta t}(\nu) * \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]. \quad (6.35)$$

Utilizando la propiedad de convolución con una delta,

$$X(\nu) = \frac{1}{2} [P_{\Delta t}(\nu - \nu_0) + P_{\Delta t}(\nu + \nu_0)]. \quad (6.36)$$

Como $P_{\Delta t}(\nu) = \text{sinc}(\nu\Delta t)$, resulta finalmente

$$X(\nu) = \frac{1}{2} [\text{sinc}((\nu - \nu_0)\Delta t) + \text{sinc}((\nu + \nu_0)\Delta t)]. \quad (6.37)$$

Es decir, agregar la portadora nos permitió correr el espectro a la frecuencia que querramos. En la figura 6.10 podemos ver un ejemplo de la señal y su transformada para una portadora de frecuencia $\nu_0 = 10$ kHz.

Para una frecuencia portadora ν_0 fija, al disminuir la duración Δt del pulso entran cada vez menos oscilaciones de la portadora dentro del mismo. El número aproximado de ciclos contenidos en el pulso es

$$N_{\text{ciclos}} \simeq \nu_0 \Delta t.$$

Al mismo tiempo, al disminuir Δt aumenta el ancho espectral de la señal, $\Delta\nu \sim 1/\Delta t$. Por lo tanto, un pulso muy corto contiene pocas oscilaciones de la portadora y presenta un espectro ancho, centrado alrededor de las frecuencias $\pm\nu_0$.

Esto impone un compromiso: para excitar un rango amplio de frecuencias alrededor de ν_0 necesitamos un pulso corto, pero cuanto más corto sea el pulso, menor será el número de oscilaciones de la portadora que podremos generar.

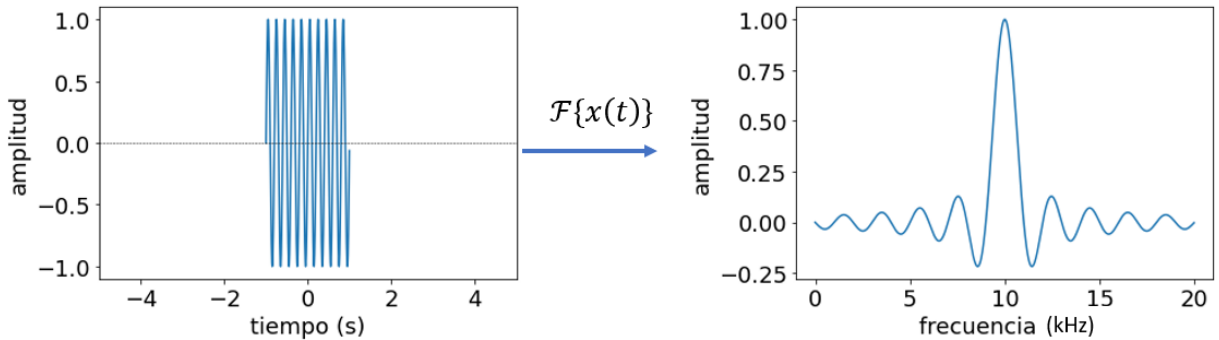


Figura 6.10: Ejemplo de una señal armónica modulada por una función cuadrada y su transformada de Fourier

La señal que produce un sistema como consecuencia de un impulso ideal se denomina **respuesta al impulso** y la representaremos como $h(t)$.

Supongamos que el sistema puede aproximarse como lineal y que sus propiedades no cambian con el tiempo. Como vimos en el Capítulo 3 para el caso espacial, la respuesta a una entrada arbitraria puede expresarse como una convolución. En el caso temporal,

$$y(t) = x(t) * h(t),$$

donde $x(t)$ es la señal de entrada, $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema y $y(t)$ la señal de salida. Aplicando la transformada de Fourier,

$$Y(\nu) = X(\nu)H(\nu),$$

donde

$$H(\nu) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

es la **función de transferencia** del sistema.

La función $H(\nu)$ es, en general, compleja y contiene información tanto de la amplitud como de la fase. La respuesta relativa en amplitud que medimos anteriormente corresponde a

$$T(\nu) = |H(\nu)|.$$

Para un impulso ideal,

$$x(t) = \delta(t) \quad \implies \quad X(\nu) = 1.$$

Por lo tanto,

$$Y(\nu) = H(\nu).$$

Es decir, la respuesta temporal medida es directamente $h(t)$ y su transformada de Fourier proporciona la función de transferencia del sistema.

Para una señal impulsiva real de duración finita, su espectro no es perfectamente plano. En ese caso, si conocemos o medimos tanto la entrada como la salida,

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)}.$$

Volvamos ahora al caso del pulso cuadrado, y analicemos un ejemplo hipotético sencillo para ver cómo es la evolución temporal para distintos anchos de impulsos, o a medida que el pulso cuadrado se acorta para parecerse más a un impulso ideal (6.11). El caso que se muestra podría ser el de un oscilador amortiguado. Queremos analizar qué sucede cuando, luego de recibir el impulso, el sistema evoluciona. Vemos que el ancho del pulso fija la condición inicial para la evolución posterior. Cuanto más corto es el pulso, menos importante lo que suceda dentro del pulso; es decir, se lleva al sistema a la condición inicial a partir de la cual el sistema evoluciona libremente, de manera instantánea. En el caso del oscilador armónico amortiguado, la evolución posterior es una oscilación amortiguada en su frecuencia natural, hasta que deje de moverse.

En un sistema general, la evolución tras un impulso depende de las frecuencias que este logre excitar. Para identificarlas, es necesario analizar el solapamiento entre el espectro del pulso (idealmente plano y extendido infinitamente) y las frecuencias propias del sistema en estudio. Si el sistema admite varias frecuencias o un espectro continuo, cada componente

oscilará y decaerá con su propio tiempo característico, mientras que la respuesta total corresponderá a la superposición de todas esas contribuciones.

Seguiremos trabajando con el concepto de frecuencias activadas en la siguiente sección.

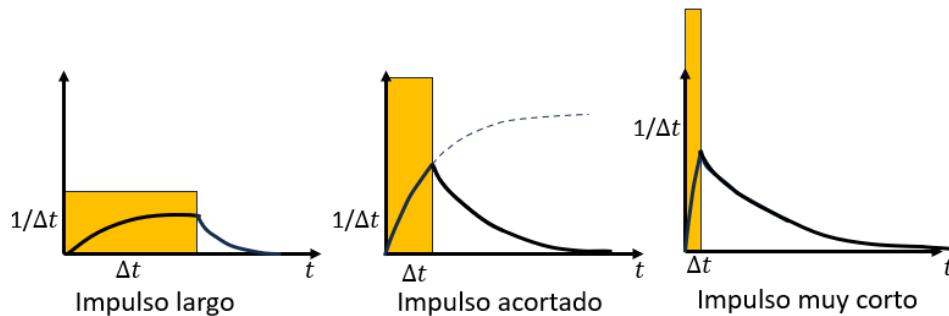


Figura 6.11: Dependencia temporal de una señal ante distintos impulsos. Cuanto más corto el impulso, es menos importante lo que pase durante Δt , la evolución posterior depende de las frecuencias activas del sistema.

6.3.2. Respuesta al escalón

En los experimentos de tiempo de vuelo en ultrasonido (piezoeléctricos) y en sonido (tubo de Kundt) usamos una señal cuadrada de baja frecuencia (~ 10 Hz) para medir con qué velocidad se propaga el flanco de la señal en el aire. La baja frecuencia de repetición permite observar cada flanco como un evento transitorio prácticamente aislado; sin embargo, como veremos, el contenido espectral de cada flanco se extiende a frecuencias mucho mayores.

En esos experimentos medimos el retardo Δt entre la señal medida en el receptor (PE receptor o micrófono) y la señal de alimentación en función de la distancia entre el emisor y el receptor d , y usamos que $d = c_s \Delta t$, donde c_s es la velocidad de propagación de las ondas. Como ejemplo de las señales medidas, en la figura 6.12 observamos la señal que resulta de alimentar a un piezoeléctrico con dicho flanco.

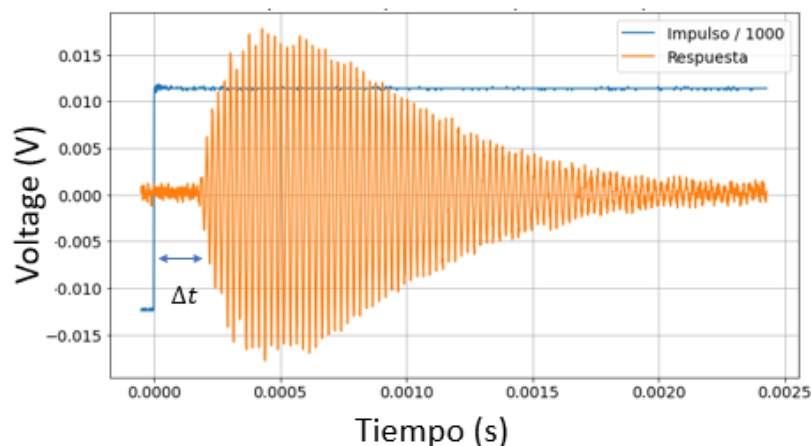


Figura 6.12: Respuesta del par ER (naranja) cuando se alimenta al emisor con una señal cuadrada de baja frecuencia (azul). Δt es el retardo entre que la señal es enviada por el emisor y recibida por el receptor.

Tratemos de entender ahora, por qué la señal adquiere esa forma. Para las escalas temporales que estamos considerando, podemos analizar por separado uno de los flancos de la señal cuadrada. Antes y después del flanco la señal permanece aproximadamente constante y, por lo tanto, corresponde a una componente continua ($\nu = 0$). Como el par piezoeléctrico no presenta una respuesta apreciable en $\nu = 0$, la señal transitoria que observamos en el receptor debe originarse en las componentes de frecuencia asociadas al flanco. Es decir, que el flanco tiene al menos una porción de su contenido espectral que se superpone con la respuesta del PE, $T(\nu)$.

Comencemos analizando conceptualmente al flanco, luego daremos descripciones más matemáticas. En la figura 6.13(a) vemos un flanco típico que podríamos medir con un osciloscopio. En el ejemplo de la figura 6.13(b) se observa cómo cambia la reconstrucción de una señal cuadrada al aumentar el número de términos de su serie de Fourier. Si se considera solamente la frecuencia fundamental, la variación temporal es suave.

A medida que se incorporan armónicos de mayor frecuencia, los flancos se hacen cada vez más abruptos. Por lo tanto, cuanto menor sea el tiempo de subida de un flanco, mayor deberá ser el rango de frecuencias necesario para reproducirlo.

Pero ¿cuánto mayor? Podemos caracterizar el flanco mediante su tiempo de subida (*rise time*) t_r , definido habitualmente como el tiempo que tarda la señal en pasar del 10 % al 90 % de su valor final. En términos generales, cuanto menor es t_r , mayor es el ancho espectral asociado al flanco, con una escala característica del orden de

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{t_r}.$$

En instrumentación se utiliza frecuentemente la relación aproximada

$$t_r BW \simeq 0,35,$$

por ejemplo para un sistema pasa-bajos de primer orden, donde BW corresponde al ancho de banda a -3 dB. Así, un tiempo de subida de 10 ns corresponde, bajo esta aproximación, a un ancho de banda de aproximadamente 35 MHz. Independientemente del modelo preciso utilizado para definir el ancho espectral, la escala $1/t_r$ es del orden de 100 MHz. En ambos casos, estas frecuencias son varios órdenes de magnitud mayores que la frecuencia de resonancia de los piezoeléctricos utilizados en el laboratorio.

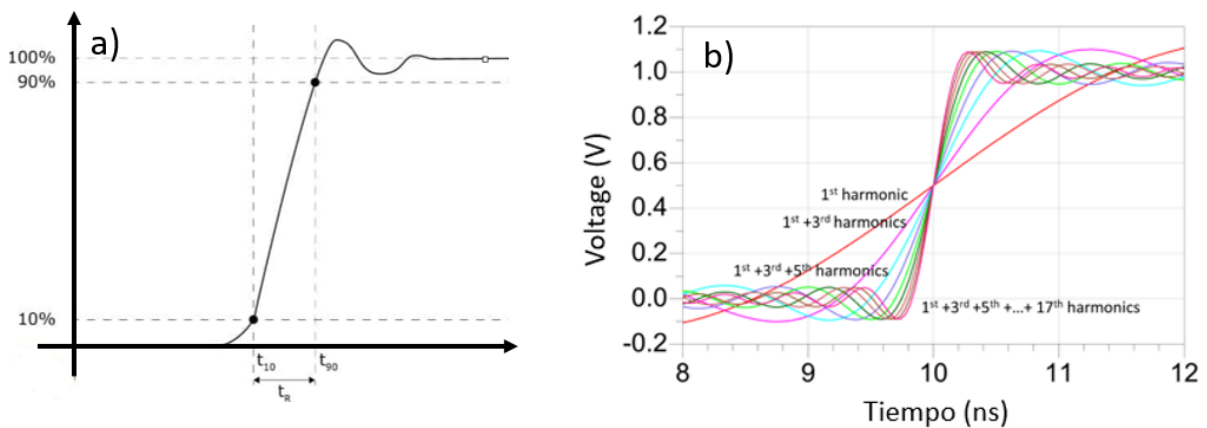


Figura 6.13: (a) Flanque de una señal cuadrada y medición del tiempo de subida (t_r). (b) Ejemplo de como la suma de más armónicos (o términos en la sumatoria) en la serie de Fourier reconstruye cada vez mejor una onda cuadrada.

Para experimentar

- Caracterizar el flanco de una señal producida en el generador de funciones empleando el osciloscopio. ¿Cuál es el tiempo de subida? ¿Cuál es el contenido espectral? ¿Quién lo limita: el generador, el osciloscopio o ambos?
- Comparar el ancho del pulso más angosto con el tiempo de subida. ¿Cuál de las dos señales es más rápida? ¿Cuál tiene mayor contenido espectral?

Nota: Si bien utilizamos la serie de Fourier de una señal cuadrada para construir intuición, el análisis también puede realizarse directamente mediante la transformada de Fourier de una función escalón. El escalón ideal contiene, además de la componente continua, componentes cuya amplitud decrece como $1/|\nu|$ [?]. En la sección S1 del Apéndice se analiza cómo se modifica este espectro cuando el tiempo de subida es finito.

Entonces tenemos ancho de banda suficiente para excitar al PE, y lo estamos excitando en todas sus frecuencias. ¿Cómo entendemos entonces la señal de respuesta? En

primer lugar, se observa que hay un retardo Δt entre que la señal es emitida y el PE receptor la recibe. El flanco contiene componentes en un rango de frecuencias mucho mayor que el ancho de la resonancia del par emisor-receptor. Sin embargo, el sistema responde principalmente a las componentes que se encuentran dentro de su banda de resonancia, es decir, aquellas contenidas en $T(\nu)$. La señal medida resulta entonces de la superposición de varias componentes de frecuencias cercanas (porque la respuesta del par emisor-receptor es angosta). De manera análoga a lo que ocurre en un batido entre dos señales de frecuencias próximas, esta superposición produce una oscilación cuya amplitud varía en el tiempo. En este caso interviene un conjunto de frecuencias ponderadas por la respuesta en frecuencia del sistema $T(\nu)$.

Si entonces realizamos la transformada de Fourier de la señal medida, obtendremos la función transmisión del par ER.

Pensar y experimentar

Pensar cuáles son las diferencias y similitudes que hay entre el par ER piezo-eléctrico y el micrófono-parlante en el tubo de Kundt.

- ¿Cómo se comparan los anchos de banda de sus respuestas?
- ¿Cómo se comparan las frecuencias que se pueden propagar entre ellos?
- ¿Qué se espera obtener si se realiza el experimento de la respuesta impulsiva en el tubo de Kundt?

6.4. Frecuencia de muestreo y transformada de Fourier

En el capítulo 5 estudiamos el muestreo en el dominio temporal y el criterio de Nyquist. Veamos ahora cómo aparecen estos resultados en el dominio de las frecuencias, conocido como espacio transformado. En la Figura 6.14 se observa una señal continua $g(t)$ en el espacio de tiempos y su transformada $G(f)$ en el espacio de frecuencias. Consideremos que la señal tiene un espectro acotado en frecuencias.

La señal muestreada $g_s(t)$ resulta de hacer el producto entre la señal continua y el muestreo, que está representado por el peine de deltas

$$s(t) = \sum_n \delta(t - n\delta t) \quad (6.38)$$

La transformada del peine de deltas es también un peine de deltas que están a una distancia f_s entre sí:

$$S(f) = f_s \sum_n \delta(f - nf_s) \quad (6.39)$$

donde $f_s = 1/\delta t$. Es decir que, cuanto mas chico sea δt , más van a estar separadas las deltas del peine en el espacio de las frecuencias.

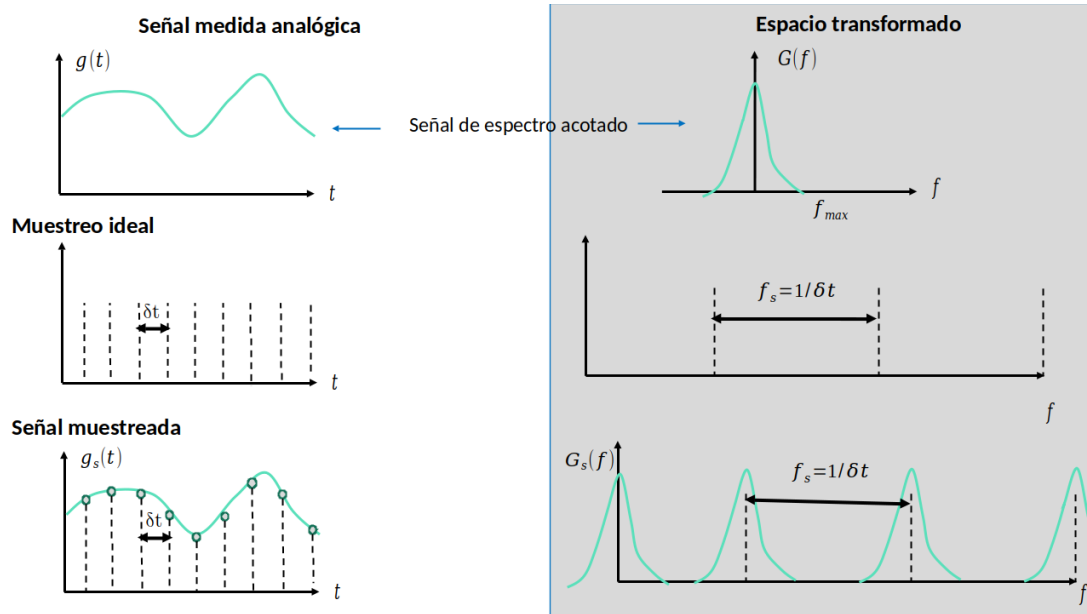


Figura 6.14: Medición de una señal continua en el tiempo y su representación en el espacio transformado de frecuencias.

La señal muestreada resulta entonces

$$g_s(t) = g(t) \sum_n \delta(t - n\delta t) = \sum_n g(n\delta t) \delta(t - n\delta t).$$

Ahora tenemos que ver cómo es el espectro de esta función, y para eso hacemos la transformada. Podemos usar una propiedad muy interesante de las transformadas y la convolución que dice que la transformada del producto de funciones, es igual a la convolución de las transformadas. Es decir:

$$\mathcal{F}\{g(t)h(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (6.40)$$

Entonces podemos calcular el espectro de la función muestreada como

$$G_s(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_n \delta(t - n\delta t)\right\} = f_s G(f) * \sum_n \delta(f - nf_s) = f_s \sum_n G(f - nf_s).$$

donde $G(f)$ es la transformada de la función sin muestrear (es decir el espectro de la señal original). No hace falta entrar en el detalle de cómo se calcula la convolución pero, en esencia, lo que implica la expresión más a la derecha es que tenemos una réplica de $G(f)$ centrada en cada posición $f = nf_s$. Veamos cómo se ve la señal en el espacio transformado cuando cambia la frecuencia de muestreo, o lo que es lo mismo, el δt en el espacio de tiempos. En la Fig. 6.15 se ven dos ejemplos: se observa que al aumentar δt (y por lo tanto disminuir f_s), en el espacio transformado comienzan a solaparse las

réplicas vecinas. Esto da lugar al efecto de *aliasing* que mencionamos anteriormente: al solaparse las réplicas espectrales, componentes de distintas frecuencias pueden volverse indistinguibles en la señal muestreada. Fíjense que ahora la condición de Nyquist surge naturalmente, ya que f_s tiene que ser por lo menos mayor que $2f_{max}$, para que las réplicas no se solapen.

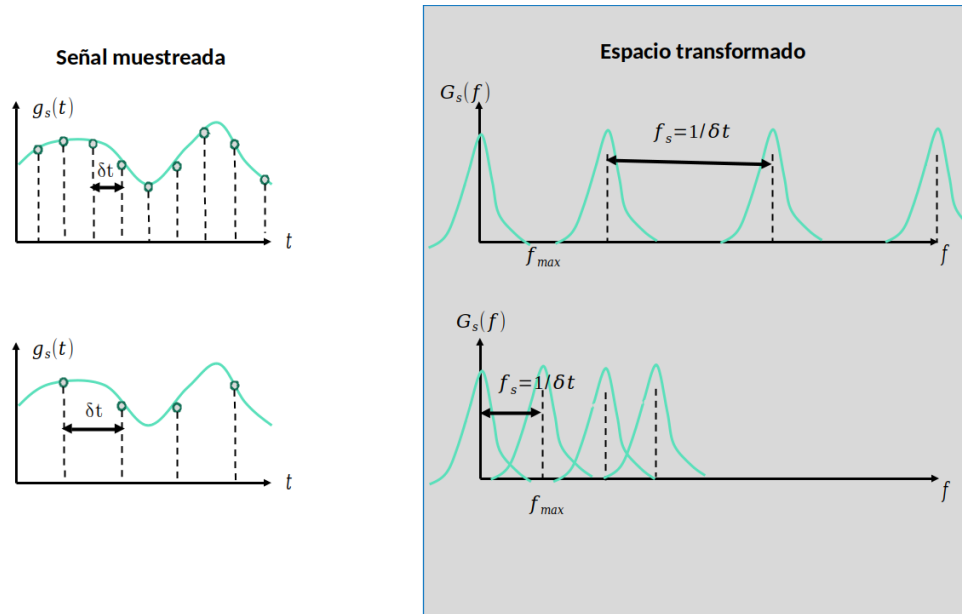


Figura 6.15: Ejemplo de una señal medida con dos frecuencias de muestreo diferentes, tanto en el espacio de coordenadas (tiempo) como en el espacio transformado (frecuencias).

Ahora nos preguntamos cómo quedan determinadas las frecuencias cuando calculamos numéricamente la transformada de una señal adquirida. Si se realizan N mediciones sobre la señal $g(t)$, separadas por un intervalo δt , el tiempo total de observación es $\Delta t = N\delta t$.

Al calcular la transformada de Fourier discreta (DFT) obtenemos N valores de la transformada $G_s(f)$ distribuidos en un intervalo de frecuencias $(-f_s/2, f_s/2)$ de ancho f_s (ver Fig. 6.16). Por lo tanto, el espaciado entre frecuencias consecutivas es

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\delta t} = \frac{1}{\Delta t}.$$

Es decir, cuanto mayor sea el tiempo total de observación, menor será el espaciado entre los puntos de la transformada y podremos describir con mayor detalle las estructuras del espectro. Entonces, el tiempo total del experimento constituye una escala característica de la resolución espectral.

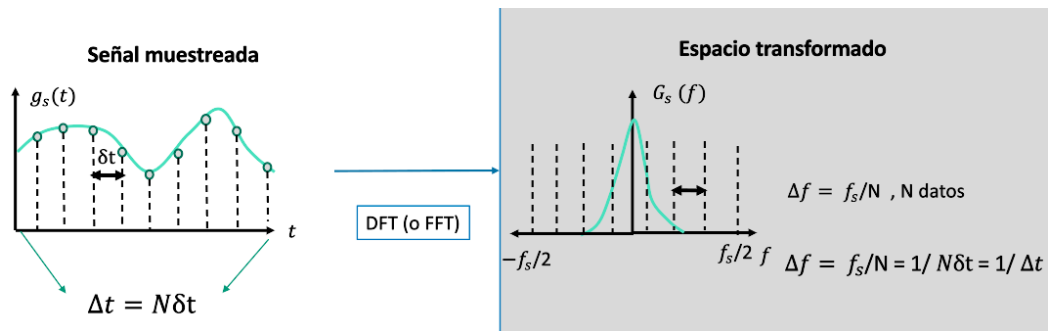


Figura 6.16: Esquema de la relación entre el tiempo en el espacio de coordenadas y las frecuencias en el espacio transformado.

Para pensar: Supongamos que se quiere medir la campana de resonancia del par PE a partir de la transformada de su respuesta temporal. La resonancia está centrada en 40 kHz y tiene un ancho de aproximadamente 5 kHz.

¿Qué frecuencia de muestreo deberíamos utilizar para evitar *aliasing*? ¿Cuánto tiempo deberíamos adquirir la señal si queremos obtener, por ejemplo, al menos 10 puntos dentro del ancho de la resonancia? ¿Cuántas muestras implica esta elección?

Capítulo 7

Ondas electromagnéticas

Hasta ahora hemos trabajado con ondas mecánicas transversales (vibraciones en cuerdas) y longitudinales (ondas acústicas). En este capítulo, y durante la segunda mitad de la materia, trabajaremos con ondas electromagnéticas. Este tipo de ondas son esenciales en diversas aplicaciones cotidianas, desde la transmisión de señales de radio y televisión hasta el funcionamiento de dispositivos de comunicación inalámbrica y la luz que percibimos. En el espectro electromagnético (Fig. 7.1) se encuentran diversas categorías de radiación como radiofrecuencias, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma. Cada una de estas categorías tiene aplicaciones específicas y propiedades particulares que las hacen adecuadas para distintos usos tecnológicos, médicos, de comunicación y de investigación científica. En particular, en esta materia vamos a realizar experimentos empleando luz en la parte visible del espectro (o luz visible por los humanos), formada por la radiación electromagnética cuyas longitudes de onda se encuentran entre 400 y 700 nm.

Las ondas electromagnéticas son generalmente ondas transversales que se caracterizan por la propagación de energía a través del espacio, sin requerir un medio material para su transmisión, propagándose en vacío con una velocidad $c \sim 3 \times 10^8 m/s$. El vector de campo eléctrico puede oscilar de diversas formas en el plano perpendicular al vector de propagación, definiendo el estado de polarización (luz polarizada lineal, circular, elíptica, luz natural o luz parcialmente polarizada).

Las propiedades de propagación de la luz en materiales, están determinadas por la respuesta de los electrones en los mismos. En esta materia estudiamos solamente la respuesta lineal, pero también existen otros fenómenos muy interesantes asociados a la respuesta no lineal. El campo electromagnético que constituye a la onda interactúa con los electrones en los materiales ejerciendo fuerzas sobre estos. Los electrones en los átomos se ponen en movimiento en el campo oscilatorio de luz, desplazándose respecto a los núcleos que son muy pesados y se mantienen quietos. El movimiento oscilatorio de los electrones genera dipolos (un desbalance de carga) oscilantes que re-irradian luz. La magnitud física que caracteriza macroscópicamente la interacción lineal con los electrones es el índice de re-

fracción (por lineal se entiende que la polarización del material es lineal con el campo, y eso se traduce en que el desplazamiento de los electrones es proporcional al campo eléctrico de la luz).

Las propiedades de propagación más básicas son la absorción (A), transmisión (T), reflexión (R) y scattering (S), como se esquematiza en la Fig. 7.2. En general vale, por conservación de energía que $I = R + T + A + S$, donde I es la intensidad incidente.

Supongamos que un haz de luz incide con un ángulo θ_i sobre una interfaz entre dos medios. Parte del haz se refleja en la superficie con un ángulo θ_r y parte se transmite con un ángulo θ_t . El valor de los ángulos θ_t y θ_r se obtienen a partir de las leyes de Snell

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad (7.1)$$

$$\theta_r = \theta_t. \quad (7.2)$$



Figura 7.1: Esquema de los tipos de ondas y frecuencias que abarca el espectro electromagnético, donde solo una pequeña porción es visible para el ojo humano. Se muestran ejemplos de fuentes que generan esas ondas

Las ondas reflejadas y transmitidas se generan en respuesta a la oscilación de los electrones en el medio, que irradian luz al oscilar (dipolo oscilante) en presencia del campo incidente. Al transmitirse, la luz incidente cambia de dirección porque su velocidad de propagación es menor en el segundo medio. Las ondas con polarización paralela o perpendicular al plano de incidencia, se reflejan y transmiten con distinta eficiencia, que está dada por los coeficientes de Fresnel.

La absorción está relacionada con las transiciones electrónicas en los átomos. La luz puede promover electrones de un nivel energético inferior a otro de mayor energía. Luego

de absorber fotones, los electrones en los átomos pueden decaer naturalmente a estados de menor energía (como siempre es conveniente), y lo pueden hacer emitiendo luz en una frecuencia distinta a la incidente (fluorescencia) o transformando esa energía en calor (o vibraciones en el material).

La dispersión de luz (scattering) sucede cuando en el medio hay partículas o moléculas cuyo tamaño es chico comparado con la longitud de onda, que provocan que la luz cambie su dirección. En el modelo microscópico de dipolos, cuando los dipolos son iluminados estos oscilan con la misma frecuencia que la luz, al estar oscilando estos emiten luz en todas las direcciones.

La luz transmitida es aquella que pudo atravesar el material, sin absorberse ni dispersarse.

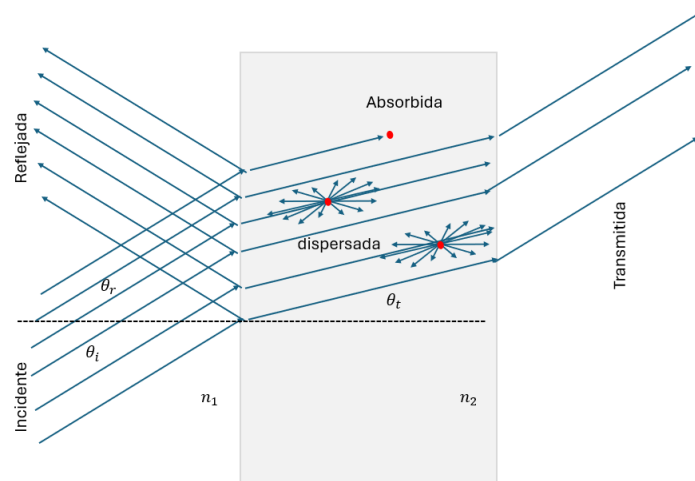


Figura 7.2: Un haz que incide en el material con un ángulo θ_i , puede reflejarse, refractarse en su superficie. La luz refractada, puede dispersarse, absorberse o transmitirse.

7.1. Polarización de la luz

La luz es una onda electromagnética compuesta por campos eléctricos $\vec{E}$ y magnéticos $\vec{H}$ que oscilan perpendicularmente entre sí y, a su vez, éstos son perpendiculares a la dirección de propagación, dada por el vector de ondas $\vec{k}$. Si la onda es monocromática (una única frecuencia) y se propaga en la dirección $\vec{z}$, podemos escribir al campo eléctrico como

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(kz - wt) \hat{x} + E_{0y} \cos(kz - wt + \phi) \hat{y}. \quad (7.3)$$

En notación compleja, la ecuación anterior se puede re-escribir como

$$\vec{E} = E_{0x} e^{i(kz - wt)} \hat{x} + E_{0y} e^{i(kz - wt + \phi)} \hat{y} = e^{i(kz - wt)} (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\phi} \hat{y}). \quad (7.4)$$

Otra manera de visualizar esta ecuación es escribiendo las componentes cartesianas de manera vectorial, de la siguiente manera

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (7.5)$$

Una propiedad relacionado con la luz es su polarización, que se refiere a la orientación preferencial de las oscilaciones del campo eléctrico. Ver que según las ecuaciones anteriores, las componentes en $\hat{x}$ e $\hat{y}$ del campo eléctrico pueden oscilar con distintas amplitudes y fases. Al vector que representa la forma en que oscila el campo eléctrico, se lo llama polarización. Si fijamos valores para las amplitudes y fases en valores particulares, podemos encontrar distintos tipos de polarización, como se muestra en la figura 7.3:

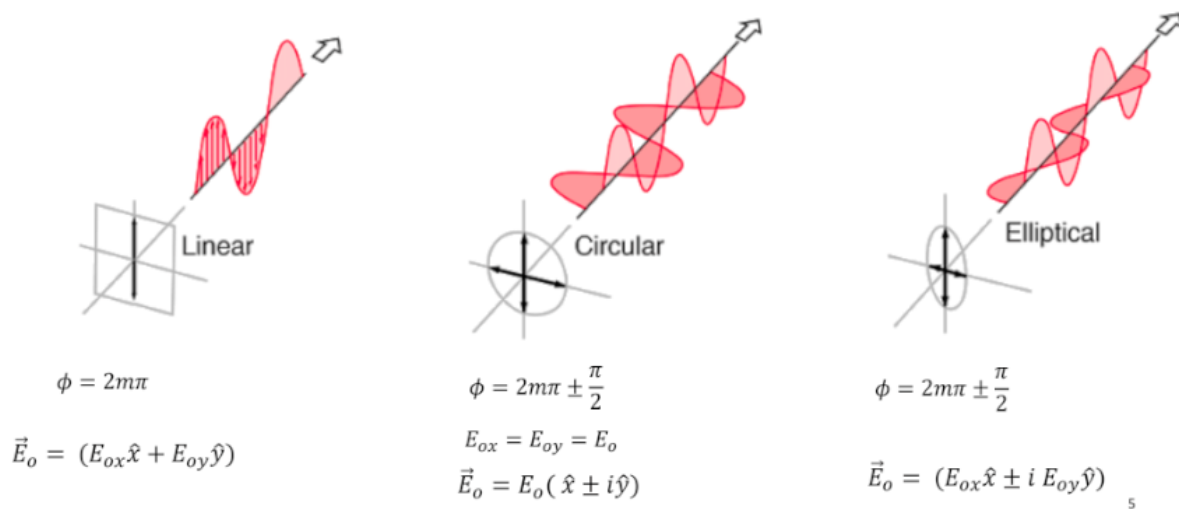


Figura 7.3: Onda electromagnética polarizada lineal, circular y elíptica, y sus respectivos vectores de polarización escritos en forma genérica.

- Polarización lineal: En la polarización lineal las oscilaciones eléctricas se realizan en un solo plano, lo que resulta en una onda que vibra en una dirección específica.
- Polarización circular: El vector de polarización oscila girando (en sentido horario o antihorario) describiendo un patrón helicoidal a medida que se propaga. En el plano perpendicular a $\vec{k}$, el vector de polarización describe un círculo.
- Polarización elíptica: La polarización elíptica es una combinación de la polarización lineal y circular. Las oscilaciones siguen una trayectoria elíptica a medida que se propagan. Este tipo de polarización puede ser tanto elíptica derecha como elíptica izquierda, dependiendo del sentido de giro. En el plano perpendicular a $\vec{k}$, el vector de polarización describe una elipse.
- Luz naturalmente polarizada (o no polarizada): Una onda electromagnética no polarizada se caracteriza por la vibración aleatoria del campo eléctrico, de manera que

en los tiempos característicos de detección, no se puede determinar una dirección de oscilación particular. Ejemplos de luz naturalmente polarizada son el sol, el fuego, las lámparas de filamento y tungsteno, lámparas de gas, entre otras (ver Fig. 7.4). Por que sucede esto? porque las fuentes están compuestas por un número enorme de átomos que emiten luz. Cada átomo emite por un tiempo del orden de $10^{-8}s$, y el campo eléctrico emitido no tiene ninguna dirección de oscilación ni de propagación preferencial (es decir, difiere entre distintos átomos). La emisión de la fuente está formada por la superposición de las ondas emitidas por todos los átomos, con polarizaciones que cambian caóticamente, dando a lugar a un campo total que varía también aleatoriamente y se emite en todas las direcciones. Si la luz es parcialmente polarizada la amplitud en una dirección es significativamente mayor que en la otra.

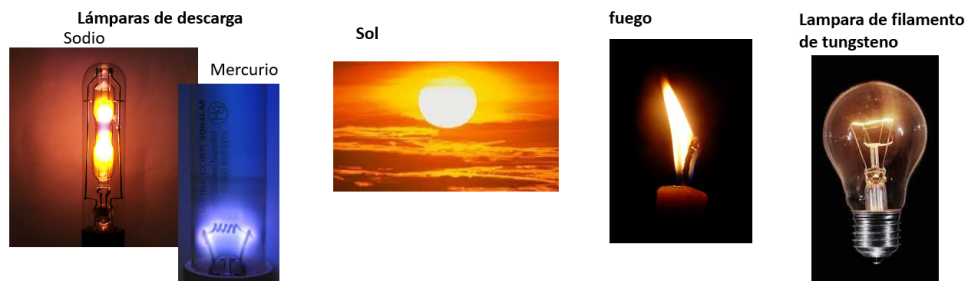


Figura 7.4: Ejemplos de fuentes que producen luz natural

7.2. Fenómenos que polarizan la luz

La luz natural no está polarizada, pero hay ciertos fenómenos y materiales en la naturaleza que polarizan la luz. Un ejemplo son los materiales anisótropos, como la calcita. La reflexión polariza la luz (esto es siempre cierto?). El scattering o dispersión de la luz también es un fenómeno polarizante.

7.2.1. Polarización por reflexión

Cuando las ondas de luz se reflejan en una superficie, pueden polarizarse parcial o totalmente según el ángulo de incidencia y las propiedades de la superficie. Supongamos que un haz de luz natural incide sobre una superficie con un ángulo de incidencia θ_i respecto a la normal a la superficie, como se indica en la Fig.7.5a.

El ángulo de Brewster (θ_B) es el ángulo de incidencia para el cual la luz reflejada se polariza completamente, como se muestra en la Fig. 7.5b. La polarización de la luz reflejada en ese caso es paralela a la superficie. Esto sucede debido al peculiar comportamiento de las ondas de luz y su interacción con los átomos en el material, que se ve manifestada en los coeficientes de reflexión de Fresnel (Fig. 7.5c).

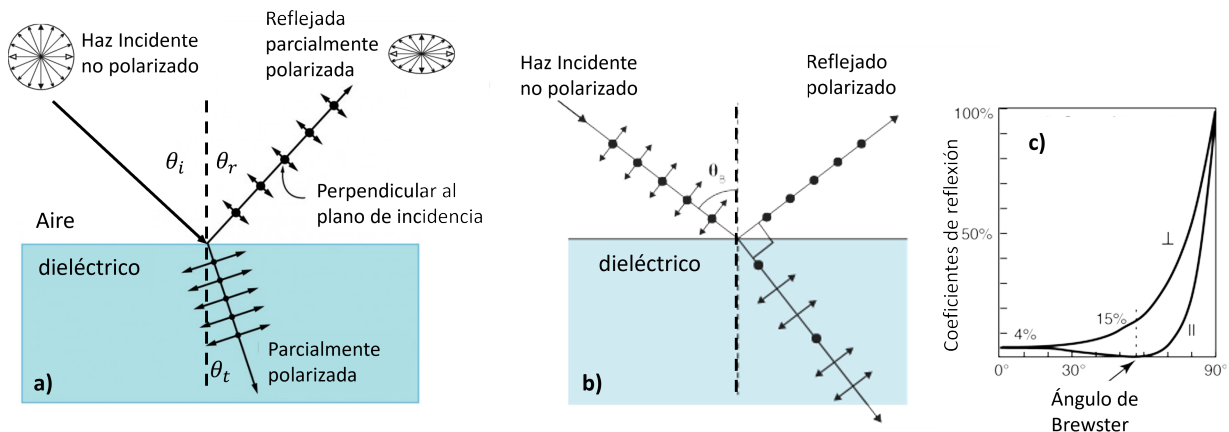


Figura 7.5: a) Esquema del plano de incidencia, indicando los ángulos intervinientes y la polarización de los haces. b) Esquema similar cuando el ángulo incidente es el de Brewster θ_B . c) coeficientes de reflexión para las polarizaciones perpendicular y paralelas al plano de incidencia

En general los campos eléctricos de las ondas luminosas incidente, reflejada y transmitida, se pueden descomponer en componentes paralelas ($E_{\parallel}$) y perpendiculares ($E_{\perp}$) al plano de incidencia. En el ángulo de Brewster, la componente del campo eléctrico reflejado paralela al plano de incidencia $E_{R\parallel}$ se anula, dando como resultado una luz reflejada completamente polarizada. Por que sucede esto? Dijimos anteriormente que la luz incidente produce la oscilación de los electrones que forman dipolos en el segundo medio. Estos mismos dipolos oscilantes son los que generan la luz reflejada. Los dipolos oscilarán en la dirección de la polarización de la luz transmitida. Si la polarización de la luz transmitida $E_{T\parallel}$ es paralela a la dirección de propagación de la onda reflejada, estos dipolos no podrán generar campo eléctrico reflejado con esa polarización (como veremos más abajo, los dipolos no generan radiación en la dirección de oscilación), por lo que la luz reflejada será polarizada $E_{R\perp}$.

Entonces el efecto de polarización está influenciado por las propiedades del medio en que se propagan los haces, como su índice de refracción. En el ángulo de Brewster, el haz reflejado y transmitido forman un ángulo de 90° , y, esta condición junto a las leyes de Snell, permiten obtener

$$\theta_B = \arctan(n_2/n_1), \quad (7.6)$$

donde n_1 es el índice de refracción del medio desde donde se incide (por ejemplo, aire) hacia el segundo medio de índice n_2 (mayor que n_1), en donde se transmiten los haces (por ejemplo, una superficie de vidrio o agua).

7.2.2. Polarización por dicroísmo

Los materiales dicroicos tienen la propiedad de absorber la luz de forma selectiva según sea su estado de polarización, permitiendo que solo pase la luz con una polarización

específica. Principalmente existen dos tipos de materiales dicroicos según la polarización de la luz que manipulan: lineales (cuando hay una dirección lineal preferencial de absorción o transmisión) y circulares (cuando reaccionan diferente según sea la polarización circular izquierda o derecha).

Los materiales (polarizador lineal), en general, están formados por moléculas alineadas (mediante procesos de fabricación o propiedades inherentes del material) que absorben selectivamente la luz con una orientación particular del campo eléctrico (ver Fig. 7.6). La luz incide con polarización paralela al eje mayor de las moléculas es absorbida, por lo que la luz que emerge del material está polarizada en la dirección perpendicular a la de las moléculas. Quedan entonces definidos los ejes de absorción y transmisión del material. En la Fig. 7.7 se muestra el efecto de un polarizador lineal cuando sobre el incide luz natural. La luz que emerge, independientemente de la polarización incidente, es polarizada linealmente en la dirección del eje de transmisión.

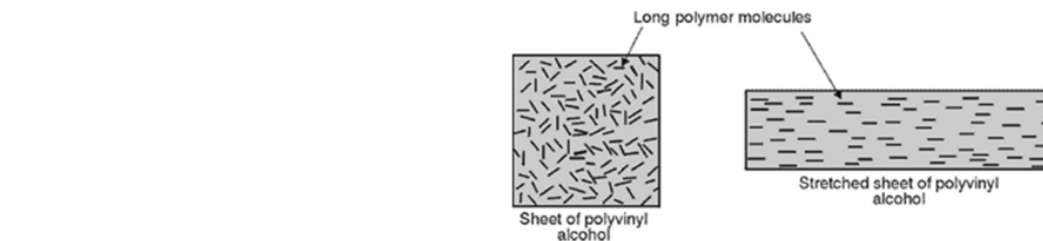


Figura 7.6: Al estirar una lámina de polyvinyl alcohol, sus moléculas se alinean generando una dirección preferencial para la absorción

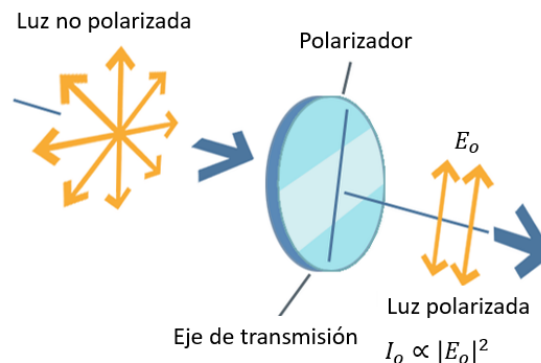


Figura 7.7: La luz naturalmente polarizada emerge del polarizador con polarización lineal, en la dirección perpendicular a la dirección de absorción

En este contexto, cuando sobre el polarizador lineal incide luz linealmente polarizada (Fig. 7.8), es posible describir la relación entre la intensidad de la luz incidente y transmitida utilizando la ley de Malus

$$I = I_0 \cos^2(\theta) \quad (7.7)$$

donde la intensidad de la luz transmitida (I) es directamente proporcional a la intensidad de la luz incidente (I_0), y un factor igual al coseno al cuadrado del ángulo (θ) entre la dirección de polarización del haz incidente y el eje rápido del polarizador (ver Fig.7.8).

Esta ley demuestra cómo un material dicroico lineal permite seleccionar y controlar la polarización de la luz. Por ejemplo, si el ángulo es $\theta = 0$, la intensidad se reduce a cero, bloqueando toda la luz que no está alineada con el polarizador. Del mismo modo, se pueden usar lentes de sol de polarizadores para anular las reflexiones que están polarizadas (aquellas cuyo ángulo de incidencia es cercano al de Brewster), como se esquematiza en la Fig. 7.9. Con este mismo truco, puedes salvarte de un ataque de cocodrilo ([ver link](#)).

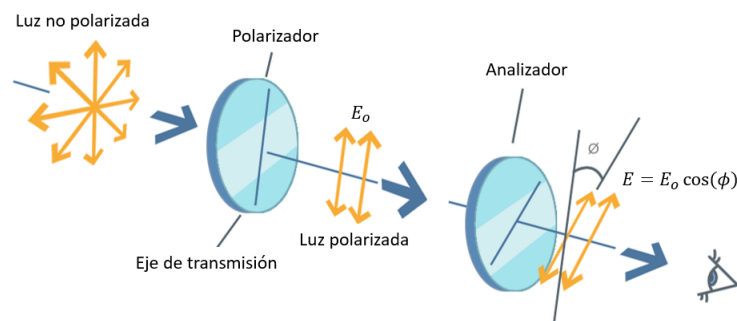


Figura 7.8: El haz incidente sobre el analizador, está linealmente polarizado en la misma dirección que el eje de transmisión del polarizador. El analizador está rotado en un ángulo ϕ respecto del eje del polarizador.

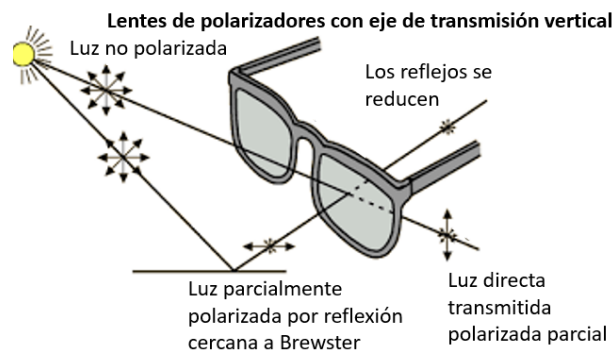


Figura 7.9: Los anteojos con vidrios polarizados permiten anular los reflejos polarizados

Para pensar: Al expresar la ley de Malus, consideramos que los polarizadores son ideales, de modo que la absorción solo se da por el efecto dicroico. Como modificamos esta expresión para considerar un polarizador real? Quien debería ser I_o ?

7.2.3. Polarización por dispersión (scattering)

Cuando la luz se propaga por un medio se dispersa. Si las partículas del medio tienen un tamaño comparable a la longitud de onda de la luz, este proceso se denomina dispersión o scattering de Rayleigh. Esencialmente cuando la luz incide sobre una molécula/átomo, los electrones que los constituyen oscilan con el campo electromagnético externo formando un dipolo oscilante. Este dipolo re-irradia luz, tal como lo haría una antena dipolar. Los medios en donde se dispersa la luz están compuestos por un número elevado de partículas. Debido a que las partículas están distribuidas en posiciones aleatorias, la luz dispersada por cada partícula llega al punto particular de observación con fases aleatorias, por lo tanto la radiación es incoherente y la intensidad resultante es la suma de las amplitudes al cuadrado de luz dispersada en cada partícula (sin término de interferencia). El scattering de Rayleigh es inelástico, porque por las leyes de conservación la frecuencia de las ondas emitidas es igual a las incidentes. La expresión que corresponde al vector de Poynting (vector cuya dirección dice hacia donde fluye la energía, y su magnitud la intensidad) de un dipolo oscilante es

$$\langle \mathbf{S} \rangle \sim \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (7.8)$$

donde p_0 es el momento dipolar y c la velocidad de la luz en vacío. Observemos algunas cuestiones importantes. En primer lugar, el módulo del vector de Poynting es directamente (inversamente) proporcional con la frecuencia (longitud de onda) a la cuarta. En segundo lugar, depende inversamente de la distancia al cuadrado y tiene simetría asimutal (no depende del ángulo asimutal polar). Además, depende del $\sin^2(\theta)$, o sea tiene una dirección de emisión preferencial: la emisión es máxima cuando $\theta = \pi/2$, mínima cuando $\theta = 0$, o sea en la dirección de oscilación del dipolo. En la Fig. 7.10 se observa el patrón de radiación de un dipolo, que se obtiene a partir de los campos electromagnéticos. Notar que, la emisión tiene simetría asimutal, y en la dirección de oscilación del dipolo (flechita) no hay emisión.

A partir de estos conceptos, podemos entender por ejemplo, cual es el color del cielo y cual es su polarización.

La dependencia de la longitud de onda ($\sim 1/\lambda^4$) de este tipo de dispersión es responsable de los cielos azules y los atardeceres rojos, como se esquematiza en la Fig. 7.11. Las longitudes de onda más cortas (azules) se dispersan mucho más que las largas (rojas). El sol emite luz blanca (en todo el espectro visible) y la luz tiene que atravesar la atmósfera para llegar a nosotros. Cuando el sol está alto (por ejemplo al medio día) la luz recorre una capa relativamente angosta en la atmósfera. La mayor parte del espectro visible puede recorrer mayor distancia sin desviar su recorrido, pero las ondas en el espectro azul se dispersan en todas las direcciones. Por ese motivo vemos al sol casi blanco, y alrededor

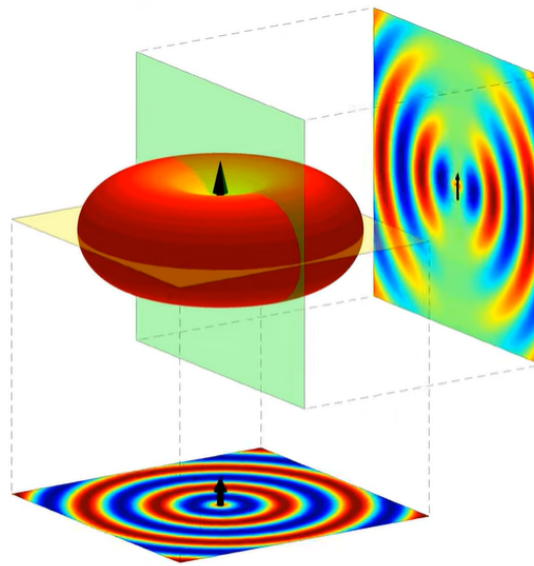


Figura 7.10: Simulación de el campo electromagnético irradiado por un dipolo. Se observa que no emite en la dirección de oscilación, tiene simetría acimutal, y emite preferencialmente en la dirección perpendicular a la de oscilación. Gráfico adaptado de [este video](#).

vemos al cielo celeste. En cambio al atardecer, el sol está en su posición baja, por lo que la luz recorre una distancia mucho mayor en la atmósfera. Los haces azules se dispersan cambiando su recorrido, pero la distancia que tienen que recorrer es tan grande, que prácticamente no llegan al observador. De este modo, vemos el cielo anaranjado.

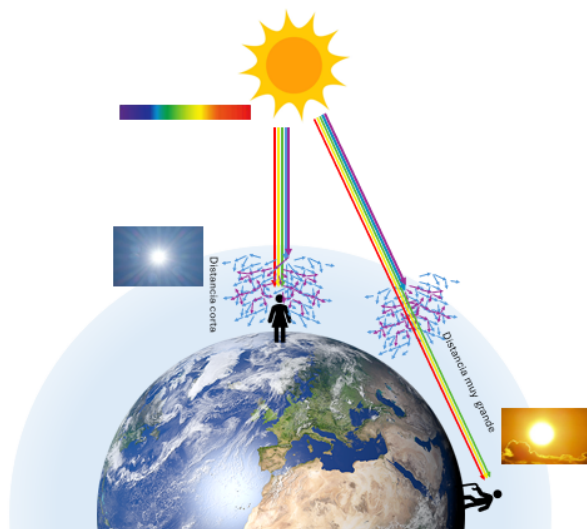


Figura 7.11: La dispersión de Raileigh es responsable de que veamos el cielo azul durante el día y naranja al atardecer

Consideremos ahora la polarización de la luz del sol (no polarizada) entrando a la atmósfera terrestre. La fuente está tan lejos que podemos considerar a los haces incidentes sobre la tierra paralelos, o casi paralelos (una onda plana no polarizada). Nuevamente consideremos dos situaciones esquematizadas en la Fig. 7.12. Los haces que entran a la

atmósfera por el camino 1, inciden normalmente sobre el observador (gorro rojo). Como ya vimos los haces azules se dispersan más que los rojos, pero en lo que respecta a la polarización, la luz continua siendo no polarizada. Los haces que recorren el camino 2, son observados perpendicularmente a su vector de propagación. Podemos descomponer a la polarización en dos direcciones, paralela a la dirección de observación (línea punteada roja) o perpendicular a la misma. Ahora recordemos, que al inicio de esta sección se mostró que la emisión dipolar es simétrica alrededor del dipolo, y que no hay emisión en la dirección del dipolo. Por ese motivo, la componente de polarización paralela a la línea roja, no puede generar emisión de luz, mientras que la otra sí. De este modo, la luz dispersa, observada normal a la dirección de propagación del haz incidente, es polarizada. Estrictamente, la intensidad de la onda dispersada con la polarización indicada con la flechita (paralela al papel), disminuye como $\cos^2\theta$, donde θ es el ángulo de observación. Además, como hay un sin fin de centros de scattering, en realidad la luz será siempre parcialmente polarizada.

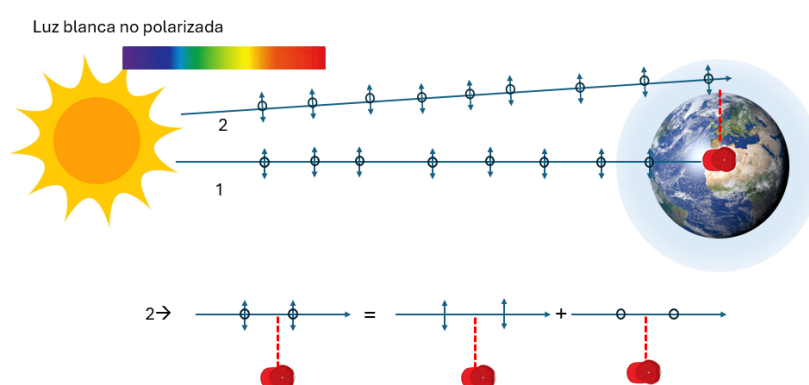


Figura 7.12: Análisis de la polarización de la luz dispersada. En incidencia normal sobre nuestros ojos, la luz tiene polarización natural. Si miramos perpendicular a la dirección de propagación, la luz es polarizada.

7.2.4. Polarización por birrefringencia

La birrefringencia, o doble refracción, es un fenómeno que se presenta en cristales no cúbicos como la calcita o en plásticos sometidos a tensión. Debido a su estructura atómica estos materiales son anisótropos y la velocidad de la luz depende de su dirección de propagación a través del material. El rayo incidente al pasar por la calcita se separa en dos rayos, llamados ordinario (o) y extraordinario (e), el rayo e se desvía más que el o (Fig. 7.13a).

El eje óptico en cristales uniaxiales está dado por el eje de simetría del cristal. El plano principal es el plano que contiene al eje óptico (Fig. 7.13a en gris). Supongamos un haz que incide perpendicular a la superficie del cristal. Podemos separarlo por polarización

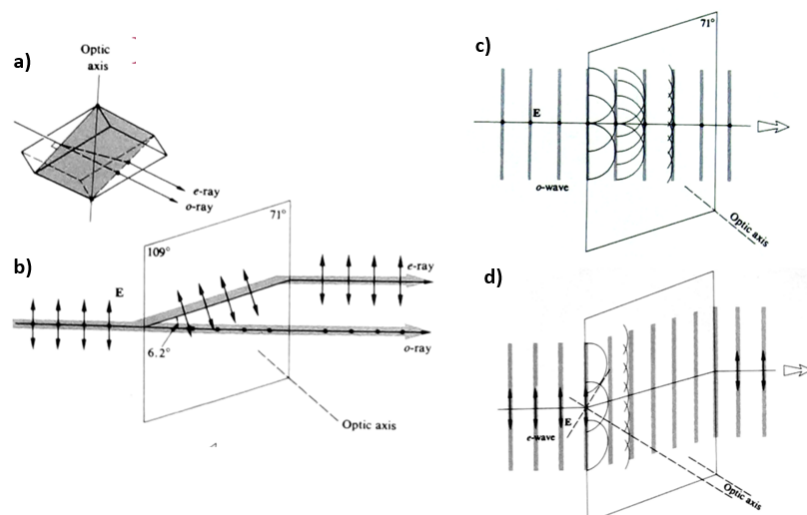


Figura 7.13: Esquema de la lámina birefringente uniaxial, en donde se observa el plano principal (a), y la refracción de los haces ordinario y extraordinario (b), mostrando además los casos separados para el haz ordinario (c) y extraordinario (d).

según sea paralela o perpendicular al plano principal, como se muestra en la Fig. 7.13a,b. El haz ordinario, viaja con su polarización perpendicular al plano principal (y por lo tanto perpendicular al eje óptico), no se desvía y viaja con velocidad $v_{\perp} = c/n_o$. En cambio el haz extraordinario, tiene polarización paralela al plano principal. Entonces, el campo eléctrico se puede descomponer según sea paralelo o perpendicular al eje óptico. Si es perpendicular al eje óptico, viaja con $v_{\perp} = c/n_o$. Si es paralelo al eje óptico viaja con $v_{\parallel} = c/n_e$. Por ello, se desvía. Como consecuencia, al colocar una calcita sobre un papel escrito, se producen imágenes dobles, polarizadas perpendicularmente (Fig. 7.14).

Para pensar antes de la clase: En la clase vas a tener disponibles calcitas y polarizadores y algunos objetos por descubrir. Te proponemos pensar en algunos experimentos:

- Que experimento podés hacer para estudiar la polarización por reflexión? - Como determinarías cual es el eje de transmisión del polarizador?
- Que experimento podes hacer para estudiar si la luz dispersada es parcialmente polarizada?.
- Como están polarizados los haces ordinario y extraordinario en la calcita?



Figura 7.14: Dobles refracciones en la calcita

7.3. Detectores de luz

Existen numerosos dispositivos capaces de detectar luz, y convertirla en señales eléctricas. Entre ellos encontramos a los fotodiodos, fotoresistencias, fototransistores, cámaras CCD/CMOS, etc (Fig. 7.15). En la segunda parte de la materia usaremos fotodiodos y CCDs (detectores 2D que contienen NxM fotodiodos).



Figura 7.15: Ejemplos de distintos detectores de luz

Los fotodiodos son detectores que se basan en la tecnología de los semiconductores. Al absorber un fotón de luz con determinada energía, electrones que están en la banda de valencia del material son promovidos a la banda de conducción. Esos electrones pueden ahora transportarse en el circuito eléctrico de medición generando de una corriente que es posible medir. La relación $R = P/I$ entre la potencia lumínica absorbida $P[W]$ (energía/tiempo) y la corriente generada $I[A]$ se conoce como responsividad, fotosensitividad, respuesta espectral, etc, depende de la longitud de onda (energía de los fotones) y del material del fotodiodo (Fig. 7.16). Como se puede observar en la figura, existen fotodiodos con respuesta en diversos rangos espectrales según el material del que estén constituidos.

La mínima corriente que puedo medir, se conoce como corriente de oscuridad (I_{dark}), y está generada esencialmente por el movimiento térmico de los electrones. Por otra parte, la relación entre la potencia lumínica $P(W)$ o la intensidad $I(Wcm^{-2})$ y la señal medida

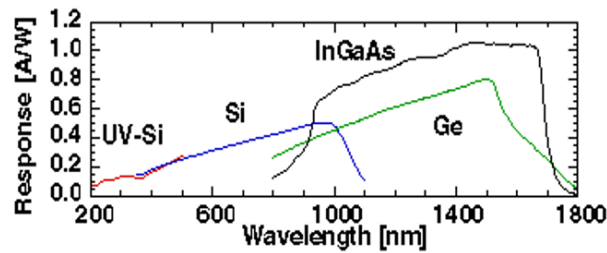


Figura 7.16: Responsividad típica en A/W para distintos materiales en función de la longitud de onda

en el fotodiodo, depende del circuito al que este esté conectado, pero típicamente tiene un comportamiento lineal y una saturación (I_{sat}) (7.17).

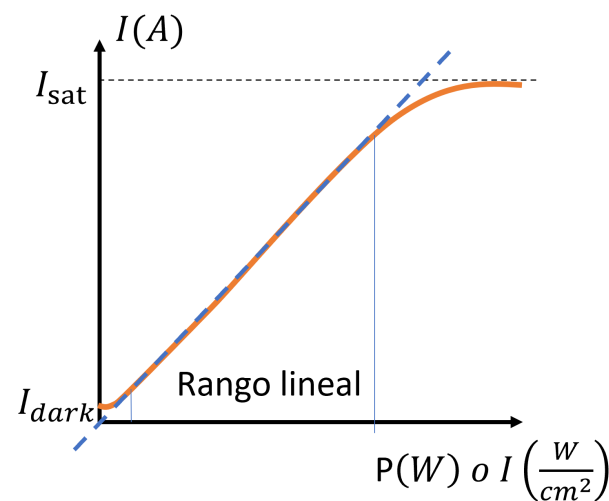


Figura 7.17: Esquema de la corriente (en A) típica medida en un fotodiodo, en función de la potencia o intensidad incidente

Pensar un experimento: Si queremos hacer experimentos con los fotodiodos detectando variaciones de intensidad y queremos hacer estudios comparativos, necesitamos saber como es la calibración de corriente en función de intensidad de luz. Para esto necesitamos generar variaciones conocidas de intensidad. Que fenómeno o elementos ópticos podés usar para variar la intensidad controladamente? Como harías entonces el experimento?

7.4. Características de los láseres

En esta parte de la materia vamos a estudiar algunas características de los láseres. La palabra láser es en realidad un acrónimo que significa Light Amplification by Stimulated Emission Of Radiation. En líneas generales, un láser está compuesto por un medio activo

o de amplificación, un bombeo y una cavidad resonante, como se esquematiza en la Fig. 7.18. El bombeo, puede ser eléctrico (como en los punteros láser) u óptico (una lámpara flash u otro láser). Su función es proveer energía al medio activo. El medio activo es típicamente un material que es capaz de amplificar luz. La conservación del momento de los fotones hace que las ondas que se generan en el medio estén en fase con las ondas incidentes, por lo que la radiación láser resulta **coherente**. Además, como solo algunos niveles de energía del material son capaces de generar amplificación, la emisión es muy **monocromática**.

La cavidad resonante, es una cavidad óptica, como por ejemplo una cavidad de Fabry Perot que está formada por dos espejos (uno de ellos tiene alta reflectividad, el otro deja salir un porcentaje pequeño de la luz presente en la cavidad). La cavidad se usa principalmente para acumular energía hasta que las condiciones de laseo se cumplan y el láser empiece a funcionar: esto es que la ganancia que provee el medio activo, supere las pérdidas dentro de la cavidad (reflectividad en los espejos, absorción en los materiales). La luz puede reflejarse sucesivas veces solo en la dirección perpendicular a los espejos, un haz que está desviado respecto a esa dirección, va a salir de la cavidad luego de algunas reflexiones. Es por esto, que la amplificación se da principalmente en esa dirección, y por lo tanto el láser sale de la cavidad **colimado**, con una divergencia muy pequeña ($< 10\text{mrad}$). En la Fig. 7.19a, podemos ver un esquema de un láser en donde se observa que el haz láser y se va expandiendo a medida que se propaga. La **polarización** en los láseres típicamente se obtiene poniendo una ventana (vidrio con gran calidad óptica y transparente) en ángulo de Brewster dentro de la cavidad o usando como bombeo un láser polarizado.

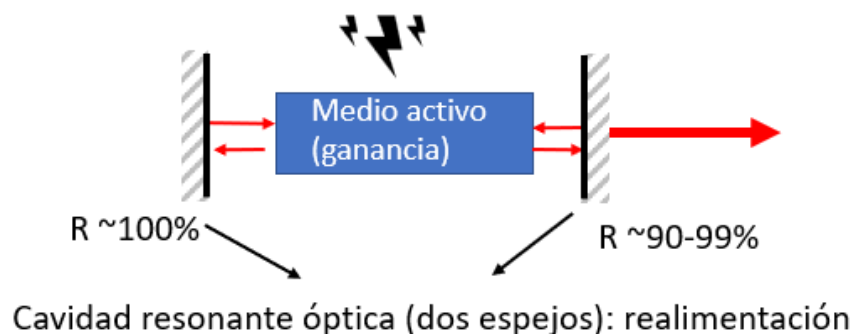


Figura 7.18: Esquema simplificado de un láser, en donde se muestra una cavidad óptica formada por dos espejos, un medio activo o amplificador. El haz láser emerge de la cavidad colimado.

Tal como vimos en las prácticas de ondas estacionarias (cuerdas y tubos), en una cavidad óptica también tenemos modos porque la luz está confinada entre dos espejos; en este caso hablamos de modos longitudinales. Los modos longitudinales que pueden propagarse en la cavidad son aquellos que además tengan frecuencias en el espectro de ganancia del medio activo, las ondas con frecuencias fuera del espectro de ganancia no

son amplificadas. Además, como los espejos tienen un tamaño finito, la luz también está confinada en la dirección perpendicular a la de la cavidad. Por tal motivo, aparecen también los modos transversales, que son quienes le dan la estructura a la distribución de intensidad en el plano perpendicular a la dirección de propagación. El modo más bajo, se conoce como TEM_{00} y tiene forma de una función gaussiana (modo gaussiano). Por esta razón, si ponemos un papel en frente del láser vemos una distribución espacial de intensidad como la que se observa en la Fig. 7.19b. Si graficamos la intensidad sobre un corte de esa figura (línea blanca), observamos que la forma funcional es gaussiana, como se muestra en la Fig. 7.19c.

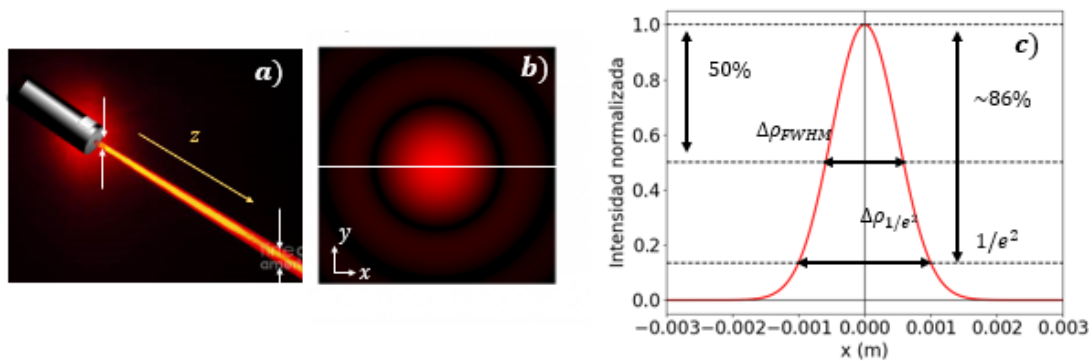


Figura 7.19: Esquema de un láser que se propaga (a), y como lo observamos cuando este incide normalmente sobre una pantalla b). c) Perfil sobre la línea blanca de la figura b)

La expresión de la intensidad de un haz gaussiano que se propaga en la dirección z se puede escribir como

$$I(r, z) = I_o \left(\frac{\omega_o}{\omega(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{\omega(z)^2}} \quad (7.9)$$

donde I_o la intensidad máxima cuando $z = 0$, ω_o es el tamaño de la cintura del haz (el tamaño transversal más chico del haz), $r^2 = x^2 + y^2$ es la distancia medida desde el centro del haz, y $\omega(z)$ el tamaño del haz a medida que este se propaga, y viene dado por la expresión

$$\omega(z) = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z_r}{z} \right)^2} \quad (7.10)$$

donde $z_r = \pi\omega_o^2/\lambda$ se conoce como parámetro de Rayleigh o confocal, que es la distancia longitudinal en la que el haz se mantiene enfocado. En la Fig. 7.20a se observa un corte a lo largo de la dirección z , en donde se esquematizan los parámetros mencionados. Además se observa en los perfiles de intensidad en distintas posiciones a lo largo del eje z (Figs. 7.20b-d) que a medida que nos alejamos de la posición en donde se encuentra la cintura (Fig. 7.20b), el haz gaussiano se achata en intensidad y se ensancha. En el caso de un haz gaussiano ideal (ojo esto no siempre es cierto!), se puede hallar una expresión para la divergencia dada por

$$\theta = \lambda/\pi\omega_o, \quad (7.11)$$

pero experimentalmente conviene usar otras formas de medir, como se verá más adelante. La dispersión angular total es entonces $\Theta = 2\theta$.

Podemos definir algunos parámetros para caracterizar el ancho de la distribución de intensidad. Una forma es a partir de medir el ancho de la gaussiana a la mitad de su altura (ancho mitad altura (FWHM)), es decir el ancho cuando $I(r, z) = I_{max}/2$, donde I_{max} es la intensidad máxima, obteniéndose

$$\Delta\rho_{FWHM} = \frac{1}{2}\sqrt{2\ln(2)}\omega(z) \quad (7.12)$$

Otra forma puede ser medir el ancho cuando la intensidad cae en $1/e^2$, que representa aproximadamente el 86 % de la intensidad, es decir cuando $I(r, z) = I_{max}/e^2$, a partir de lo que se obtiene que

$$\Delta\rho_{1/e^2} = 2\omega(z) \quad (7.13)$$

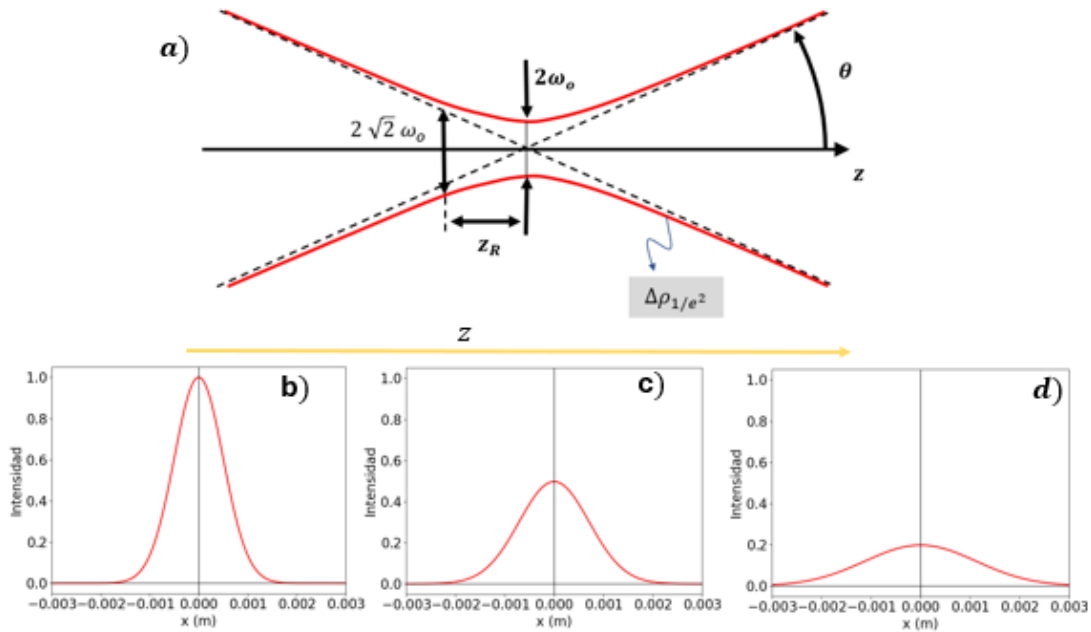


Figura 7.20: a) Corte longitudinal de un haz gaussiano, en donde se muestra la cintura de tamaño $\sim 2\omega_o$, divergencia θ y parámetro de Raileigh z_r . b-d) Perfil del haz para posiciones que se alejan de la cintura.

En resumen, los láseres se caracterizan por ser:

- Direccionales
- Colimados (divergencia 1-10 mrad)
- Monocromáticos

- Coherentes
- Polarizados (la mayor parte de los casos)
- Típicamente gaussianos.
- Estabilidad temporal (esta es nueva :))

En consecuencia de la direccionalidad y colimación, toda su potencia (P), está concentrada en un área pequeña, y en un ángulo sólido Ω que es también muy pequeño. Por ese motivo, tiene gran brillo

$$B = \frac{P}{A\Omega} \left[\frac{W}{\text{cm}^2 \text{sr}} \right]. \quad (7.14)$$

En esta ecuación, A es el área del haz en su punto más estrecho, es decir, se puede calcular en la cintura $A = \pi \omega_o^2$, y el ángulo sólido, se puede calcular como el ángulo sólido de un cono como

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos(\theta) \right) \sim 2\pi \theta^2 [\text{sr}]. \quad (7.15)$$

Veamos como caracterizar algunas de las magnitudes descriptas anteriormente: colimación, polarización, distribución espacial de intensidad, estabilidad temporal, divergencia. Dejamos para más adelante la coherencia y monocromaticidad (espectro).

7.4.1. Polarización

Para estudiar la polarización del láser, podemos emplear un polarizador lineal y caracterizar el **contraste o grado de polarización**. Supongamos que tenemos una fuente de luz, cuya polarización es quasi lineal (una elipse con su eje mayor mucho más grande que el menor). Si usamos al analizador podemos determinar dos intensidades:

1. La intensidad máxima I_{max} que corresponde al eje del analizador paralelo al eje mayor.
2. La intensidad mínima I_{min} , que corresponde aleje del analizador paralelo al eje menor.

A modo de cuantificar la linealidad en la polarización, definimos como contraste de polarización a

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (7.16)$$

Cuanto más cercano a 1 sea ese número, más lineal es la polarización.

7.4.2. Estabilidad Temporal

La estabilidad temporal en un láser continuo, significa que su potencia o intensidad se mantiene estable en el tiempo. Las causas de falta de estabilidad del láser pueden ser externas como las variaciones de temperatura, humedad, vibraciones, fluctuaciones de la

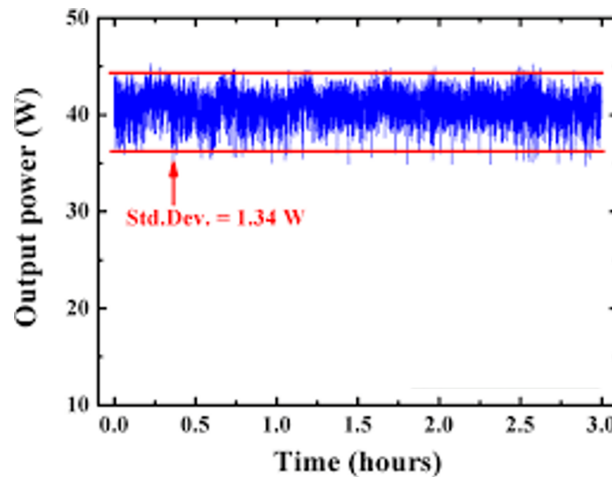


Figura 7.21: Medición típica de la potencia del laser en función del tiempo

fuelle de alimentación; como internas, como la competencia de modos, la realimentación, el desgaste por años de uso.

Si tenemos un detector de luz con resolución temporal adecuada, simplemente podemos medir en el tiempo como fluctúa la señal medida durante un tiempo determinado. Supongamos que medimos algo similar a lo que se observa en la Fig. 7.21. Podemos caracterizar estas fluctuaciones con su amplitud rms (ΔV_{RMS}) respecto a la amplitud media. La estabilidad pico a pico se refiere a la diferencia porcentual entre el valor máximo y mínimo de la potencia o energía de salida y el valor promedio de la potencia o energía. También podemos caracterizar las fluctuaciones de la señal ΔV en comparación con el valor medio V , para saber si estas son importantes o no, definiendo la relación señal-ruido

$$SNR = \frac{V}{\Delta V} \quad (7.17)$$

7.4.3. Distribución espacial de intensidad

Para caracterizar como es la distribución de intensidad en la dirección transversal a la propagación, podemos usar varias técnicas. Ambas necesitan de detectores calibrados en intensidad.

Cámara. Se puede usar una cámara para tomar una foto de la distribución espacial de intensidades. Se puede sacar la foto del láser incidiendo sobre un papel y tomar una escala para calibrar pixel en distancia. Si quiero hacer mediciones comparativas en intensidad, además necesito hacer una calibración en intensidades. Como lo harías?

Método de la gillete o del borde filoso. Se puede determinar como varía la intensidad en una dirección empleando un dispositivo como el que se muestra en la Fig. 7.22. Un borde filoso interrumpe el haz, dejando pasar otra parte del mismo que es colectada en un detector. Para asegurar que toda la luz sea colectada, también se puede usar una lente entre el borde filoso y el detector. El borde filoso se encuentra ubicado sobre un

posicionador con tornillo micrométrico (unidad de traslación), de manera que es posible desplazarlo a través del haz y medir la intensidad en cada posición.

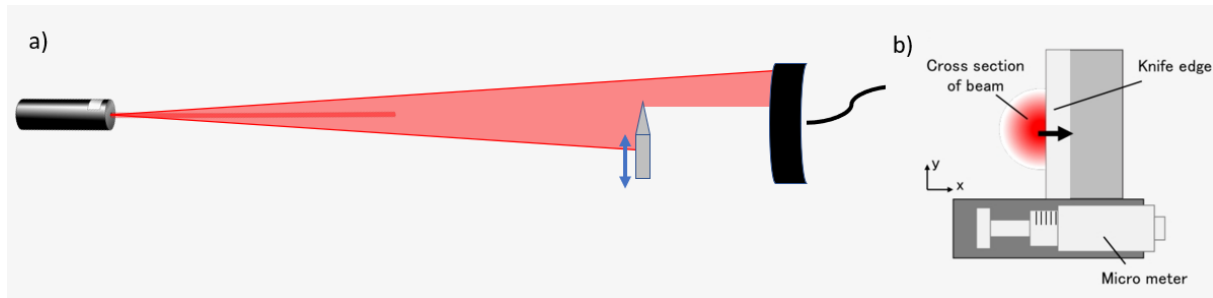


Figura 7.22: Esquema experimental para la medición del perfil del haz empleando la técnica del borde filoso.

La cuestión está ahora en entender cual es el resultado de esa medición. En primer lugar observamos que si tenemos totalmente tapado el haz, no medimos señal. A medida que vamos destapando el haz cada vez medimos una señal mayor, hasta que está totalmente destapado y medimos la señal máxima. Este procedimiento, por el cual se va sumando acumulativamente la intensidad para posiciones en aumento del borde filoso, es justamente lo que hace la operación integral. Es decir, lo que estamos midiendo, es la integral del perfil de intensidad. Por lo tanto podemos escribir a la señal medida como la integral de una gaussiana

$$P(x) = \frac{P_{max}}{2} (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{2}x/\omega)) \quad (7.18)$$

y tomando la derivada $dP(x)/dx$ obtenemos $I(x) = I_{max} \exp(-2x^2/\omega)$

Pensar: Desde el punto de vista del análisis de datos, conviene derivar los datos o ajustar por la expresión integral? Por que?

7.4.4. Divergencia

La divergencia es el ángulo con el cual el haz se abre a medida que se propaga. Como vimos anteriormente este ángulo se relaciona con el tamaño de la cintura del haz: cuanto más chica la cintura, mayor divergencia (te suena difracción?). El problema que tenemos con los láseres, es que es difícil determinar en donde está la cintura, ya que el parámetro confocal es muy largo (sino no estaría casi colimado por distancias muy largas). Para determinar *theta* la divergencia, entonces necesitamos realizar dos mediciones muy distantes del tamaño del haz y emplear argumentos geométricos. Como lo harías?

Según la expresión 7.10, si tenemos dos mediciones de $\omega(z)$ para dos posiciones z podemos obtener expresiones para z_r y ω_0 . Una vez hallados estos parámetros podemos calcular

$$M^2 = \omega_o \theta \pi / \lambda \quad (7.19)$$

Este parámetro, según la ecuación 7.11, para un haz gaussiano ideal, debería valer $M^2 = 1$. Si $M^2 = 1$ el haz es gaussiano ideal. Si $M^2 > 1$ el haz diverge o converge más que el ideal. Como es en el caso del experimento del láser que estas usando?

7.4.5. Brillo

Si realizaste todos los items anteriores, ahora deberias tener ω_o , θ , M^2 . Podes estimar al brillo a partir de la ecuación 7.14 como

$$B = \frac{P}{A\Omega} = \frac{P}{\pi\omega_o^2\pi\theta^2} \quad (7.20)$$

ver que en el caso de que el haz gaussiano sea ideal, el brillo es $B = \frac{P}{\lambda^2}$, mientras que si el haz gaussiano no es ideal $B = \frac{P}{M^4\lambda^2}$

Resumen de la clase 1 óptica:

- Tendrás disponibles polarizadores, cristales birrefringentes, polímeros deformados, filtros, etc.
- Podrás analizar con dichos elementos los fenómenos que polarizan la luz.
- Caracterizarás la respuesta de detectores de luz en función de la intensidad incidente.
- Caracterizarás un láser: polarización, distribución espacial de intensidad, estabilidad temporal, divergencia, brillo.

Capítulo 8

Difracción

El fenómeno de difracción se observa con gran frecuencia en la naturaleza, por ejemplo, cuando los haces del sol atraviesan las nubes, el arco iris que se forma en un CD. Las estrellas no tienen naturalmente puntas, las puntas son la difracción en los distintos diafragmas de las cámaras. En los ojos tenemos lo que se conoce como líneas de suturas, que hace que veamos fuentes lejanas con difracción (Fig. 8.1). Por supuesto que la difracción no solo es atributo de ondas electromagnéticas, sino de cualquier tipo de ondas, por ejemplo, las que se ven en las playas de Tel Aviv (Fig. 8.1). Por otra parte, el fenómeno de difracción tiene muchísimos usos en la ciencia, por ejemplo se usa para medir partículas de cientos de nanómetros a algunos micrones, en medicina para hacer “delivery de drogas”, para medir tamaño de gotas (asi se midieron los sprays pulmonares o nasales durante la pandemia debida al COVID!).

En este capítulo, vamos a estudiar entre otras cosas cómo uso la difracción para medir tamaños de objetos muy pequeños? cuáles son las ventajas de usar difracción y de donde surgen dichas ventajas?

A continuación revisaremos algunos conceptos sobre difracción, si los tenes claros puedes saltar al experimento directamente. El objetivo es entender los conceptos más allá de resolver las cuentas, y entender cuáles son las aproximaciones importantes que se hacen para entender la difracción.

8.1. La integral de Kirchhoff

Kirchhoff (1882) encontró la solución de la ecuación de Maxwell para un frente de ondas plano que atraviesa una apertura

$$U(P) = \iint_S \left(\frac{-i}{\lambda} \right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} (\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1) ds \quad (8.1)$$

Mediante esta ecuación, si conocemos la distribución de campo $U(P')$ en los punto P' de una superficie, podemos calcular el campo $U(P)$, luego de que la onda se propagó hasta un punto $P = (x, y, z)$ arbitrario del espacio. También podemos calcular como la luz se

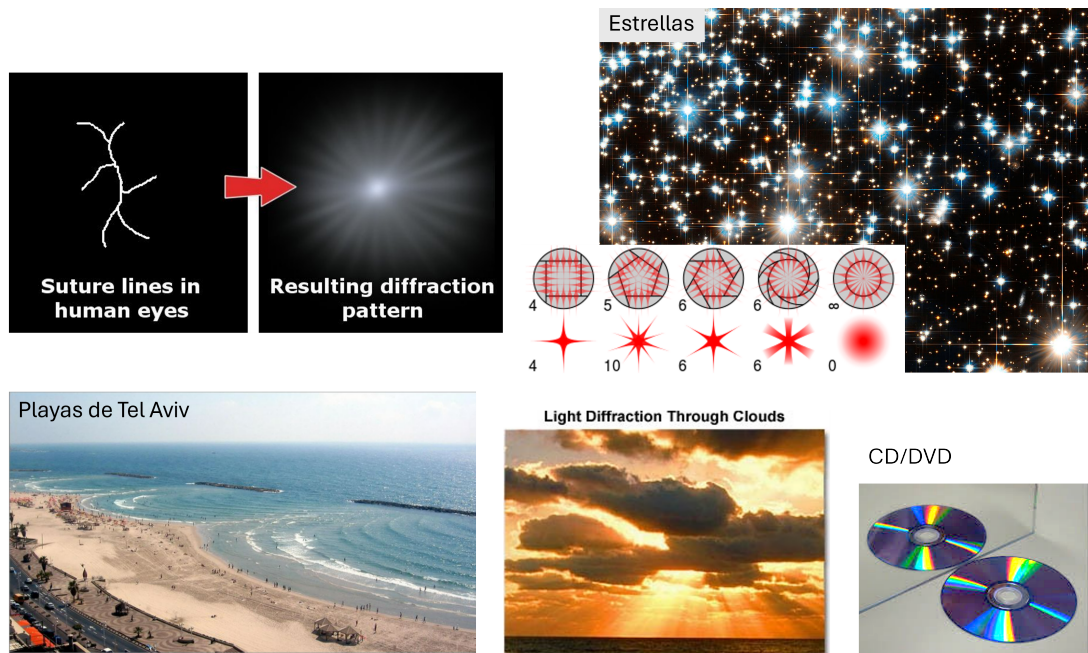


Figura 8.1: Ejemplos de la naturaleza en donde observamos difracción

propaga a través de distintos objetos. En particular podemos calcular como se difracta en una apertura de geometría arbitraria, como la que se esquematiza en la Fig. 8.2. Se ilumina una apertura de manera que se genera una distribución de intensidad $U(P')$ sobre la apertura. Es decir el campo valdrá $U(P')$ en los puntos $P' = (x', y', 0)$ sobre la apertura y cero fuera. Queremos calcular la distribución de intensidad en un punto P sobre el plano xy que se encuentra a una distancia d de la apertura. La coordenada r va desde el punto el punto P' en la máscara al punto P , y podemos escribir su módulo en función de las coordenadas cartesianas como

$$r = \sqrt{d^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (8.2)$$

Analicemos primero el significado de la parte de la ecuación pintada de rojo. En primer lugar podemos identificar una onda esférica emitida desde el punto P' , e^{ikr}/r . La amplitud de esta onda es la intensidad de la onda incidente en el punto P' reducida en λ : $U(P')/\lambda$ y desfasada en -90° ($-i$).

Si esquematizamos el término pintado en azul, vemos que es 1 cuando el ángulo entre $\hat{r}$ y la normal $\hat{n}$ es 0° y nulo cuando ese ángulo es 180° . Lo que nos dice este término entonces, es que esta ondita esférica que parte del punto P' en realidad emite más hacia adelante. A este término se lo conoce como factor de oblicuidad.

Si ahora hacemos la integral, lo que estamos diciendo es que de cada punto en la apertura, parte una onda esférica que emite preferentemente hacia adelante. Al realizar la integral, estamos superponiendo (interferencia) todas esas onditas que parten de la apertura. No estamos diciendo otra cosa, que la difracción es un fenómeno de interferencia.

Esto justamente constituye el principio de Huygens-Fresnel (1818): El campo en cual-

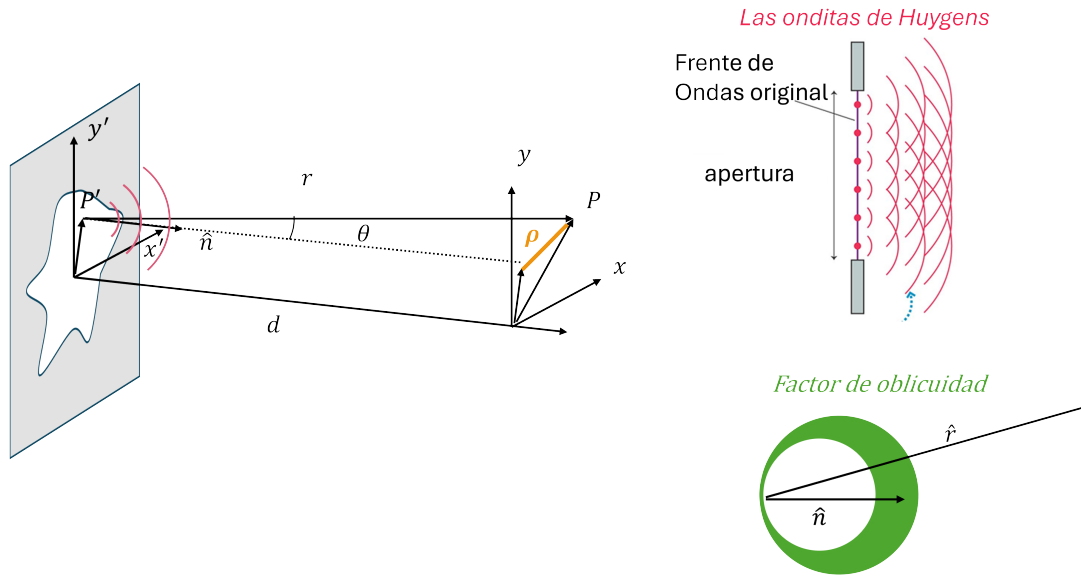


Figura 8.2: Esquema de una ranura de forma arbitraria en donde se indican los distintos sistemas de coordenadas. Arriba a la derecha, se observa un esquema de la superposición de ondas esféricas y abajo a la derecha un esquema del factor de oblicuidad.

quier punto del espacio se obtiene como la **superposición (es decir, interferencia)** de las “onditas esféricas secundarias” generadas en cada punto de la apertura. Solo que Kirchhoff agregó que estas onditas se emiten preferentemente hacia adelante (el factor de oblicuidad)

La integral de la ecuación 8.1 es muy difícil de resolver, pero se simplifica si hacemos algunas aproximaciones, como se muestra a continuación.

8.1.1. Aproximación de Fresnel

La primera aproximación que podemos hacer es la paraxial. En esta aproximación se considera que las distancias involucradas en el plano donde se mide ρ son mucho más chicas que la distancia de propagación d (es decir que los haces son casi paralelos al eje óptico). Esto se cumple si estamos observando en posiciones cercanas a la rendija, en donde los haces aun no se desviaron demasiado. Ver que en términos de ρ , r se puede escribir como

$$r = \sqrt{d^2 + \rho^2} \quad (8.3)$$

siendo $\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ (ver Fig. 8.2). Si $\rho \ll d$ entonces podemos hacer un desarrollo de Taylor en r ,

$$r = d \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{d}\right)^2} \sim d \left(1 + \frac{\rho^2}{2d^2}\right) + \mathcal{O}(2). \quad (8.4)$$

Para implementar esta aproximación, en primer lugar, vamos a reescribir la ecuación 8.1 usando que $\cos(\hat{n}, \hat{r}) = d/r$

$$U(x, y) = \iint_S \left(\frac{-i}{\lambda} \right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r} + 1 \right) ds \quad (8.5)$$

Luego, dado que los términos con $1/r$ varían mucho más lento que los términos exponenciales de fase, vamos a aproximar $r \sim d$ (Taylor orden 0) en el numerador, y vamos a considerar Taylor orden 1 en la exponencial. De esta manera, usando la definición para ρ^2 dada anteriormente, obtenemos lo que se conoce como integral de Fresnel

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda} \right) e^{ikd} \iint_S U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy' \quad (8.6)$$

Hacemos un poquito más de cuentas para llegar a un resultado importante y terminamos con Fresnel :). Ahora vamos a desarrollar el cuadrado en la potencia, con el objetivo de dejar dentro de la integral solamente las variables primadas, obteniendo

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda} \right) e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \iint_S U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{d}(xx' + yy')} dx' dy' \quad (8.7)$$

Este resultado es muy interesante, porque si observamos el término que depende de xx' e yy' , notamos que se parece mucho al factor de una transformada de Fourier. Entonces vemos que podemos escribir a la integral de Fresnel como una transformada de Fourier de la función $U'(x', y')$ (que es la que está pintada en rojo en la ecuación anterior), evaluada en las variables $x/\lambda d$ e $y/\lambda d$

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda} \right) e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} \right\} = F \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d} \right) \quad (8.8)$$

Esta ecuación me dice entonces que en la aproximación Fresnel, puedo calcular el campo haciendo la transformada de Fourier de la distribución de campo en la apertura, agregando una fase cuadrática. Notar que si quiero calcular la intensidad, los factores de fase fuera de la transformada dejan de tener relevancia, ya que desaparecen al tomar módulo cuadrado.

A modo de ejemplo, en la Fig. 8.3 se observan simulaciones numéricas de la difracción por distintas aperturas, en la aproximación de Fresnel y en la aproximación de Fraunhofer (que veremos pronto).

En las dos secciones siguientes vamos a intentar deshacernos de la fase cuadrática de dos maneras.

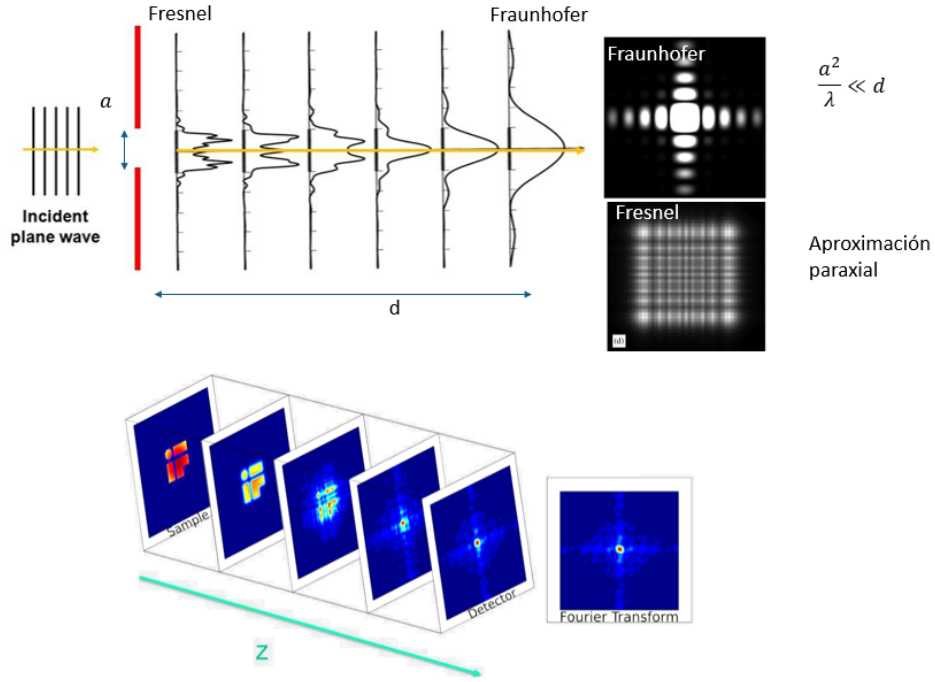


Figura 8.3: Difracción por distintas rendijas mostrando las como luce en la aproximación de Fresnel y Fraunhofer.

8.1.2. Aproximación de Fraunhofer

Queremos lograr que $e^{ik(x'^2+y'^2)/2d}$ sea aproximadamente 1, para eso vamos a hacer que el exponente sea muy chico, lo que implica $d \gg k(x'^2+y'^2)/2$. Como los puntos (x', y') son posiciones en la apertura, podemos acotarlos por un tamaño característico, por ejemplo $(x'^2+y'^2) \sim A$ donde A es el área de la apertura. Entonces obtenemos $d \gg kA/2$, y la integral de Fresnel se reduce a

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') \right\} \quad (8.9)$$

en donde omitimos todos los factores de fase y constantes para no perder de vista nuestro objetivo.

Arribamos a una conclusión importante, en la aproximación de Fraunhofer (campo lejano), el campo no es más que la transformada de Fourier del campo de la apertura.

8.1.3. El truco de la lente

Supongamos ahora que queremos calcular el campo que atraviesa la apertura y a continuación una lente convergente. La función transmisión de la lente es simplemente una variación de fase cuadrática, por lo que la podemos escribir como

$$T(x, y) = e^{-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)} \quad (8.10)$$

en donde f es la distancia focal. Para escribir el campo en un punto arbitrario (x, y, d) agregamos $T(x, y)$ en la Eq. 8.8

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2 + y'^2)} e^{\frac{ik}{2d}(x'^2 + y'^2)} \right\} \quad (8.11)$$

en donde para no perder de vista nuestro objetivo, obviamos todos los factores multiplicativos. Si ahora queremos calcular el campo en el plano focal de la lente, basta con tomar $f = d$ en la ecuación anterior. En ese caso, los factores de fase se cancelan, obteniendo

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') \right\} \quad (8.12)$$

Arribamos ahora a una segunda conclusión muy importante:

la difracción de Fraunhofer se encuentra tanto en el campo lejano (Eq. 8.9) como en el foco de una lente (Eq. 8.12). Esta situación se encuentra esquematizada en la figura 8.4

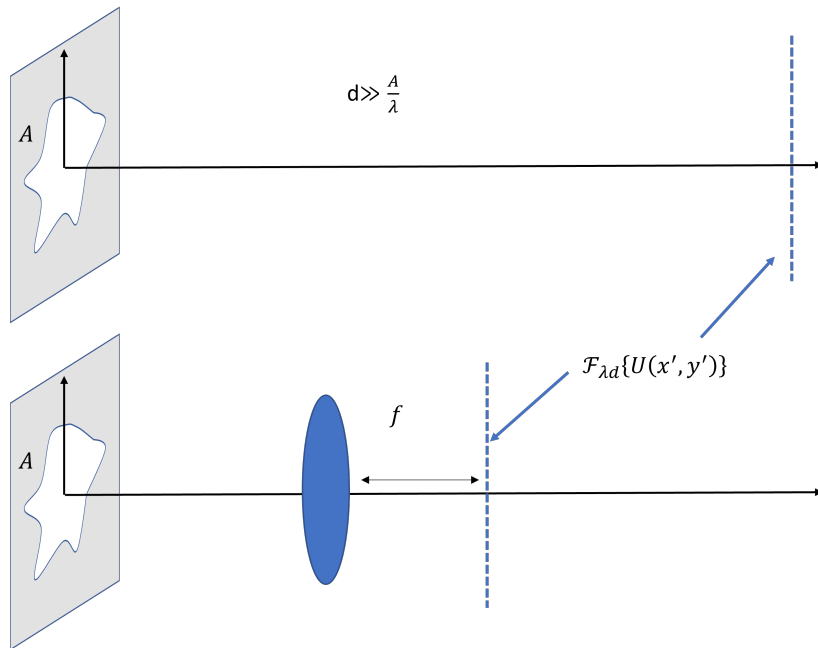


Figura 8.4: Esquema que muestra que la difracción en campo lejano es equivalente al campo en el foco de la lente

8.2. Difracción por una rendija rectangular

Vamos a estudiar en la materia, la difracción por una rendija rectangular de tamaño a , que se encuentra esquematizada en la figura 8.5.

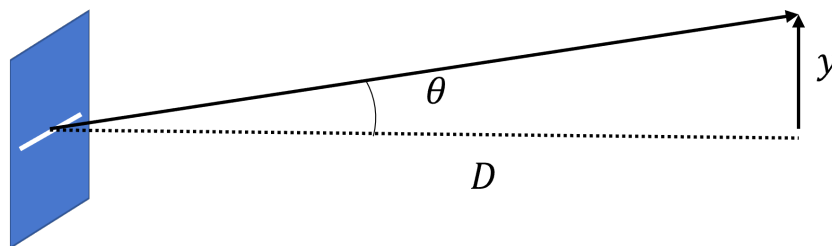


Figura 8.5: Difracción por una rendija rectangular en donde se muestran las variables de interés para el problema: θ ángulo de difracción, D distancia entre la pantalla y la rendija, y posición medida en la pantalla

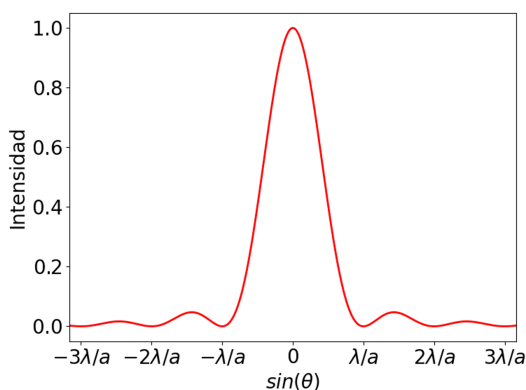
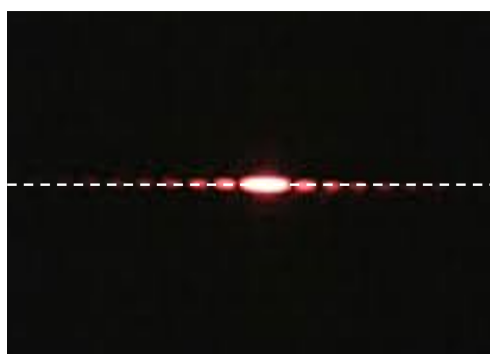


Figura 8.6: Figura de difracción y perfil de la misma tomado sobre la línea punteada blanca

Ya estudiaron en Física 2 que la expresión analítica de la intensidad $I(\theta)$ de la figura de difracción en función del ángulo θ es

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\delta)}{\delta^2}, \quad (8.13)$$

siendo $\delta = \pi a \sin(\theta)/\lambda = \pi a y/D\lambda$. En la figura 8.6 se puede observar una foto de una figura de difracción, y el resultado de la expresión anterior, que, experimentalmente equivale a medir la intensidad en los puntos sobre la línea blanca. La figura de difracción tiene mínimos situados en donde se encuentran los ceros de la función seno, es decir, cuando $\delta = n\pi$ con n un entero, es decir cuando $\sin(\theta) = y/D = n\lambda/a$

A partir de esta expresión podemos hacer observaciones importantes (y bastante generales). En primer lugar, podemos observar que haces con menor longitud de onda, difractan más. En la figura 8.7, podemos observar la figura de difracción producida por una fuente de luz blanca, y las figuras de difracción que resultan de filtrar longitudes de onda en la misma figura.

Pensar: En la figura de difracción de la fuente de luz blanca se observan colores

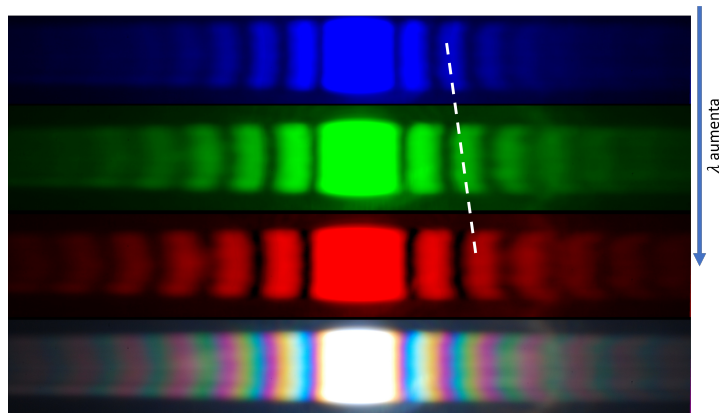


Figura 8.7: Difracción de luz blanca por una rendija rectangular y su descomposición en colores RGB

cian, magenta y amarillo (CMY). Sin embargo los colores originales son rojo, verde y azul (RGB). Porque se ve CMY?

En segundo lugar podemos relacionar el tamaño de la rendija con la extensión de la figura de difracción: vamos que cuanto más chica es la rendija, la figura de difracción es más extensa. Esto tiene mucha lógica si pensamos que la difracción de Fraunhofer es una transformada de Fourier de la rendija, y las coordenadas relacionadas por la transformada (x y $\xi = x'/\lambda d$ en este caso) siempre cumplen una relación de incerteza $\Delta x \Delta \xi > cte$: si la rendija es muy chica, $\Delta \xi$ es muy chico, entonces Δx es muy grande.

Experimental: En la experiencia de difracción, vamos a medir el tamaño de la rendija a partir de la figura de difracción y vamos a comparar el tamaño obtenido con el que midamos con un microscopio. Hay muchas maneras de medir y caracterizar a la figura de difracción:

- 1) Marcar en un papel la posición de los mínimos y medir la posición del mínimo en función del número de mínimo. Obtener a a partir de la pendiente de la recta (necesito además λ).
- 2) Sacar una foto de la figura de difracción, para determinar la posición de los mínimos (y seguir como en el ítem anterior). Necesito además, obtener una escala para calibrar pixeles de la cámara en distancia. Las cámaras miden las señales en unidades discretas conocidas como niveles de gris. Para medir intensidad necesitamos saber primero cual es la calibración de la intensidad en nivel de gris, o al menos saber si la relación es lineal. Si obtenemos esta información además podríamos medir el perfil de intensidades. Como podemos calibrar la cámara?

3) Desplazando al Fotodiodo a través de la figura de difracción, relevar la intensidad en función de la distancia. Las consideraciones que necesitamos tener en cuenta para la medición del perfil de intensidad con el fotodiodo son:

- Linealidad de la señal en el fotodiodo con la intensidad (ya lo probaron la clase anterior)

- Muestreo espacial adecuado requiere conocer aproximadamente lo que se quiere medir. Se debe cumplir Nyquist (como mínimo). Cual es el detalle más chico que quiero medir?

- Influencia de la respuesta del detector: La medición es la convolución de la función respuesta del detector y la magnitud a medir. (Revisar capítulo de mediciones).

Pensar como realizarían cada uno de estos experimentos, ustedes ya tienen las herramientas!

8.3. Máscaras complementarias

Nos preguntamos ahora ¿Como se comparan las figuras de difracción producida a partir de dos objetos complementarios, como las de la Fig. 8.8a y b? ¿Cuáles son sus similitudes y sus diferencias?

Puedo conocer el tamaño de las células rojas (Fig. 8.8e) a partir de conocer la difracción por una apertura circular (Fig. 8.8d)?

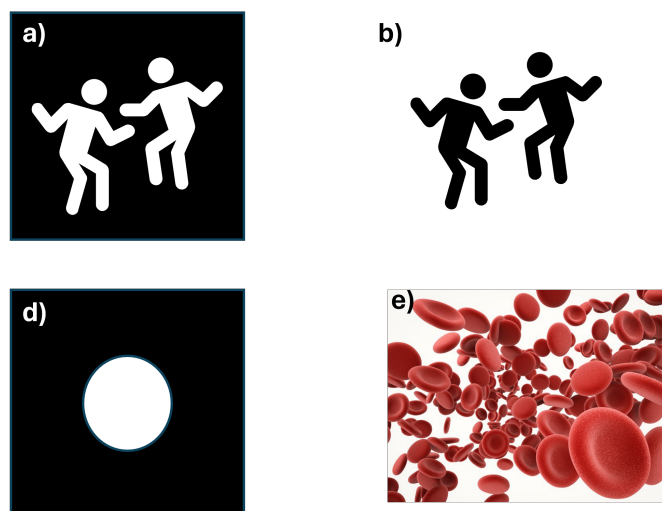


Figura 8.8: Esquema de máscaras complementarias (a y b son complementarias, y d y e también lo son).

En primer lugar escribamos la función transmisión de ambas máscaras, diciendo que

la función transmisión $T(P')$ es 1 si la máscara es transparente y 0 si la máscara es opaca, como se esquematiza en la Fig. 8.9. Luego notamos que la suma de las transmisiones de ambas máscaras es 1, por lo que podemos escribir $T_{A''}(P') = 1 - T_{A'}(P')$. Ahora escribamos la integral de Kirchhoff (Eq. 8.1)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 A' & & A'' \\
 \begin{array}{c} \blacksquare \\ \text{dos figuras blancas} \end{array} & + & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \text{dos figuras negras} \end{array} \\
 & & = \\
 & & \begin{array}{c} A \\ \square \\ \text{un cuadrado blanco} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$T(P') = \begin{cases} 1 & \text{transparente} \\ 0 & \text{opaco} \end{cases} \quad 1 - T(P') \quad 1$$

Figura 8.9: Función transmisión para dos máscaras complementarias y su suma.

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_S U(P') (T_{A'} + T_{A''}) f(P') ds \quad (8.14)$$

en donde llamamos $f(P') = \left(\frac{-i}{\lambda} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} (\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1)$. Luego, distribuyendo la integral

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_A U(P') T_{A'} f(P') ds + \iint_A U(P') T_{A''} f(P') ds \quad (8.15)$$

usando las definiciones de la función transmisión podemos escribir

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_{A'} U(P') f(P') ds + \iint_{A''} U(P') f(P') ds \quad (8.16)$$

En la aproximación de Fraunhofer, podemos aproximar las integrales por transformadas de Fourier

$$U(P) = \mathcal{F}_{\lambda d} \{U_A(P')\} = \mathcal{F}_{\lambda d} \{U_{A'}(P')\} + \mathcal{F}_{\lambda d} \{U_{A''}(P')\} \quad (8.17)$$

Observando que A es un cuadrado por donde pasa luz, sabemos que su transformada es una función *sinc*. Si ese cuadrado es muy muy grande, la *sinc* es muy angosta, de modo que $\mathcal{F}_{\lambda d} \{U_A(P')\} = 0$ salvo en el punto donde incide el laser o sobre la función *sinc* que es muy angosta (casi una delta). De este modo resulta que

$$\mathcal{F}_{\lambda d} \{U_{A'}(P')\} = -\mathcal{F}_{\lambda d} \{U_{A''}(P')\} \quad (8.18)$$

Es decir, las intensidades de ambas figuras de difracción son idénticas en la aproximación de Frounhofer (salvo en el centro de la figura de difracción en el caso de la máscara más transparente, ya que tiene un punto muy luminoso).

Experimental: En esta parte de la experiencia, vamos a comparar la figura de difracción de objetos complementarios. Pensar que objetos podrían usar y como realizar tal comparación.

Capítulo 9

Lentes y sistemas formadores de imágenes

El mundo de la fotografía y la videografía ha sido revolucionado por los intrincados componentes dentro de las lentes de la cámara. Más allá de aparentar ser solo un accesorio, las lentes son la puerta de entrada para capturar imágenes impresionantes. Los arreglos de lentes también permiten tener otros dispositivos de gran calidad, como los telescopios. El rol fundamental de una lente o sistema de lentes en estos dispositivos es proyectar la imagen de un objeto sobre el elemento sensible de la cámara (Fig. 9.1).

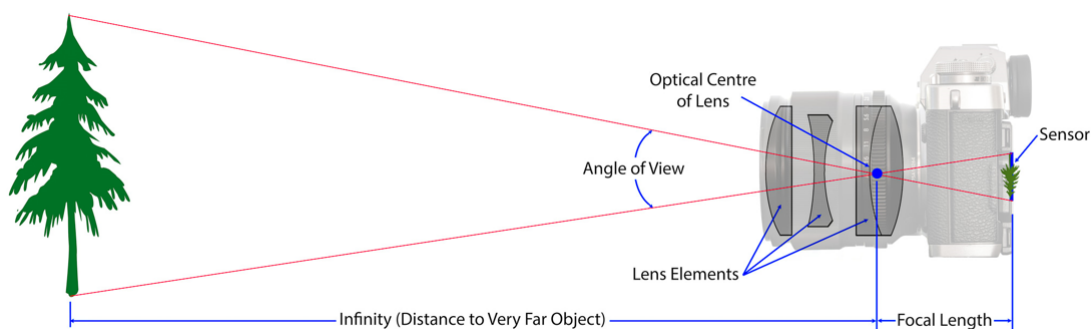


Figura 9.1: Mediante un sistema de lentes, se forma una imagen de-magnificada del objeto en el sensor de la cámara

9.1. Sistemas de lentes simples

Las propiedades ópticas que definen una lente están originadas en su composición estructural, específicamente en su distancia focal, ángulo de campo de visión y apertura relativa.

Podemos clasificar a las lentes como convergentes o divergentes, como se esquematiza en la Fig. 9.2. En el caso de las lentes convergentes (convexas), los haces que inciden paralelos al eje óptico convergen en el plano focal de la misma. En cambio, en la lente divergente, los haces que inciden paralelos al eje óptico divergen, pareciendo provenir de un punto focal virtual, localizado detrás de la lente.



Figura 9.2: El foco de las lentes convergentes (a) y divergentes (b)

9.1.1. La ecuación de la lente, las bases de la óptica geométrica

En el caso de que las lentes sean delgadas, se puede encontrar una relación entre la distancia focal (f), la posición del objeto (S_o) y la posición de la imagen (S_i), conocida como la ecuación de la lente

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (9.1)$$

A la relación entre el tamaño de la imagen (h') y el tamaño del objeto (h) se la conoce como aumento y esta también se relaciona con la posición objeto e imagen como

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{S_i}{S_o} \quad (9.2)$$

En base a la ecuación de la lente, se puede definir el trazado de ciertos haces de luz a partir de los cuales se puede obtener la descripción geométrica de las lentes, como se esquematiza en la Fig. 9.3. Las reglas básicas son:

- El haz de luz que incide paralelamente al eje principal sobre una lente convergente pasa por el foco real, mientras que en una lente divergente, dicho haz parece provenir del foco virtual.
- El haz de luz que pasa por el centro óptico de la lente sigue su trayectoria sin desviarse.
- El haz de luz que incide sobre la lente pasando por el foco real de una lente convergente sale de la lente de manera paralela al eje principal. En una lente divergente, el haz de luz que se dirige hacia el foco virtual sale de la lente paralelamente al eje principal.

9.1.2. Apertura numérica, profundidad de foco y resolución

La apertura numérica (NA) de una lente es una medida de su capacidad para coleccionar luz y resolver detalles pequeños. La apertura numérica se define como:

$$NA = n \sin(\theta)$$

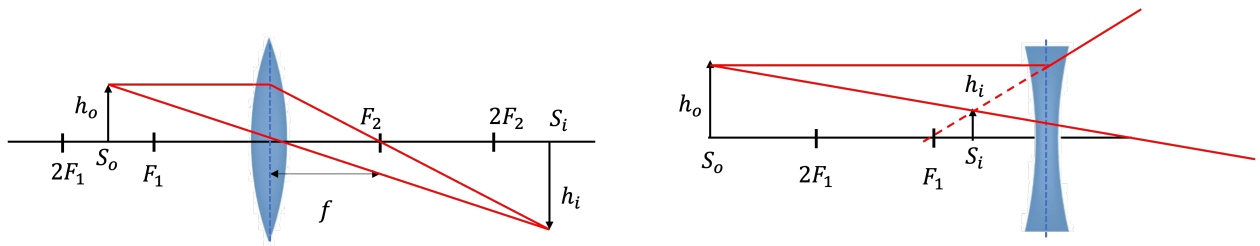


Figura 9.3: Trazado de haces principales en lentes delgadas

donde n es el índice de refracción del medio en el que se encuentra la lente y θ es el ángulo medio de aceptación de la lente. La apertura numérica puede relacionarse con los parámetros de la lente usando que

$$\sin(\theta) = \frac{D}{2f}$$

donde D es el diámetro de la apertura de la lente (o pupila de entrada) y f es la distancia focal.

Una mayor apertura numérica indica que la lente puede coleccionar más luz y tiene una mayor capacidad para resolver detalles pequeños, lo cual es crucial en aplicaciones como la microscopia y la fotografía de alta precisión.

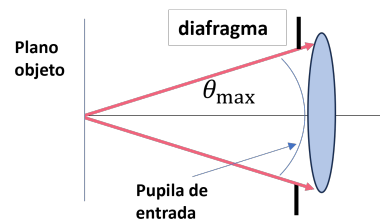


Figura 9.4: Esquema de una lente y como determina el diafragma a la apertura numérica

La capacidad de colección de luz aumenta porque una lente con una mayor NA puede aceptar luz de un ángulo más amplio, lo que significa que más rayos de luz pueden entrar en la lente. Esto resulta en una imagen más brillante y mejor iluminada.

Además, la resolución aumenta con una mayor apertura numérica. La resolución de una lente se refiere a su capacidad para distinguir entre dos puntos muy cercanos. Según el criterio de resolución de Rayleigh, la resolución R es inversamente proporcional a la apertura numérica

$$R = \frac{0,61\lambda}{\text{NA}}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz utilizada. Una mayor NA reduce el valor de R , permitiendo a la lente resolver detalles más finos.

El concepto de profundidad de foco también está relacionado con la apertura numérica. La profundidad de foco es la distancia sobre la cual el sistema óptico puede mantener un

enfoque aceptable. La profundidad de foco está inversamente relacionada con la apertura numérica:

$$\text{Profundidad de foco} \approx \frac{\lambda}{(\text{NA})^2}$$

Una mayor apertura numérica reduce la profundidad de foco, lo que significa que el rango de distancias en el que la imagen permanece nítida es más pequeño. Esto puede ser una ventaja o una desventaja, dependiendo de la aplicación: en microscopía, una menor profundidad de foco permite enfocar en detalles muy específicos dentro de una muestra tridimensional. En fotografía una menor profundidad de foco permite resaltar el objeto principal enfocado mientras que el resto de los objetos en otros planos están borrosos.

En resumen, una mayor apertura numérica mejora la capacidad de colección de luz y la resolución, permitiendo a la lente captar imágenes más brillantes y detalladas. Sin embargo, también reduce la profundidad de foco, restringiendo el rango de distancias a lo largo de las cuales la imagen permanece enfocada.

Experimental 1: En la experiencia de lentes vamos a estudiar primero lentes delgadas. En particular van a disponer de una fuente LED, una máscara para usar de objeto, un diafragma, dos lentes de distinta distancia focal y una pantalla. Para ambas lentes:

- 1) Diseñar un experimento para determinar la distancia focal de las lentes.
- 2) Formar una imagen de un objeto. En que cambia la imagen si cambio el diámetro de la lente? Hint: usar un diafragma.
- 3) Como cambia la intensidad en el foco si cambio el área del diafragma?
- 4) Como varía la intensidad en la dirección longitudinal al atravesar el foco? y en la dirección transversal? Que detector usarías para medir la variación de intensidad en función de la posición?

¿Qué lente elijo para tener un foco más chico y con más intensidad?

Irradiancia en el plano imagen de una lente

Consideremos una lente delgada de diámetro D , distancia focal f y transmitancia total T . Si el objeto posee una **radiancia** L_e (en $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), la **irradiancia** en el plano imagen viene dada por:

$$E_e = T L_e \Omega_{\text{pupila}} \quad (9.3)$$

donde Ω_{pupila} es el ángulo sólido subtendido por la pupila de entrada. Para una apertura circular:

$$\Omega_{\text{pupila}} = \pi \sin^2 \theta \approx \pi \left(\frac{D}{2f} \right)^2, \quad (9.4)$$

siendo $\sin \theta \approx D/(2f)$ para ángulos pequeños. Por tanto, la irradiancia en el plano imagen resulta:

$$E_e = T L_e \pi \left(\frac{D}{2f} \right)^2 = T L_e \pi (NA)^2 \quad (9.5)$$

Entonces, a mayor NA mayor es la iluminación de la imagen

Si el área iluminada (por ejemplo, el área del detector) es A , el **flujo radiante total** que incide sobre ella es:

$$\Phi_e = E_e A \quad (9.6)$$

Unidades:

- Radiancia L_e : $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
- Irradiancia E_e : $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
- Flujo radiante Φ_e : W

Estas expresiones son válidas para pequeñas aperturas (aproximación paraxial) y asumen que la radiancia se conserva a lo largo del sistema óptico ideal.

9.2. Sistemas formados por varias lentes

En óptica, los sistemas formados por varias lentes son comunes y ofrecen diversas ventajas y funcionalidades que una sola lente no puede proporcionar. Estos sistemas pueden incluir combinaciones de lentes convergentes y divergentes para corregir aberraciones, mejorar la resolución, ajustar el campo de visión y controlar la magnificación.

Por ejemplo, las aberraciones ópticas, como la aberración cromática y la aberración esférica, pueden ser corregidas mediante la combinación de diferentes tipos de lentes. Por ejemplo:

- **Lentes Apocromáticas:** Utilizan al menos tres lentes de diferentes materiales para corregir la aberración cromática en tres colores.
- **Lentes Acromáticas:** Combinan dos lentes, generalmente una convergente y una divergente, para corregir la aberración cromática en dos colores.

Un microscopio compuesto es un buen ejemplo de un sistema óptico con varias lentes:

- **Objetivo:** Lente o sistema de lentes cercano a la muestra que produce una imagen real y ampliada.

- **Ocular:** Lente o sistema de lentes a través del cual se observa la imagen real ampliada, produciendo una imagen virtual aún más ampliada.

La magnificación total del microscopio compuesto es el producto de las magnificaciones del objetivo y el ocular.

Experimental 2: Armar algún sistema compuesto de lentes. Proponemos uno como ejemplo, pero pueden probar cualquier otro.

Telescopio. El esquema del telescopio se puede observar en la Fig. 9.5. Determinar el aumento, registrar distancias objeto, imagen, focos, distancia entre lentes. Utilizarlo para aumentar el tamaño de un laser. Como medirías el tamaño del haz?

Ahora puedes usar el telescopio para iluminar un par de rendijas. Podremos ver la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer? Recordemos que en el foco de la lente, podemos encontrar la figura de difracción de Fraunhofer. Podemos usar una segunda lente para aumentar lo que se observa en el foco? Como elegir S_o y S_1 de manera que pueda observar la imagen, la difracción de Fresnel, y de Fraunhofer.

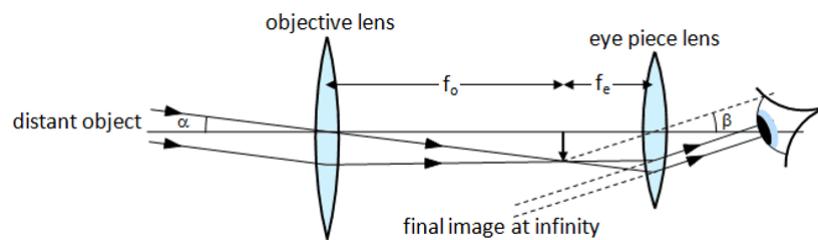


Figura 9.5: Esquema de un telescopio simple

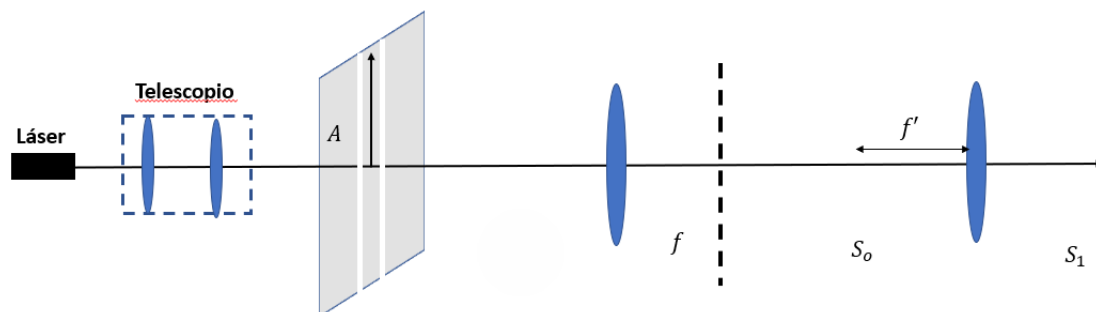


Figura 9.6: Ejemplo de montaje para observar la difracción de Fresnel y Fraunhofer

Capítulo 10

Espectrometría

La espectrometría es un campo amplio y versátil de la ciencia que abarca una serie de técnicas destinadas a analizar la composición en frecuencia del espectro electromagnético. Estas técnicas se utilizan para obtener información detallada sobre las propiedades estructurales de los materiales mediante su interacción con la luz. A través de la espectrometría, es posible estudiar transiciones atómicas y moleculares, así como propiedades cristalinas, proporcionando una comprensión profunda de la materia a nivel microscópico y molecular. A continuación se mencionan algunos ejemplos de tipos de espectrometría y sus aplicaciones:

Espectrometría de Absorción

- **Descripción:** Esta técnica mide la cantidad de luz absorbida por un material a diferentes longitudes de onda. Cuando la luz pasa a través de una muestra, algunas longitudes de onda son absorbidas más que otras, creando un espectro de absorción característico.
- **Aplicaciones:** Determinación de bandas de absorción de materiales, identificación de compuestos químicos, análisis cuantitativo de concentración de sustancias.

Espectrometría de Fluorescencia

- **Descripción:** Se basa en la emisión de luz por una sustancia que ha absorbido previamente luz o radiación electromagnética. La muestra es excitada con una longitud de onda específica, y la luz emitida (fluorescencia) es medida.
- **Aplicaciones:** Análisis de elementos traza en materiales, estudios de proteínas y ácidos nucleicos, investigación de materiales biológicos y farmacéuticos.

Espectrometría Infrarroja (IR)

- **Descripción:** Esta técnica estudia los niveles de energía vibracionales de las moléculas. La radiación infrarroja interactúa con las moléculas, causando transiciones en sus niveles vibracionales.

- **Aplicaciones:** Identificación de grupos funcionales en compuestos orgánicos, estudio de estructuras moleculares, análisis de contaminantes ambientales.

Espectrometría de Resonancia Magnética Nuclear (RMN)

- **Descripción:** Utiliza la interacción de núcleos atómicos con un campo magnético externo y radiación electromagnética en el rango de radiofrecuencia para estudiar las propiedades de los núcleos en una molécula.
- **Aplicaciones:** Determinación de estructuras tridimensionales de moléculas orgánicas e inorgánicas, estudio de dinámicas moleculares, análisis de metabolitos en biología.

Espectrometría de Masas

- **Descripción:** Mide la relación masa/carga de los iones. Una muestra es ionizada, y los iones resultantes son separados según su masa y carga.
- **Aplicaciones:** Identificación de compuestos químicos, determinación de la estructura molecular, análisis de mezclas complejas, estudios de proteómica y metabolómica.

Espectrometría de Rayos X

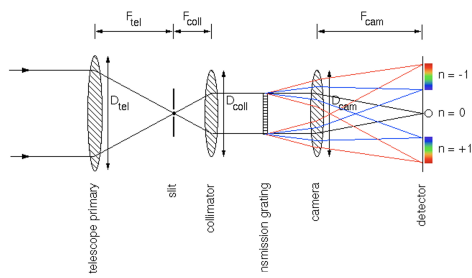
- **Descripción:** Utiliza la interacción de rayos X con la materia para estudiar la estructura atómica y molecular. Los rayos X pueden ser absorbidos o dispersados, proporcionando información sobre la estructura interna.
- **Aplicaciones:** Análisis de materiales cristalinos (difracción de rayos X), estudios de composición elemental (fluorescencia de rayos X), investigación de defectos en materiales.

Cada tipo de espectrometría ofrece ventajas específicas y es adecuado para diferentes aplicaciones científicas y tecnológicas. La elección de la técnica adecuada depende de la naturaleza de la muestra y la información que se desea obtener. La espectrometría es una herramienta esencial en química, física, biología y muchas otras disciplinas científicas, y continúa evolucionando con el desarrollo de nuevas tecnologías y métodos analíticos.

10.1. Espectrómetros

Un espectrómetro es un sistema formador de imágenes, que mapea imágenes monocromáticas de la rendija de entrada en el plano del detector. Existen diversas configuraciones de espectrómetros; en particular, el que ustedes estuvieron usando en la materia (espectrómetro de Thorlabs) tiene una configuración experimental conocida como

Espectrómetro para astronomía



Espectrómetro de red (Como el de Thorlabs)

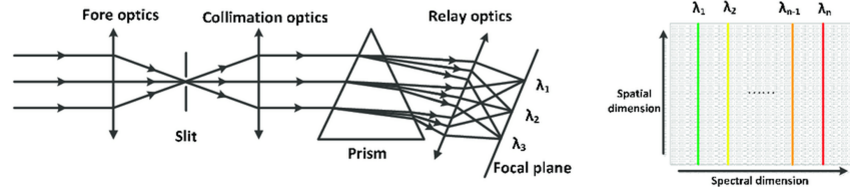
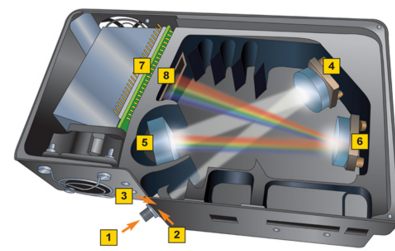


Figura 10.1: Ejemplo de montajes de distintos espectrómetros

Czerny-Turner, que es robusta y no tiene partes móviles. En la Fig 10.1 se muestra este espectrómetro además de otras dos configuraciones posibles.

Como se puede observar en la figura, todos coinciden en que poseen algunos elementos en común: una fuente de luz, una rendija y un elemento que dispersa luz (un prisma o una red de difracción). Además se usan lentes y espejos para formar imágenes y colimar haces. En esta materia utilizaremos como elemento principal a la red de difracción, quien determina el rango de longitudes de onda que se puede medir y, de manera parcial, la resolución del espectrómetro.

10.2. La detección en espectrometría

La medición del espectro (intensidad en función de la longitud de onda) se puede realizar de dos maneras, que se encuentran esquematizadas en la Fig. 10.2. Una opción es usar una rendija para seleccionar un rango de longitudes de onda y un detector puntual a continuación para medir la intensidad. Luego se hace un barrido en longitud de onda ya sea moviendo el detector en conjunto con la rendija o cambiando la posición angular de la red para dirigir porciones distintas del espectro a la rendija. La otra opción es usar una cámara (CCD, CMOS), en ese caso, lo que determina el rango espectral de longitudes de ondas medidas en cada pixel, es el tamaño del pixel.

Nuevamente, lo que medimos resulta de la convolución entre lo que queremos medir (el espectro) y la función respuesta de detección, determinada en este caso por el tamaño de la rendija o del pixel. En este caso, podríamos pensar que la función respuesta de cada elemento de detección (pixel o rendija junto a detector) vale 1 en el área de detección y cero en otro lugar. Vemos entonces más adelante que un factor importante para la resolución del espectrómetro va a ser el tamaño del detector (tamaño de la rendija o del pixel).

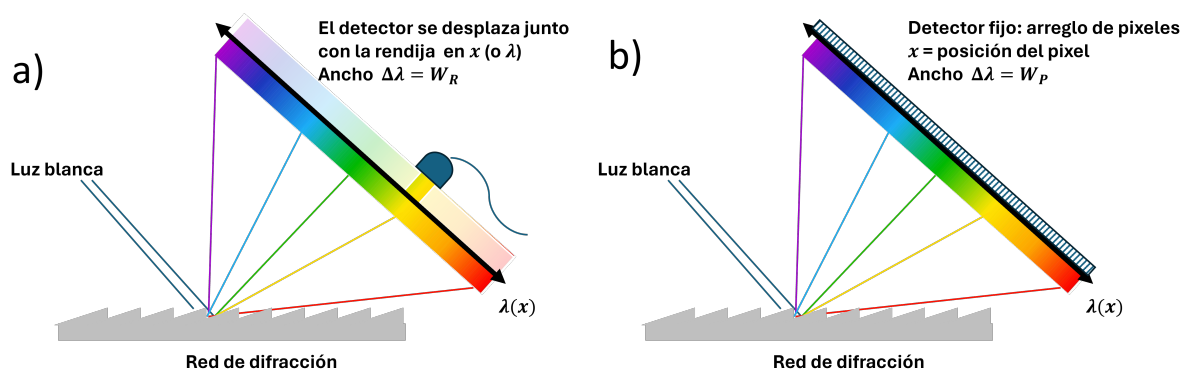


Figura 10.2: Posibles sistemas de detección en espectrometría

10.3. Redes de difracción

Una red de difracción es un arreglo periódico de estructuras (rendijas, espejos, etc) que tienen tamaños similares a la longitud de onda. Estas redes pueden ser de reflexión o de transmisión. En la Fig. 10.3 se muestran algunas de ellas y los métodos más comunes de fabricación. Las conocidas como *ruled gratings*, son redes de reflexión y esencialmente están compuestas por surcos (que se graban mecánicamente) en una superficie espejada. Las holográficas, son exactamente hologramas que se graban en un polímero y luego se transfieren a una superficie (traslúcida o espejada) mediante técnicas como *etching*.

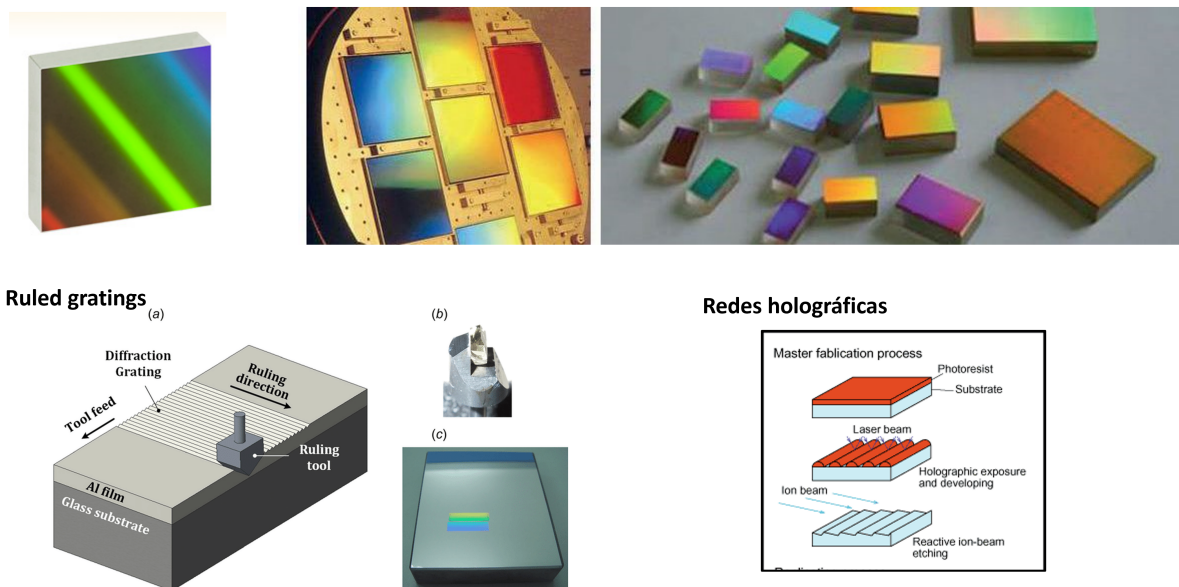


Figura 10.3: Ejemplo de distintos tipos de redes y los métodos de fabricación

La red más sencilla es la red de rendijas, que está compuesta por un arreglo de N rendijas de ancho a y separación d (medida entre centros). Supongamos que iluminamos a la red con luz coherente monocromática de longitud de onda λ en incidencia normal (Fig. 10.4). La difracción se puede analizar utilizando los principios de la interferencia y

la difracción de Fraunhofer.

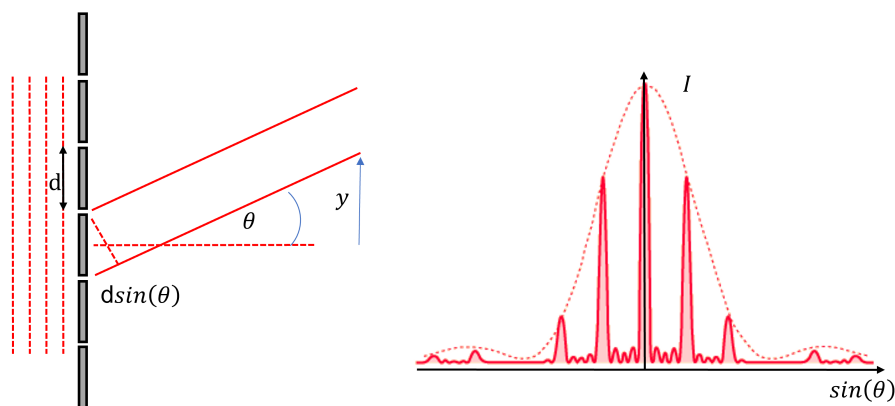


Figura 10.4: La red de rendijas y un esquema de la figura de difracción producida por la misma.

La intensidad de la luz difractada en un ángulo θ está dada por

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} \right)^2 \quad (10.1)$$

donde I_0 es la intensidad máxima $\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ y $\gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$. Recordemos la interpretación de la figura de difracción: el término que contiene β (la envolvente en línea punteada en la figura) describe la difracción por una sola de las rendijas. Las características de la figura de difracción por una rendija cuadrada ya fueron estudiadas en el capítulo de Difracción por lo que no lo repetimos aquí. El término que contiene γ describe la interferencia entre N fuentes puntuales, que genera una distribución de intensidad de máximos principales y secundarios, cuyas características generales se muestran en la Fig. 10.5.

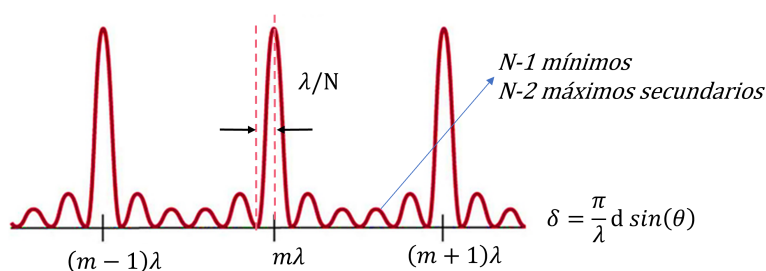


Figura 10.5: Esquema de la interferencia de N fuentes puntuales y características principales (el dibujo corresponde a $N=6$).

La condición para obtener máximos de interferencia en un arreglo de rendijas se da cuando la diferencia de camino óptico entre las ondas que pasan por rendijas adyacentes es un múltiplo entero de la longitud de onda (Fig. 10.4). Esto se expresa como

$$d \sin \theta = m\lambda \quad \text{donde} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.2)$$

donde m es el orden del máximo. Ver que esto resulta equivalente a pedir que γ sea múltiplo entero de π . La intensidad de estos máximos es

$$I_p = I_o N^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad (10.3)$$

Es decir, los máximos principales que se encuentren cerca del máximo de difracción tendrán una intensidad N^2 veces mayor que la intensidad de la fuente I_o . Cuanto mayor sea el número de rendijas iluminadas (N), mayor es la intensidad en los máximos principales.

Maximizando la función $\left(\frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)}\right)^2$, se pueden obtener también la posición de los máximos secundarios, que se encuentran en aquellos valores de γ que cumplen con la ecuación trascendental $\tan(N\gamma) = N \tan(\gamma)$. Sin embargo, su intensidad

$$I_s = \frac{I_p}{1 + (N^2 - 1) \sin^2(\gamma)} \quad (10.4)$$

es mucho menor que la de los máximos principales, por lo que normalmente no los observamos fácilmente.

La posición de los mínimos es importante calcular porque eso nos va a decir cuán angosto es un máximo. Los mínimos se encuentran en los ceros de la figura de interferencia de N fuentes puntuales, es decir cuando $\sin(N\gamma) = 0$. Esto ocurre si $N\gamma = \pi d \sin(\theta)/\lambda = m\pi$ o $d \sin(\theta) = m\lambda/N$. Se puede ver que entre dos máximos principales hay $N - 1$ mínimos, $N - 2$ máximos y que el primer mínimo se encuentra a una distancia $d \sin(\theta) = \lambda/N$ del máximo correspondiente (ver detalles sobre este tema en cualquier libro de óptica que hayan usado en F2). Esto significa que el máximo principal tendrá un ancho $2\lambda/N$, y entonces cuanto más líneas ilumine de la red, más angosto serán los órdenes de difracción.

Nota: En general, si la luz incide en un ángulo θ_o , podemos reescribir la Eq. 10.2 de manera que la expresión adopta la forma de la conocida ecuación de la red

$$d(\sin \theta - \sin \theta_o) = m\lambda \quad \text{donde} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.5)$$

donde m indica la posición de los máximos principales, los órdenes de difracción.

Experimental 1: En el laboratorio vas a recibir una red de transmisión holográfica. Como podrías corroborar que la densidad de líneas por milímetros es la indicada en la etiqueta? que experimento realizarías?

10.4. La difracción de una fuente no monocromática

Si queremos determinar el espectro de una fuente que no es monocromática empleando una red, vamos a encontrar que los máximos principales van a tener una posición distinta para cada longitud de onda. Por ejemplo, en la Fig. 10.6 se muestra un ejemplo de los ordenes 2, 1, 0, -1 y -2 de una fuente de luz blanca.

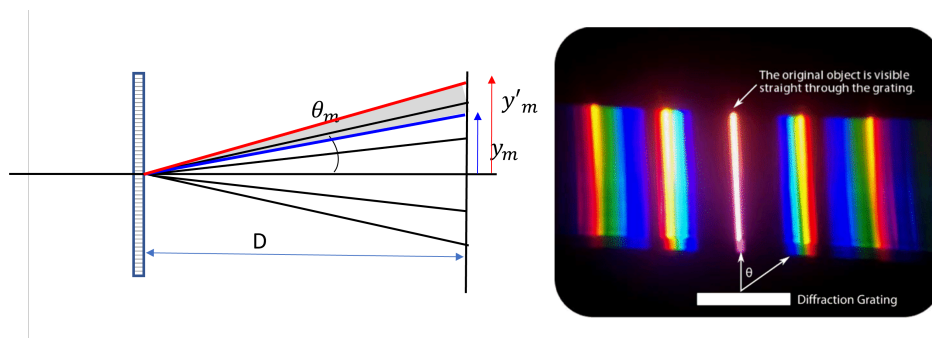


Figura 10.6: izquierda: Esquema de la difracción en un orden particular, mostrando posiciones y'_m y y_m que corresponden a longitudes de onda diferentes en el mismo orden. Derecha: Esquema de la difracción de una fuente de luz blanca.

Aquí se hace evidente la posibilidad de crear un instrumento para medir espectros: solo basta medir un orden de difracción y realizar la calibración de:

- la longitud de onda en función de posición,
- la señal en el detector en función de intensidad.

Observemos que, según lo visto en la sección anterior, el orden va a estar más expandido cuanto más grandes sean el número de orden, la densidad de líneas de la red, y la distancia a la pantalla. Entonces podemos pensar intuitivamente (y luego confirmaremos) que la resolución (capacidad de detectar longitudes de onda distintas), va a aumentar con el número de orden. El costo a pagar por tener mayor resolución es que tenemos menos intensidad (recordar que la intensidad disminuye con el aumento del orden porque la intensidad está modulada por la campana de difracción).

Observemos además que el rango de longitudes de onda que vamos a poder medir, va a estar determinado por el tamaño del orden en el plano de detección (que a su vez está determinado por la densidad de líneas, el número de orden y la distancia a la pantalla), respecto al tamaño del detector. Si el detector es más chico que la expansión del orden, vamos a poder medir un rango espectral menor.

Entonces para diseñar el espectrómetro, necesitamos conocer cuál es la dispersión que introduce la red, para saber también que distancia a la pantalla elegir, o como está limitado lo que puedo medir según el tamaño del detector que tenga.

Dispersión angular

Podemos analizar cuál es la capacidad de dispersar de una red angularmente, diferenciando la Eq. 10.5 para obtener

$$\frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m} \quad (10.6)$$

Vemos que la dispersión aumenta con la disminución del período (mayor densidad de líneas) y el número de orden. Esto significa que voy a tener mayor resolución con ordenes mayores y con redes de mayor densidad de líneas.

Dispersión lineal

La dispersión lineal o dispersión reciproca de la red es cuanto se dispersa la longitudes de onda por unidad de longitud en el detector. Para simplificar cuentas vamos a suponer que los ángulos de difracción son pequeños de manera que $\theta_m \sim y_m/D$ (Nota, si usáramos una lente para producir la condición de Franhofer, en lugar de D usaríamos la distancia focal). Entonces, a partir de la Eq. 10.6 obtenemos

$$\frac{dy_m}{d\lambda} = \frac{mD}{d \cos \theta_m} \quad (10.7)$$

Luego, invirtiendo esta relación encontramos

$$\frac{d\lambda}{dy_m} = \frac{\cos \theta_m}{dmD} \quad (10.8)$$

que representa la diferencia de longitud de onda por unidad de distancia en el detector. En particular, si consideramos que el detector esta compuesto por pixeles de tamaño W_p (o usamos una rendija a la salida del espectrómetro y un detector puntual, entonces consideraríamos el tamaño de la rendija W_s), encontramos a partir de la Eq 10.8, una expresión para la resolución multiplicando la dispersión reciproca por el tamaño del píxel.

$$R = W_p \frac{d\lambda}{dy_m} = W_p \frac{\cos \theta_m}{dmD} \quad (10.9)$$

Rango de longitudes de onda (bandpass)

Supongamos que el tamaño del detector mide y_D , el rango de longitudes de onda que es posible medir se puede estimar como

$$\Delta\lambda = \lambda_{max} - \lambda_{min} = y_D \frac{mD}{d \cos \theta_m} \quad (10.10)$$

observando que este depende del tamaño del detector, el orden de difracción y del período de la red. A menor período d (mayor densidad de líneas), la red dispersa más, pero el rango de longitudes de onda que puedo medir en un área definida disminuye.

A menor período (más densidad de líneas):

- La resolución aumenta
- La dispersión aumenta
- El rango de longitudes de onda (en el detector o rendija de salida) disminuye

10.5. Resolución

La resolución espectral es la mínima separación $\Delta\lambda$ en longitudes de onda entre dos líneas espectrales que el instrumento puede resolver. Generalmente se expresa como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (10.11)$$

Por ejemplo, si $R = 10000$, significa que la mínima separación en λ que se puede medir es $\Delta\lambda = 0,0001\lambda$. También podríamos intentar estimar cual es el poder resolvente que necesitamos para poder resolver dos líneas espectrales cercanas. Por ejemplo, tomemos el caso del doblete del sodio cuyas líneas espectrales se encuentran en 589.00 nm and 589.59 nm. Resolver estas líneas significa que tengo que tener una red cuyo poder resolvente sea como mínimo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\text{nm}}{0,59 \text{ nm}} = 1000$$

Para caracterizar la resolución, se puede hacer un experimento tipo respuesta impulsiva: se usan fuentes con líneas espectrales muy angostas (más angostas que la resolución normal de los espectrómetros), por ejemplo, láseres muy monocromáticos, lámparas atómicas. Por ejemplo, en la Fig.10.7 se muestra el espectro del mercurio gaseoso, cuyas líneas espectrales son más angostas que ~ 1 nm. Luego se mide cual es el ancho de la línea espectral adoptando algún criterio (por ejemplo el ancho mitad altura).

Comentario: en los tubos de luz, se genera una descarga eléctrica ionizando átomos de mercurio. Luego de la ionización suceden diversos fenómenos como el decaimiento de electrones a niveles de menor energía o la recombinación de los iones con electrones libres, que generan luz con líneas espectrales muy angostas en el visible y el UV. El material de las paredes del tubo absorbe la luz UV excitando a sus átomos. Estos átomos, al decaer a su estado fundamental, emiten luz visible en un rango amplio de longitudes de onda cuya superposición se observa como luz blanca. De este modo, el espectro de emisión de los tubos de luz está compuesto

por algunas líneas espectrales muy angostas correspondientes a la emisión de iones de mercurio, superpuesto con un fondo continuo en el visible que corresponde a la emisión del material de la superficie del tubo.

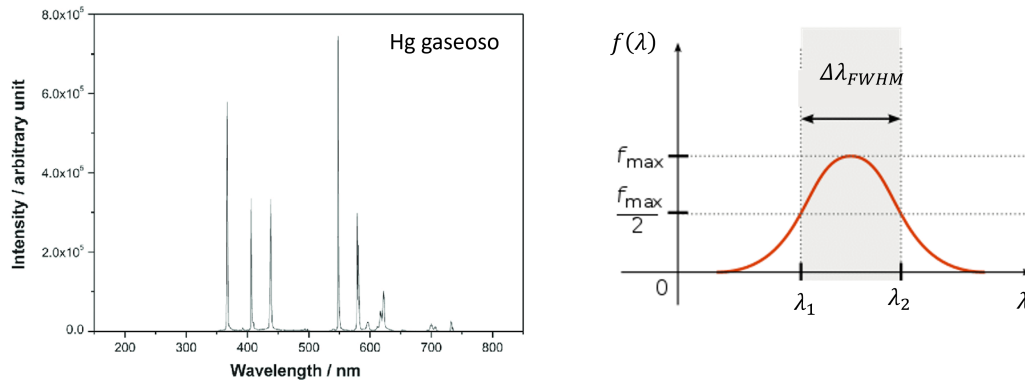


Figura 10.7: Espectro de emisión del mercurio gaseoso. La línea espectral se verá ensanchada si la resolución del espectrómetro es menor, por lo que se puede caracterizar la resolución midiendo el ancho de la línea.

Recordando que medir es convolucionar, aquí podemos pensar que la señal medida $S_M(\lambda)$, resulta de la convolución entre la respuesta del espectrómetro $R(\lambda)$ y lo que queremos medir $S_o(\lambda)$, es decir

$$S_M(\lambda) = S_o(\lambda) * R(\lambda). \quad (10.12)$$

De este modo, si lo que queremos medir es una “delta” (la línea espectral muy angosta) en el sentido que es mucho más angosto en longitudes de onda que la función respuesta del espectrómetro, el resultado de la medición es la función resolución.

Nota: ustedes ya midieron el espectro del láser que usaron en el experimento de difracción, por lo que ya están en condiciones de determinar la resolución espectral del espectrómetro de thorlabs.

Entre los factores que limitan la performance de los espectrómetros podemos encontrar

- La red de difracción: rango de longitudes de onda y (en parte) la resolución.
- La rendija de entrada: recorte nítido del haz incidente, throughput y resolución.
- El sistema óptico: la magnificación (tamaño de la imagen en el detector, resolución), las aberraciones (imagen nítida de la fuente en el detector, resolución)

- El detector: su tamaño (rango de longitudes de onda), muestreo (tamaño del píxel, resolución en λ) y digitalización (resolución en intensidad).

10.5.1. La red de difracción: resolución límite o resolución limitada por difracción o poder resolvente cromático

La resolución limitada por difracción es aquella determinada por la red de difracción. Podemos usar el criterio de Rayleigh para calcular poder resolvente de la red, esto es: se pueden resolver dos longitudes de onda si el máximo de la figura de difracción para una coincide con el mínimo de la figura de difracción de la otra. Usando la Fig. 10.8 en donde se muestra el criterio de Rayleigh para dos longitudes de onda separadas en $\Delta\lambda$, se puede observar que la distancia entre los dos máximos es igual a la distancia de un máximo al primer mínimo.

Recordemos que para una dada longitud de onda λ (ver sección 10.3) la distancia del máximo principal m al primer mínimo cumple que $d \sin(\theta) = \lambda/N$. De esta manera la distancia entre máximos es $m\Delta\lambda = \lambda/N$, lo que resulta en

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \quad (10.13)$$

Se observa que la resolución aumenta con el orden de difracción y con el número de rendijas iluminadas.

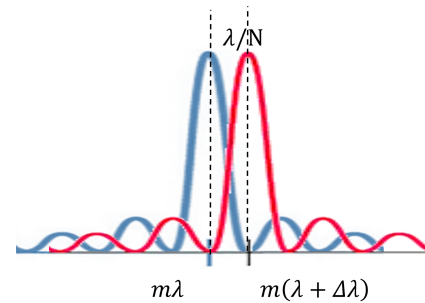


Figura 10.8: Esquema de aplicación del criterio de Rayleigh para dos ondas cuyas longitudes de onda son λ y $\lambda + \Delta\lambda$, que se difractan en la red de difracción.

Esto es consistente con la resolución teórica limitada por transformada que dice que la unidad más chica posible de resolver de cualquier transformada es inversamente proporcional al número de muestras.

Más allá de la teoría, apliquemos este criterio en algunos ejemplos:

- Una red de 300 l/mm, iluminando 20 mm de red, en el primer orden de difracción

$$R = mN = 1 \times 300 \text{ l/mm} \times 20 \text{ mm} = 6000$$

- Una red de 600 l/mm, de iguales características, en el segundo orden de difracción

$$R = mN = 2 \times 600 \text{ l/mm} \times 20 \text{ mm} = 24000$$

En general el poder resolvente de la red es mucho más grande que el poder resolvente del espectrómetro por lo que otros factores determinan la resolución del espectrómetro: rendijas, aberraciones ópticas, tamaño del detector, pixeles en el detector

10.5.2. La rendija de entrada

Recordemos que una forma de pensar al espectrómetro es como un sistema óptico que forma imágenes de la rendija en el plano del detector, desplazadas según la longitud de onda. La rendija es clave para el buen funcionamiento del espectrómetro: determina la cantidad de luz que pasa y llega al detector (throughput o transmisión) y la resolución espectral cuando el espectrómetro no funciona al límite de difracción. En general, cuanto más chica la rendija mejor resolución pero menor transmisión. Se puede ver como ejemplo, las mediciones de la Fig. 10.9 en donde se observan mediciones adquiridas con tamaños de rendijas diferentes, mejorando la resolución en el caso de la rendija más chica. Sin embargo, lo que importa es la imagen de la rendija en el plano de detección, por lo que, usando un sistema óptico adecuado nos la podemos ingeniar para tener una transmisión alta, con una imagen pequeña en el plano de detección.

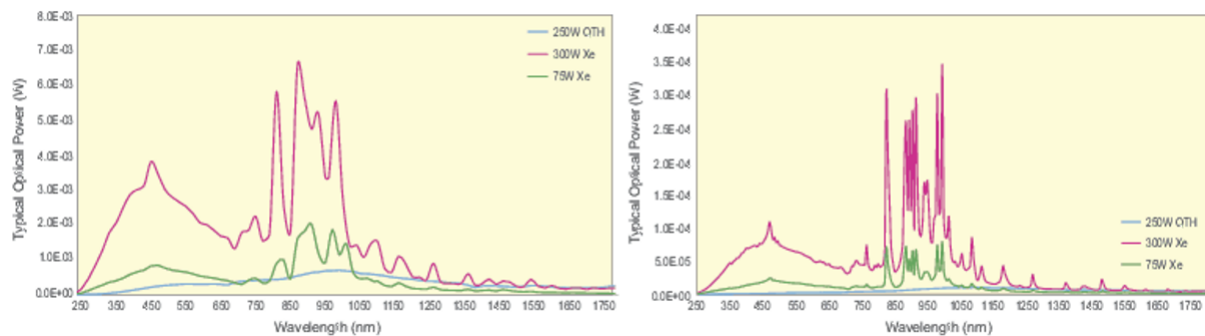


Figura 10.9: Ejemplos de mediciones para tamaños de rendijas diferentes.

La rendija también define la apertura angular de los haces que ingresan al espectrómetro. Típicamente la luz de la fuente se enfoca en la rendija con una lente cuya apertura numérica es igual a la del espectrómetro. Eso garantiza iluminar óptimamente a la red, es decir, iluminar la mayor cantidad de líneas de la red posibles (recordar que cuanto más líneas ilumino, más finitos son los ordenes de difracción, y mayor es la resolución de la red).

Si se ilumina con una apertura numérica menor a la óptima, se iluminan menos líneas, los ordenes se ensanchan (ver 10.3). Si se ilumina con mayor apertura que la óptima, se pierde intensidad a la salida.

Además, la rendija define un recorte nítido de la fuente de iluminación. El tamaño de la rendija ($W_s \times H_s$) es uno de los factores principales que definen el throughput del espectrómetro (cuanto más grande la rendija más luz entra).

El ancho de la imagen de la rendija en el plano del detector (W_i), es crítico para determinar la resolución. Además normalmente se desea que $W_i > W_p$, con W_p ancho del píxel del detector. El ancho de la imagen de la rendija de entrada W_i se puede estimar como $W_i = (M^2 W_s^2 + W_o^2)^{1/2}$, donde W_o es un ensanchamiento de la imagen que se puede producir por los distintos elementos ópticos (por ejemplo por aberraciones) y M es la demagnificación del sistema óptico. Reducir W_i por debajo de W_p no ayuda a aumentar la resolución del espectrómetro.

Si el requerimiento en resolución se satisface, el ancho de la rendija debe ser lo más grande posible para aumentar la transmisión del espectrómetro.

Idealmente quisieramos trabajar en el límite permitido por la difracción. Si el ancho proyectado de la rendija en el detector es mucho menor que la resolución limitada por difracción del espectrómetro, no habrá pérdida de resolución. Sin embargo, si se ensancha la rendija de modo que el ancho de su imagen en el espectro supera la resolución límite, será el ancho de la rendija el que definirá la resolución del espectro, no la difracción. Este punto se ilustra en la Fig. 10.10, que muestra la resolución espectral limitada por la difracción y por el ancho de la rendija, respectivamente.

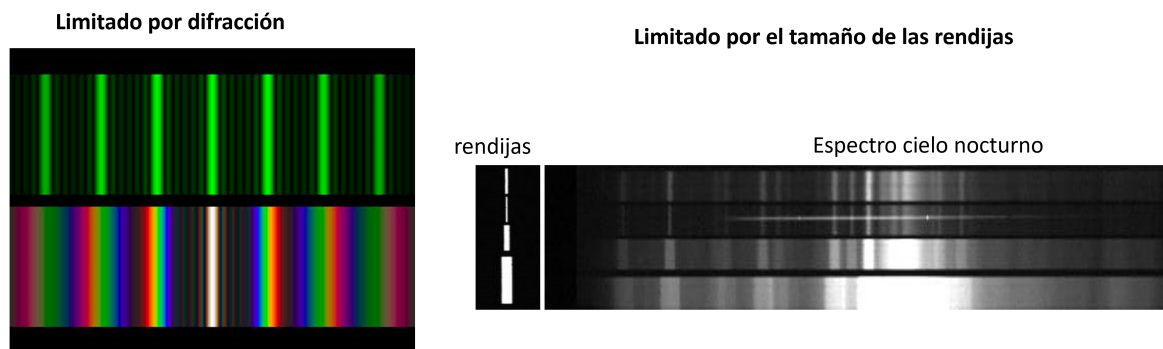


Figura 10.10: Ejemplos de figuras de difracción limitadas por difracción y limitadas por tamaño de la rendija.

Para maximizar la resolución espectral, por lo tanto, parece obvio que el ancho de la rendija siempre debería mantenerse más pequeño que la resolución límite. Desafortunadamente, esto es raramente posible, ya que la rendija sería tan estrecha que muy poca luz pasaría al espectrómetro.

10.5.3. Los píxeles en el detector

Según el criterio de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos el doble de la frecuencia máxima contenida en la señal. El tamaño de la menor estructura en el espectro (determinado por el espectro de una línea atómica o un láser) contiene la mayor cantidad de frecuencias espaciales en el detector (sería el análogo al impulso en el experimento de piezoeléctricos), es del orden $\Delta\lambda_{FWHM}$. Según Nyquist, por lo menos necesitaríamos una frecuencia de muestreo del doble: $2/\Delta\lambda_{FWHM}$. La condición de mínima para que los píxeles no limiten la resolución, es poder detectar la resolución adecuadamente. Esto se logra si al menos medimos la función resolución con 3 píxeles en el $\Delta\lambda_{FWHM}$.

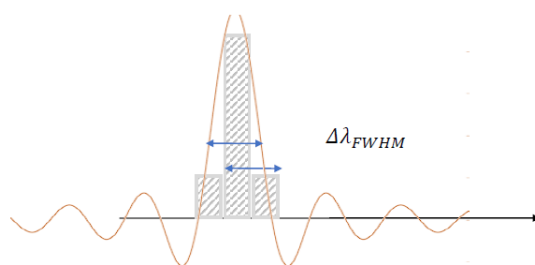


Figura 10.11: Muestreo de la función de resolución

10.6. Estimación de la resolución

Según lo visto, podemos estimar a la resolución como

$$R = \frac{d\lambda}{dy_m} \times W_i \quad (10.14)$$

siendo W_i tamaño de la imagen de la rendija y la dispersión lineal $d\lambda/dy_m$ que mencionamos en las secciones anteriores.

Podemos hacer una estimación de la siguiente manera. Consideremos la dispersión por pixel (DP) como

$$DP = \frac{\text{ancho de banda (nm)}}{\text{número de píxeles}} \quad (10.15)$$

Por otro lado, calculamos el tamaño de la rendija proyectada (o sea de la imagen de la rendija) en píxeles (pixel slit projection- PSP)

$$PSP = \frac{\text{tamaño de la imagen proyectada } W_i(\mu m)}{\text{tamaño del píxel } (\mu m)} (pixels) \quad (10.16)$$

Estimamos entonces a la resolución como

$$R = DP \times PSP \quad (10.17)$$

Veamos un ejemplo: Usando una red de 300 l/mm, queremos medir longitudes de onda entre 200 nm y 1100 nm (ancho de banda de 900 nm) en un área del detector que tiene 2048 píxeles. La imagen de la rendija tiene 25 μm y el tamaño de los píxeles es 14 μm .

$$R = DP \times PSP = \frac{900\text{nm}}{2048\text{pixels}} \times \frac{25\mu\text{m}}{14\mu\text{m}}\text{pixels} = \frac{0,43\text{nm}}{\text{pixels}} \times 2\text{pixels} = 0,9\text{nm} \quad (10.18)$$

10.7. Medición de absorbancia

El espectrómetro más sencillo es aquel que mide la absorbancia, es decir cuanta luz fue absorbida por una muestra translúcida. Supongamos que tenemos una muestra translúcida, que permite transmitir parte de la luz incidente, como se esquematiza en la Fig. 10.12.

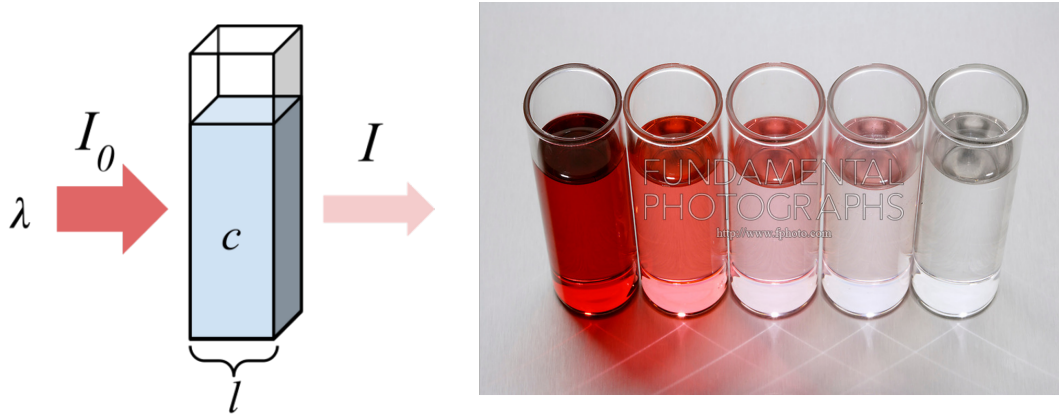


Figura 10.12: Esquema de un haz atravesando una muestra translúcida. Ejemplos de muestras con distintas concentraciones

Luego de atravesar una distancia l podemos escribir al campo como

$$E = E_0 e^{i(kl - \omega t)} \quad (10.19)$$

en donde k es el número de onda en el material. El número de onda en el material es $k = k_0 n(\lambda)$ con $k_0 = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda en el vacío y $n(\lambda)$ el índice de refracción complejo $n(\lambda) = n(\lambda) + i\kappa(\lambda)$. Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$E = E_0 e^{i(k_0 n(\lambda) l - \omega t)} = E_0 e^{i(k_0 n(\lambda) l - \omega t + i\kappa(\lambda) l)} = E_0 e^{i(k_0 n(\lambda) l - \omega t)} e^{-\kappa(\lambda) l} \quad (10.20)$$

Si queremos calcular la intensidad, tomamos módulo cuadrado en la expresión anterior para obtener

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) e^{-\kappa(\lambda) l} \quad (10.21)$$

De este modo, la transmisión en función de la longitud de onda resulta

$$T(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_o(\lambda)} = e^{-\kappa(\lambda)l} \quad (10.22)$$

Se define absorbancia a $\kappa(\lambda)l$, y la podemos obtener calculando el logaritmo de la transmitancia

$$A = \kappa(\lambda)l = -\ln\left(\frac{I(\lambda)}{I_o(\lambda)}\right) \quad (10.23)$$

La ley de Beer-Lambert, es una ley empírica que establece una relación entre la absorbancia y la concentración C de un absorbente, y se expresa como

$$A = C \epsilon(\lambda) l \quad (10.24)$$

donde $\epsilon(\lambda)$ es el coeficiente de absorción molar que depende del material y de la longitud de onda.

10.8. Experimento

Discutir los siguientes dispositivos experimentales sus posibles ventajas y desventajas, que distancias focales considerarían

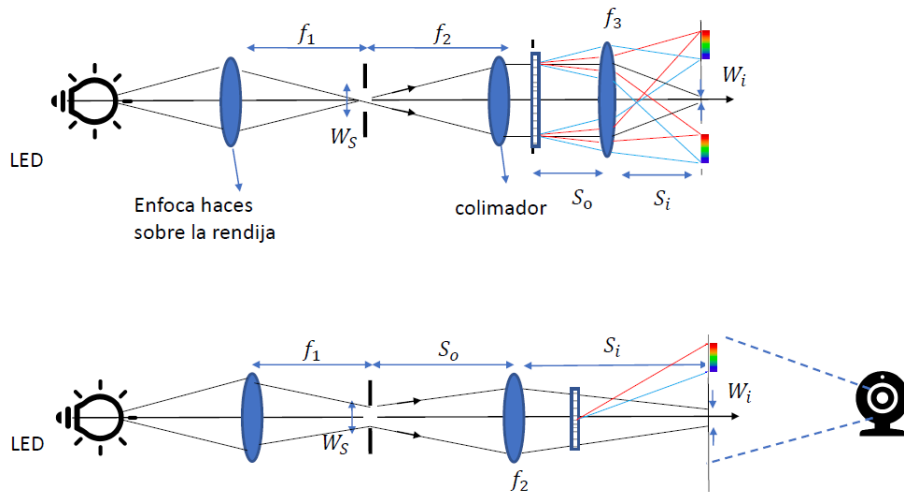


Figura 10.13: Dispositivos propuestos

- Caracterizar la respuesta en intensidad (Malus) y tiempo de exposición de nuestro sensor de luz (cámara)
- Armar y caracterizar el dispositivo experimental (medir todas las distancias, aumento, throughput)

- Comparando con el espectro del LED medido con el espectrómetro Thorlabs, calibrar en longitudes de onda el espectro medido
- Usar el dispositivo experimental para medir absorbancia o espectros de emisión

Apéndice

S1. Transformada de Fourier función escalón

Calculemos la transformada de Fourier de un escalón con un tiempo de subida finito T . Como ejemplo utilizaremos luego $T = 10$ ns.

Definición del escalón suavizado (*rise time* finito)

Podemos modelar un escalón con un tiempo de subida lineal de la siguiente manera:

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & t > T. \end{cases} \quad (\text{S1.1})$$

donde T es el *rise time*. Este es el modelo más simple para un flanco con tiempo de subida finito; otros modelos pueden utilizar, por ejemplo, funciones exponenciales o sigmoidales.

Podemos escribir $u_T(t)$ como

$$u_T(t) = u(t) - \frac{T-t}{T} [u(t) - u(t-T)]. \quad (\text{S1.2})$$

donde $u(t)$ representa el escalón ideal de Heaviside,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

El valor en $t = 0$ no es relevante para el análisis que sigue.

Otra forma, particularmente útil para calcular su transformada de Fourier, es notar que $u_T(t)$ puede escribirse como la convolución de un escalón ideal con un pulso rectangular normalizado de ancho T :

$$u_T(t) = u(t) * \frac{1}{T} \text{rect} \left(\frac{t - T/2}{T} \right). \quad (\text{S1.3})$$

Transformada de Fourier

A partir de la propiedad de la convolución,

$$U_T(\nu) = U(\nu)P_T(\nu), \quad (\text{S1.4})$$

donde $U(\nu)$ es la transformada del escalón ideal y $P_T(\nu)$ la transformada del pulso rectangular normalizado.

La transformada del escalón ideal es

$$U(\nu) = \text{PV} \left(\frac{1}{i2\pi\nu} \right) + \frac{1}{2}\delta(\nu), \quad (\text{S1.5})$$

donde PV indica el valor principal de Cauchy.

El pulso rectangular de ancho T y área igual a uno tiene transformada

$$P_T(\nu) = e^{-i\pi\nu T} \text{sinc}(\nu T), \quad (\text{S1.6})$$

donde usamos la definición

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Por lo tanto,

$$U_T(\nu) = \left[\text{PV} \left(\frac{1}{i2\pi\nu} \right) + \frac{1}{2}\delta(\nu) \right] e^{-i\pi\nu T} \text{sinc}(\nu T). \quad (\text{S1.7})$$

Interpretación

El factor $\text{sinc}(\nu T)$ atenúa las componentes de alta frecuencia. Cuanto mayor es el tiempo de subida T , más angosto resulta este factor en frecuencia.

Los primeros ceros de la función sinc aparecen cuando

$$\nu = \pm \frac{1}{T}. \quad (\text{S1.8})$$

Por lo tanto, la cantidad $1/T$ proporciona una escala característica del ancho espectral asociado al flanco. Para $T = 10$ ns, $1/T = 100$ MHz.

Esto muestra que un flanco con un tiempo de subida muy corto contiene componentes de frecuencia que se extienden hasta valores mucho mayores que la frecuencia de repetición de la señal cuadrada.

S2. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación sinusoidal

Queremos hallar la transformada de Fourier de la señal medida en el Michelson cuando se desplaza el piezoeléctrico, que tiene la forma

$$I(t) = 1 + \cos(2kx(t))$$

donde $x(t)$ es la posición en función del tiempo, para la que vamos a suponer que es senoidal periódica $x(t) = A \cos(\omega t)$, de modo que

$$I(t) = 1 + \cos(2kA \cos(\omega t))$$

La transformada de Fourier de la intensidad es

$$\mathcal{F}\{I(t)\}(\omega) = \delta(\omega) + \mathcal{F}\{\cos(2kA \cos(\omega t))\}$$

Afortunadamente, hay una forma sencilla de resolver la transformada del segundo término. En primer lugar, escribamos al coseno como suma de exponenciales

$$\mathcal{F}\{\cos(2kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{i2kx(t)}\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-i2kx(t)}\}(\omega))$$

Resolver cada uno de estos términos ahora es más sencillo, tomemos uno de ellos (el otro se resuelve igual, cambiando k por $-k$). Usamos la representación en serie de Fourier para expresar la función exponencial en términos de funciones de Bessel:

$$e^{i2kA \cos(\frac{2\pi}{T}t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2kA) e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

Donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n . La transformada de Fourier de $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ es un delta de Dirac centrado en $\frac{2\pi n}{T}$:

$$\mathcal{F}\{e^{in\frac{2\pi}{T}t}\} = \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Entonces, la transformada de Fourier de $e^{i2kA \cos(\frac{2\pi}{T}t)}$ es:

$$\mathcal{F}\left\{e^{i2kA \cos(\frac{2\pi}{T}t)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2kA) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Es decir, es un peine de deltas, centradas en múltiplos de la frecuencia de excitación, y amplitudes dadas por las J de Bessel. Es decir, la información del desplazamiento, está en las amplitudes y no en las frecuencias.

S3. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación triangular

Queremos hallar la transformada de Fourier de la señal medida en el Michelson cuando se desplaza el piezoeléctrico, que tiene la forma

$$I(t) = 1 + \cos(kx(t))$$

donde $x(t)$ es la posición en función del tiempo, para la que vamos a suponer que es triangular periódica. Una onda triangular con período T y amplitud 1 se puede representar como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t + 3 & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Como es periódica podemos expresarla como una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}$$

con

$$c_n = x_o \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}$$

De modo que

$$x(t) = x_o \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

Transformada de Fourier de $1 + \cos(kx(t))$:

1. Transformada de Fourier del Término Constante 1

Usamos que la transformada de Fourier de una función constante c está dada por:

$$\mathcal{F}\{c\}(\omega) = c\delta(\omega)$$

Para $c = 1$:

$$\mathcal{F}\{1\}(\omega) = \delta(\omega)$$

Esto significa que vas a tener señal en la transformada para frecuencia $\omega = 0$

2. Transformada de Fourier de $\cos(kx(t))$

Necesitamos calcular:

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\cos\left(k \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}\right)\right\}$$

donde los c_n son los que se dieron previamente. Para calcular esta transformada, vamos a escribir el coseno en término de exponenciales y luego calcular la transformada de exponenciales de la siguiente manera

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-ikx(t)}\}(\omega))$$

Enfoquémosnos en uno solo de los términos, por ejemplo en $\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega)$ porque calculando uno, el resultado del otro se obtienen cambiando k por $-k$. Tenemos que usar la propiedad que la exponencial de una sumatoria, es el producto de exponenciales, es decir:

$$e^{ikx(t)} = e^{ik \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}} = \prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} e^{ikc_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t)}$$

Ahora, podemos calcular la transformada de un producto de exponenciales, para lo que vamos a usar que la transformada de un producto es la convolución de la transformadas. Es decir, vamos a usar que

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega)$$

Entonces nos queda,

$$\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega) = \mathcal{F}\{e^{ikc_1 \cos(\frac{2\pi 1}{T} t)}\} * \mathcal{F}\{e^{ikc_3 \cos(\frac{2\pi 3}{T} t)}\} * \dots \mathcal{F}\{e^{ikc_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t)}\} * \dots \quad (\text{S3.1})$$

Es decir, que si resolvemos la transformada de Fourier de un término genérico alcanza, porque todos tienen la misma forma. La transformada de un término genérico la conocemos y vale (ver más abajo el cálculo)

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos(\frac{2\pi s}{T} t)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s) \delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right) \quad (\text{S3.2})$$

en donde J_n son funciones de Bessel de primer tipo de orden n .

Lo que viene ahora sería reemplazar cada uno de los términos en la ecuación S3.1, es bastante ló, pero lo importante es darse cuenta que cada uno de los términos de la productoria tiene una δ en frecuencias que son únicamente múltiplos de la frecuencia de la alimentación, y por lo tanto, en principio, no deberían aparecer frecuencias que tengan que ver con el desplazamiento del piezo. En cambio, la información del desplazamiento

del piezo está en las amplitudes, es decir, en las $J_n(kc_s)$. Más abajo hay una cuenta de dos exponenciales, pero con esta justificación en principio quedaría demostrado, que no hay info en las frecuencias sobre el desplazamiento de los piezos.

S3.1. Transformada de Fourier del producto de dos exponenciales

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de las dos funciones, realizamos la convolución de las transformadas de Fourier individuales:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}\right\} * \mathcal{F}\left\{e^{ikc_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}\right\}$$

La convolución de dos deltas de Dirac $\delta(\omega - \omega_1)$ y $\delta(\omega - \omega_2)$ se realiza de la siguiente manera:

$$(\delta(\omega - \omega_1) * \delta(\omega - \omega_2))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega_1) \delta(\omega - \omega' - \omega_2) d\omega' = \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2))$$

Aplicando esto a nuestras series de funciones de Bessel, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s) \delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi mk}{T}\right) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^n i^m J_n(kc_s) J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier del producto de las dos funciones es:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)} e^{ikc_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{n+m} J_n(kc_s) J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right)$$

S3.2. Todas las frecuencias

Para calcular la transformada de Fourier del producto infinito de exponenciales de cosenos, es útil recordar que cada exponencial de un coseno se puede expresar en términos de una serie de funciones de Bessel. Usaremos la propiedad de que la transformada de Fourier de un producto de funciones en el dominio del tiempo corresponde a la convolución de sus respectivas transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia.

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de todas estas funciones, realizamos la convolución de todas sus transformadas de Fourier. La convolución de muchas deltas de Dirac resulta en una delta de Dirac centrada en la suma de las posiciones de las deltas individuales. Por lo tanto, la transformada de Fourier del producto infinito será una suma infinita de convoluciones.

$$\mathcal{F} \left\{ \prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} e^{ikc_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t)} \right\} (\omega) = \quad (\text{S3.3})$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{m_5=-\infty}^{\infty} \cdots \left(\prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} i^{m_n} J_{m_n}(kc_n) \right) \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} m_n n \right)$$

Donde la suma se realiza sobre todos los índices m_n correspondientes a los términos impares n .

S4. Intentemos otra forma más directa

Voy a pensar al problema como si fuera una red de difracción. En cada periodo de la señal, voy a pensar que hay una fuente puntual, de modo que en el plano transformado tengo la interferencia de esas fuentes puntuales, es decir, los "órdenes de difracción" van a estar en los múltiplos enteros de la frecuencia de la señal. La modulación (análogo a la campana de difracción) va a estar dada por la transformada de Fourier de un período. Entonces, hagamos solo para un período:

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \mathcal{F}\{1 + \cos(2kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \cos(2kx(t))) e^{-i\omega t} dt$$

Donde T es el período de la función $x(t)$, y ω es la frecuencia angular.

Recordando que

$$x(t) = A \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t + 3 & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \cos(2kx(t))) e^{-i\omega t} dt =$$

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (\cos(2kA(4t/T - 1))) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (\cos(2kA(-4t/T + 3))) e^{-i\omega t} dt$$

Usando el **resultado parcial 1** obtenemos (ver siguiente sección)

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv$$

y ahora usando el **resultado parcial 2**

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{1}{2}e^{-i\frac{T\omega}{2}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \left[\text{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) + \text{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) \right]$$

Aca va un plot para valores arbitrarios, sin tener en cuenta el termino de la frecuencia negativa

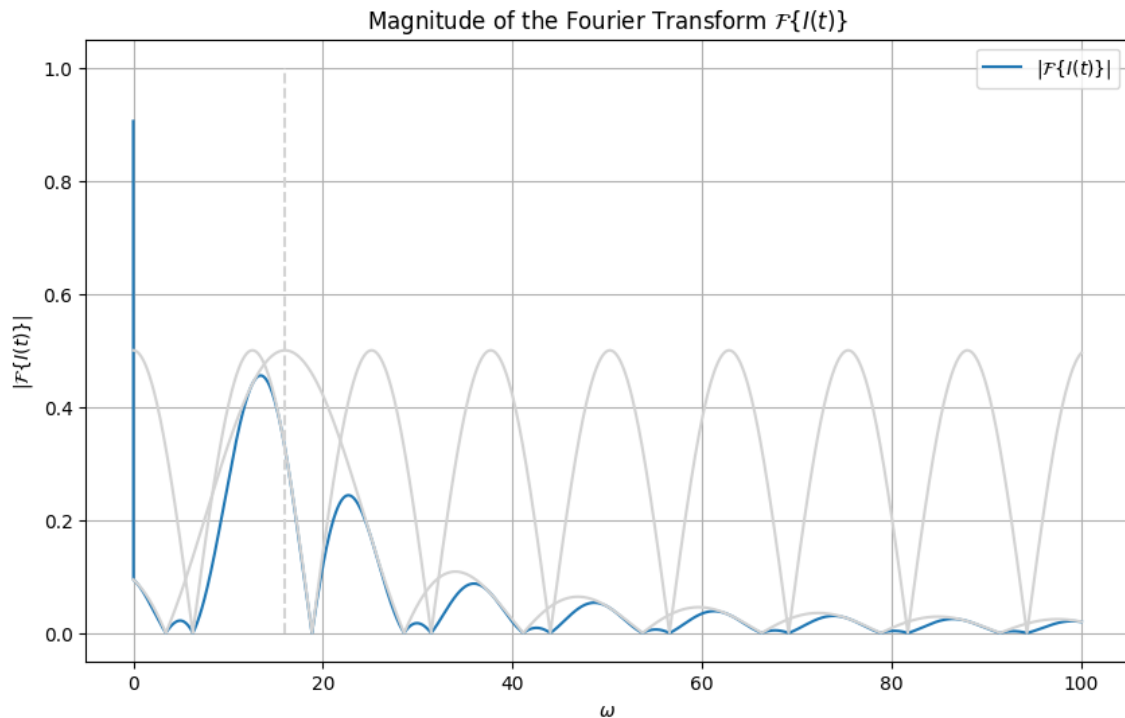


Figura 10.14

Solo ver que el máximo de la función (en azul) no está ni en el máximo de la sinc ni en el del coseno (dibujados en gris clarito)...pero se puede hallar aunque sea numéricamente.

S4.1. Solución de la integral

Resultado parcial 1

En primer lugar usemos las propiedades de cos de la suma:

$$\begin{aligned} Integral &= \frac{1}{T} \left[\cos(6kA) \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(6kA) \int_{T/2}^T \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right] \\ &+ \frac{1}{T} \left[\cos(2kA) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(2kA) \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u = t - T/2$

$$\begin{aligned}
Integral &= \frac{1}{T} \left[\cos(6kA) e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) e^{-i\omega u} du \right] + \\
&\quad \frac{1}{T} \left[\sin(6kA) e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) e^{-i\omega u} du \right] \\
&+ \frac{1}{T} \left[\cos(2kA) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(2kA) \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right]
\end{aligned}$$

Para simplificar aún más, observamos que las integrales tienen formas similares y podemos combinar términos:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \left[\cos(6kA) \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) + \sin(6kA) \sin\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) \right] e^{-i\omega u} du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{T/2} \left[\cos(2kA) \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) + \sin(2kA) \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) \right] e^{-i\omega t} dt \right\}
\end{aligned}$$

Luego, usando la identidad de ángulos suma para coseno y seno:

$$Integral = \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA - 6kA\right) e^{-i\omega u} du + \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega t} dt \right\}$$

Finalmente, simplificando las integrales:

$$Integral = \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du + \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega t} dt \right\}$$

Luego, sacando factor común la integral

$$Integral = \frac{1}{T} \left\{ (e^{-i\omega \frac{T}{2}} + 1) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$Integral = \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du$$

Haciendo un nuevo cambio de variables $v = u - T/4$, llegamos al **resultado parcial**

1:

$$Integral = \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv$$

Resultado parcial 2

Queremos ahora resolver la siguiente integral

$$Integral2 = \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv,$$

Expresamos coseno como combinación de exponenciales

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \int_{-T/4}^{T/4} \frac{e^{i\frac{8kAv}{T}} + e^{-i\frac{8kAv}{T}}}{2} e^{-i\omega v} dv.$$

Esto se puede separar en dos integrales

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-T/4}^{T/4} e^{i\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right)v} dv + \int_{-T/4}^{T/4} e^{-i\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right)v} dv \right).$$

La primer integral:

$$\int_{-T/4}^{T/4} e^{i\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right)v} dv.$$

Llamemos $\alpha = \frac{8kA}{T} - \omega$. Entonces:

$$= \int_{-T/4}^{T/4} e^{i\alpha v} dv = \left[\frac{e^{i\alpha v}}{i\alpha} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{e^{i\alpha \cdot \frac{T}{4}} - e^{-i\alpha \cdot \frac{T}{4}}}{i\alpha} = \frac{2i \sin\left(\alpha \cdot \frac{T}{4}\right)}{i\alpha} = \frac{2 \sin\left(\alpha \cdot \frac{T}{4}\right)}{\alpha}.$$

Entonces

$$\frac{2 \sin\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} - \omega}.$$

La segunda integral

Usando el mismo truco del cambio de variables

$$\int_{-T/4}^{T/4} e^{-i\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right)v} dv = \frac{2 \sin\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} + \omega}.$$

Combinando los resultados se obtiene

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \frac{\sin\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} - \omega} + \frac{\sin\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} + \omega}.$$

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \frac{T}{4} \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) + \frac{T}{4} \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)$$