

PHYSICS · OPTICS · PHOTONICS

Fundamentals of Lasers and Light–Matter Interaction

Fundamentos de láseres e interacción de la luz con materiales

Lecture slides · Material de clase

María Gabriela Capeluto

Department of Physics · FCEyN · University of Buenos Aires

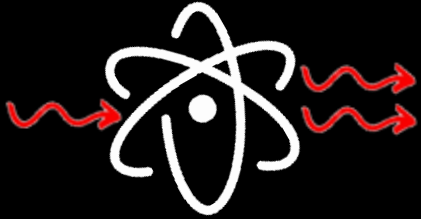
Laboratory of Optics and Photonics · LOFT / IFIBA

Contents

01	Introducción general e historia	3	11	Oscilaciones por encima del umbral y amplificadores	440
02	Ecuaciones de Maxwell y ondas	54	12	Cómo obtener inversión de población	485
03	Ondas planas, velocidad y dispersión de grupo, coherencia	85	13	Inversión de población transitoria	507
04	Medios activos: modelo del electrón clásico oscilante	132	14	Métodos de bombeo	534
05	Medios activos: ancho de línea	164	15	Modos longitudinales en resonadores	560
06	Medios activos: líquidos, sólidos e iones	219	16	Modos transversales	596
07	Medios activos: semiconductores	291	17	Haces gaussianos I	621
08	Principios del funcionamiento del láser: radiación en equilibrio térmico	348	18	Haces gaussianos II: matrices ABCD	672
09	Principios del funcionamiento del láser: condiciones de operación	369	19	Láseres pulsados, propagación lineal y no lineal, mode locking	709
10	Oscilador láser por encima del umbral	406			

Combined course material. Original slide decks are preserved in their source order.

Bienvenidos a “Láseres”



Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos de láseres e interacción de la luz con materiales

1^{er} cuatrimestre 2026

- 1 – Introducción a conceptos generales de láseres. Evolución histórica de los sistemas láseres. Fuerzas motoras que dieron lugar al estado del arte actual de los láseres y desarrollos tecnológicos que fueron posibles a partir del uso de los mismos.
- 2 – Fundamentos de la interacción de la luz con los materiales. Propiedades clásicas y cuánticas. Niveles de energía, ancho de línea y procesos de ensanchamiento en medios activos láseres de gases atómicos, gases moleculares, líquidos y sólidos. Transiciones radiativas y no radiativas.
- 3- Radiación en equilibrio térmico. Absorción y emisión estimuladas, emisión espontánea. Coeficientes de Einstein. Principio de balance detallado.
- 4 – Condiciones para producir un láser. Inversión de población, ganancia, saturación de la ganancia, condición umbral.
- 5 – Sistemas de bombeo: Requerimientos y técnicas.
- 6 – Resonadores láseres. Criterios de estabilidad. Haces Gaussianos. Modos transversales y longitudinales.
- 7 – Sistemas láseres específicos. Láseres continuos y pulsados. Técnicas ópticas que emplean láseres. Tipos de láser que se emplean para los diferentes propósitos y como ellos pueden ser modificados para mejorar su performance para dada aplicación.

Específicos

- William T. Silfvast (2004) “Laser Fundamentals” Cambridge University Press. Segunda edición. [\(muy importante que sea la segunda edición o posterior!\)](#)
- A. E. Siegman (1986), “Lasers”. University Science Books
- C. Breck Hitz, James J. Ewing, Jeff Hecht (2012) “Introduction to Laser Technology” Wiley-IEEE Press. 4ta edición.
- W. Koechner and M. Bass, “Solid-State Lasers: A Graduate Text”, Springer-Verlag (2003)
- J. Verdeyen, “Laser Electronics”, 3er ed., Prentice Hall (1995).

Generales:

Cualquier libro de cabecera de óptica

- Bahaa E. A. Saleh y Malvin Carl Teich (2019) “Fundamentals of Photonics.” Wiley. Tercer Edición.

Material adicional que se entregará en las clases

Licenciatura y Doctorado

- Entrega de ejercicios de TP
- Final (tradicional o hacer las cuentas de un paper)

Doctorado

- Charla especial de su trabajo

Como no hay parciales, las Guías de TP son disparadores para ampliar conocimientos, por lo que se busca que los ejercicios no se limiten al enunciado

Como intercambiamos información



Página web de la materia

<https://asignaturas.df.uba.ar/fdl-capeluto/principal/>

Google drive

Acceso a carpeta Material para estudiantes

https://drive.google.com/drive/folders/1stcdsX9ypsHLaoMVLO7YdDyMI8_x2DCo?usp=drive_link



Acceso a carpeta para enviar guías de TP

https://drive.google.com/drive/folders/1CV70EVT2uf58Yk9mr_SNd5MaPYN4kQna?usp=drive_link



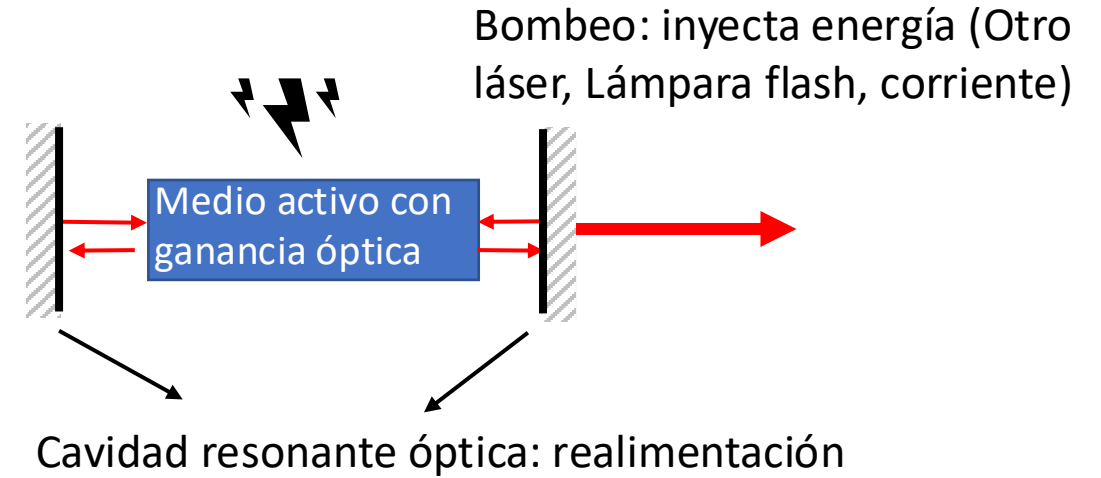
- Ideas generales del funcionamiento y características de un láser
- Láser: creación y evolución.

Introducción: que es un laser



LASER:

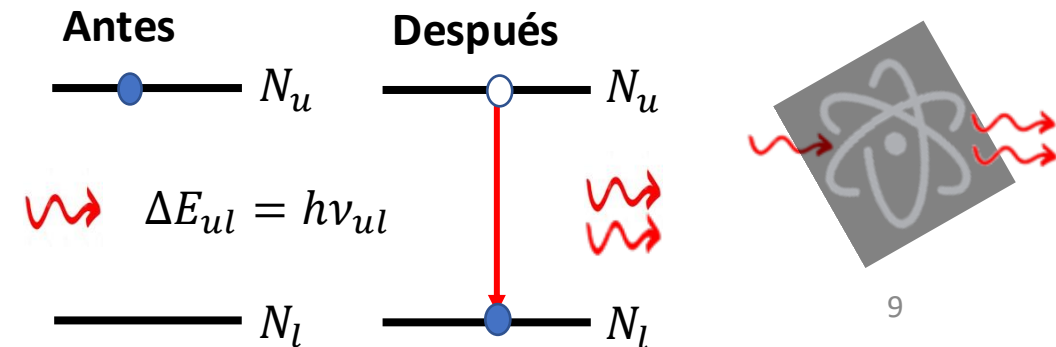
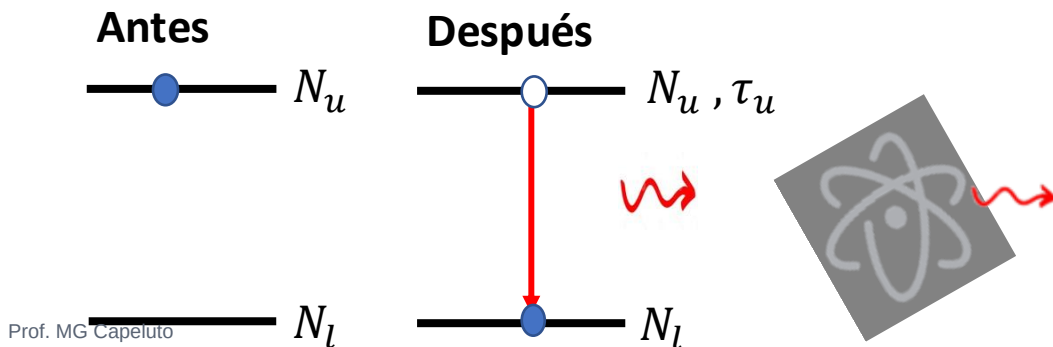
By Of
Light
Amplification
Stimulated
Emission
Radiation



Amplificación: Emisión estimulada + realimentación

La **emisión estimulada (Einstein 1917)** es el factor clave para dar todas las características especiales del laser

Emisión espontánea



CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS LASERES:

- Direccionales
- Colimados (divergencia $\sim 1-10$ mrad)
- Monocromáticos (pureza espectral)
- Gran brillo
- Coherentes (dejamos los porqués para luego de ver la naturaleza ondulatoria de la luz)

Todas estas propiedades se deben al mecanismo de amplificación en conjunto con el uso de una cavidad

Introducción: características generales

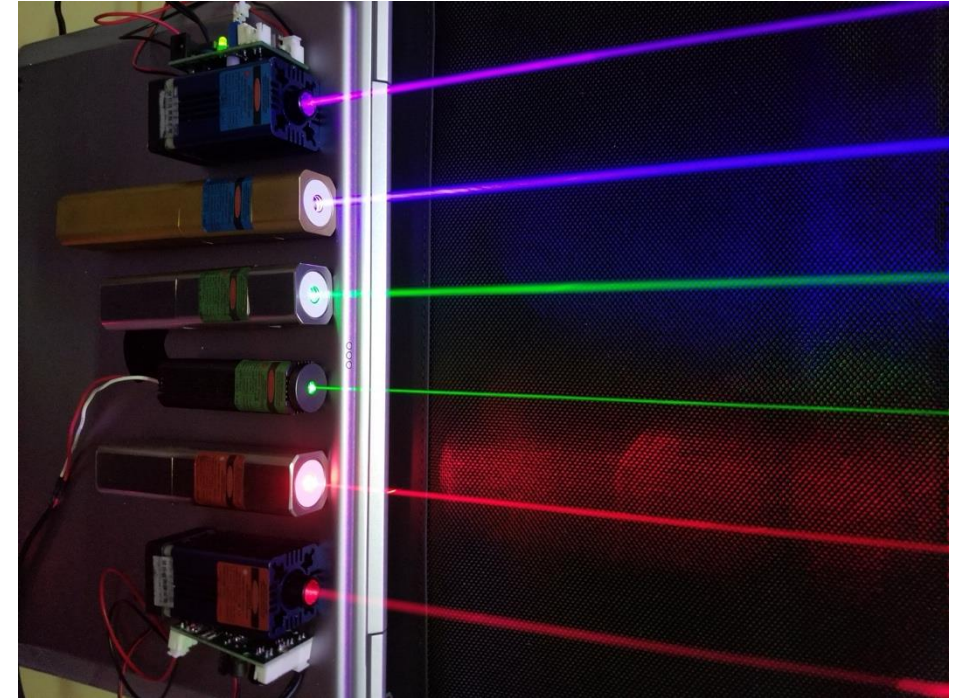


■ Direccionalidad y colimación

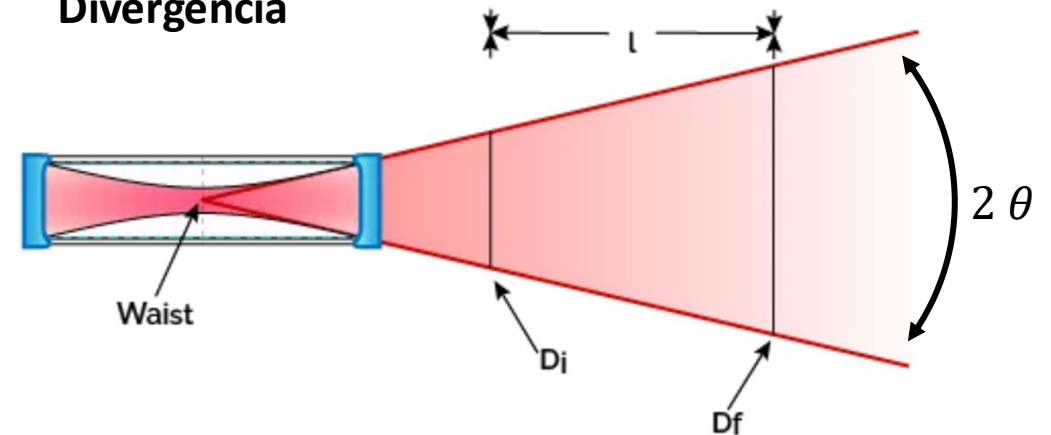


Emisión espontánea: Emite fluorescencia en 4π

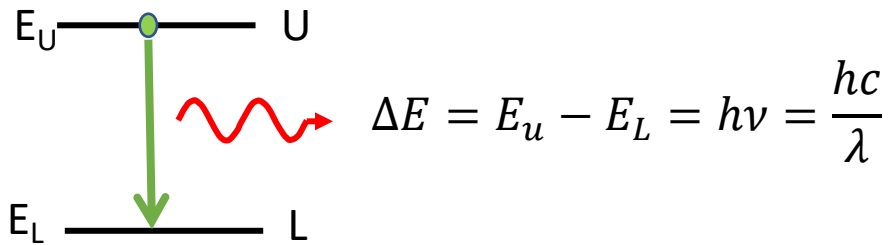
Emisión estimulada: Amplifica fluorescencia en una sola dirección determinada por la cavidad (energía y momento se conservan)



Divergencia



■ Gran pureza espectral (monocromáticos)



Medio activo → Transiciones atómicas bien definidas
Emisión estimulada → conserva energía y momento
Cavidad → solo algunas frecuencias resuenan

$$\begin{aligned} h &= 4,135\,667\,696 \times 10^{-15} \text{ eVs} \\ c &\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \\ h c &\approx 1240 \text{ eV nm} \end{aligned}$$

$$\Delta E \text{ (eV)} \approx \frac{1240}{\lambda \text{ (nm)}}$$

Energía de los fotones emitidos por el laser

ENERGÍA, POTENCIA, INTENSIDAD Y RADIANCIA

Supongamos que el laser emite $\eta = \frac{N}{t}$ fotones por unidad de tiempo

Potencia radiante/óptica (“cuan rápido entrega energía”)

$$P[W] = \frac{E [J]}{t [s]} = \eta E_\gamma [J]$$

← Energía total por unidad de tiempo

← número de fotones por unidad de tiempo × Energía de los fotones en Joules

$$E_\gamma = h \nu [eV], \quad 1 eV = 1.602 \times 10^{-19} J$$

$$(SI) \ 1 W = 1 J/s = 6.242 \times 10^{18} eV/s$$

Intensidad o irradiancia: (“cuan concentrada está la energía”)

$$I = \frac{P}{A} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

A igual potencia, la intensidad aumenta cuando disminuye el área

Introducción: características generales



Ej: LASER CONTINUO (CW)

un láser de 10 mW encendido 5 s entrega

$$E = Pt = 10 \cdot 10^{-3}\text{ W} \times 5\text{ s} = 5 \times 10^{-2}\text{ J} = 50\text{ mJ}$$

Ej: LASER PULSADO

$$E_p = 1\text{ mJ} (\text{energía por pulso}), \quad \tau = 10\text{ ns}, \quad f = 100\text{ Hz}$$

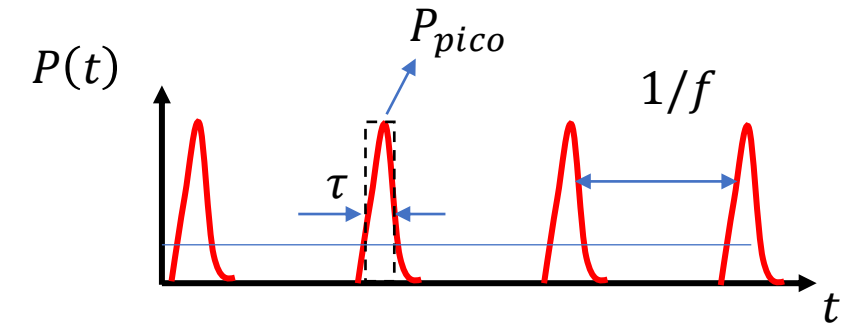
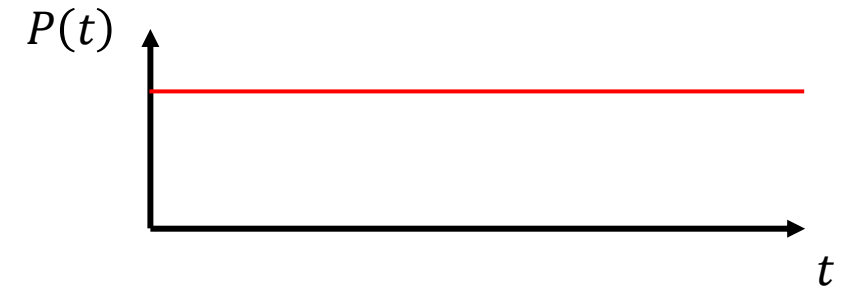
Potencia pico o instantánea

$$P_{pico} \sim \frac{E_p}{\tau} = \frac{10^{-3}\text{ J}}{10^{-8}\text{ s}} = 10^5\text{ W} = 100\text{ kW}$$

Potencia promedio

$$P_m = E_p f = 10^{-3}\text{ J} \times 100\text{ Hz} = 0.1\text{ W}$$

El láser pulsado puede tener potencia promedio chica pero potencia pico enorme.



$$E_p = \int P(t) dt \sim P_{pico} \tau$$

Brillo (Radiancia): Potencia concentrada por unidad de área por unidad de ángulo sólido (“que tan direccional y concentrado es el haz”)

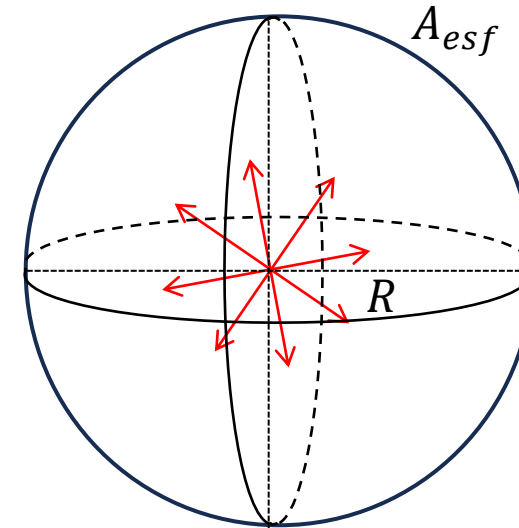
$$L = \frac{P}{A \cdot \Omega} \left[\frac{W}{m^2 sr} \right]$$

$$A \text{ [m}^2\text{]}$$

área perpendicular a la dirección
de propagación

$$P \text{ [W]}$$

energía por unidad de tiempo



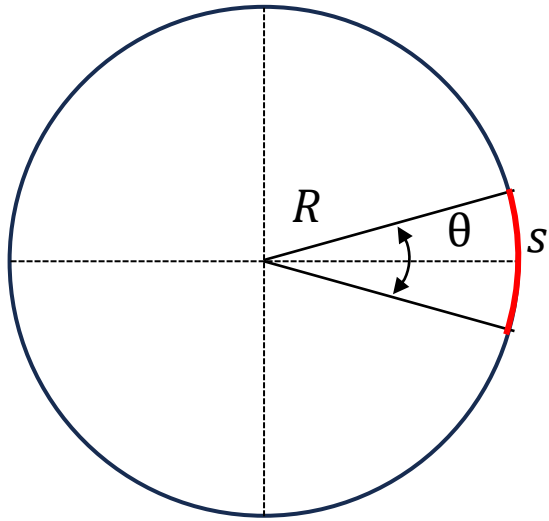
Fuente puntual:

$$L_{puntual} = \frac{(P/A_{esf})}{4\pi} = \frac{I}{4\pi[sr]}$$

$$A_{esf} = 4\pi R^2$$

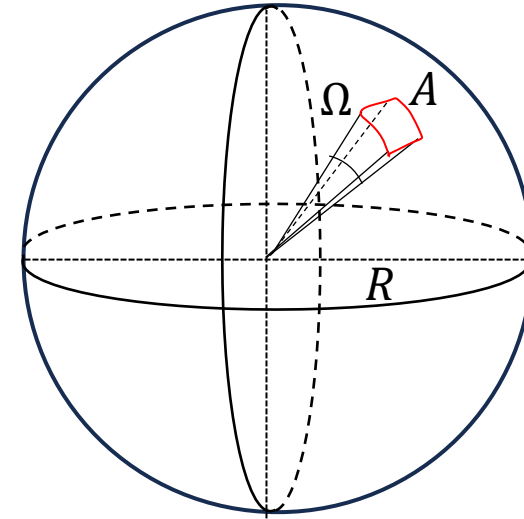
La esfera completa
 $\Omega = 4\pi sr$

ángulo en el plano y ángulo sólido



$$\theta = \frac{s}{R} \text{ [rad] (radianes)}$$

ángulo sólido



$$\Omega = \frac{A}{R^2} \text{ [sr] (stereoradian)}$$

La esfera completa

$$\Omega = 4 \pi \text{ sr}$$

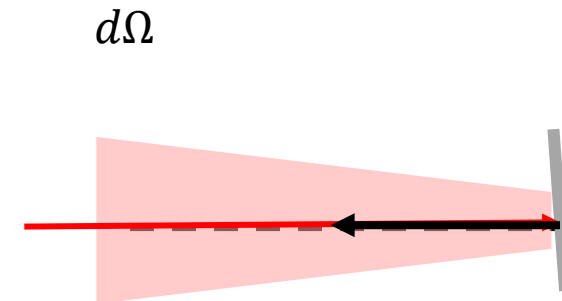
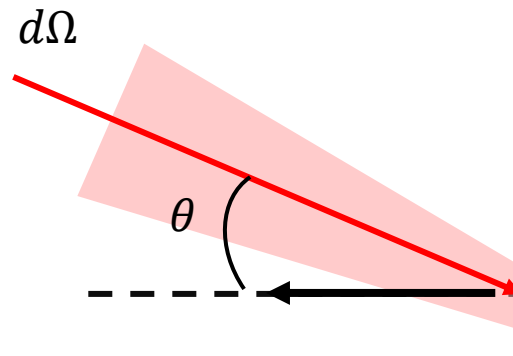
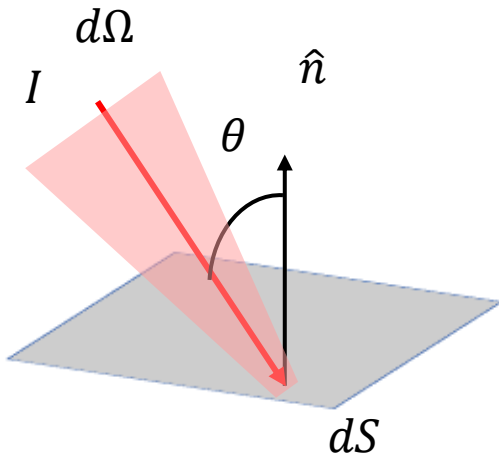
Brillo (Radiancia):

Fuente puntual: $L_{puntual} = \frac{(P/A_{esf})}{4\pi} = \frac{I}{4\pi[sr]}$

Laser: $L_{Laser} = \frac{dP}{\underbrace{d\Omega dS \cos(\theta)}_{dS_{\perp}}} \left[\frac{W}{cm^2 sr} \right]$



$$P = \int L_{Laser} \cos(\theta) d\Omega dS$$

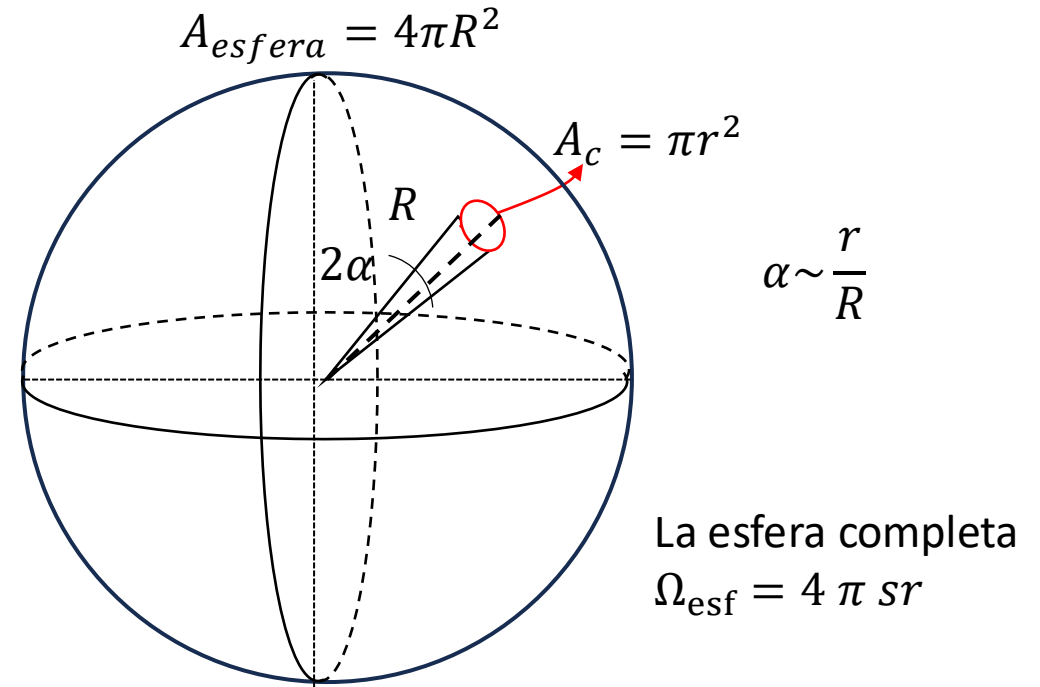


Area perpendicular $dS' = dS \cos(\theta)$

Brillo (Radiancia):

Fuente puntual:
$$L_{puntual} = \frac{(P/A_{esf})}{4\pi} = \frac{I}{4\pi[sr]}$$

Laser:
$$L_{laser} = \frac{dP}{d\Omega dS \cos(\theta)} \left[\frac{W}{cm^2 sr} \right]$$



$$\alpha \ll 1, \quad \Omega_{cono} = \frac{A_c}{R^2} = \frac{\pi r^2}{R^2} [sr] = \pi \alpha^2 [sr]$$

Brillo (Radiancia):

Fuente puntual:
$$L_{puntual} = \frac{(P/A_{esf})}{4\pi} = \frac{I}{4\pi[sr]}$$

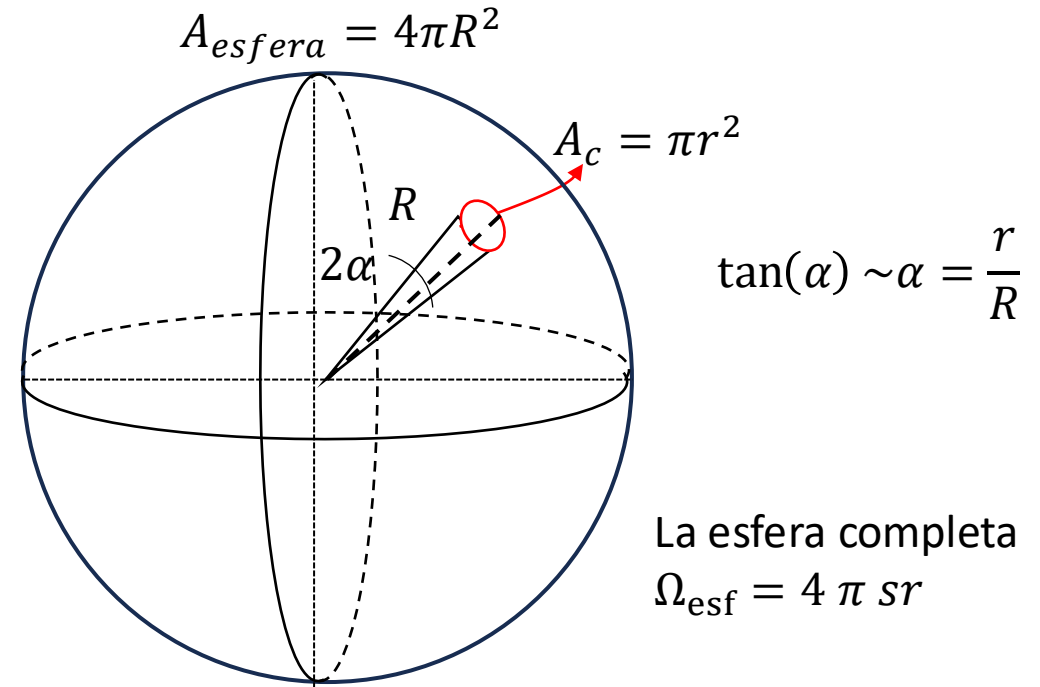
Laser:
$$L_{laser} = \frac{dP}{d\Omega dS \cos(\theta)} \left[\frac{W}{cm^2 sr} \right]$$

Laser y fuente puntual con igual intensidad:

$$L_{laser} = \frac{(P/A_{circ})}{\Omega} = \frac{I}{\Omega} \quad (\theta = 0 \text{ incidencia normal})$$

$$\frac{L_{laser}}{L_{puntual}} = \frac{4\pi}{\Omega} \sim \frac{4\pi[sr]}{\pi (10^{-3})^2[sr]} \sim 4 \times 10^6$$

$$\alpha \sim 1 \text{ mrad}$$



$$\alpha \ll 1, \quad \Omega_{cono} = \frac{A_c}{R^2} = \frac{\pi r^2}{R^2} [sr] = \pi \alpha^2 [sr]$$

los láseres pueden concentrar mucha energía en una superficie pequeña

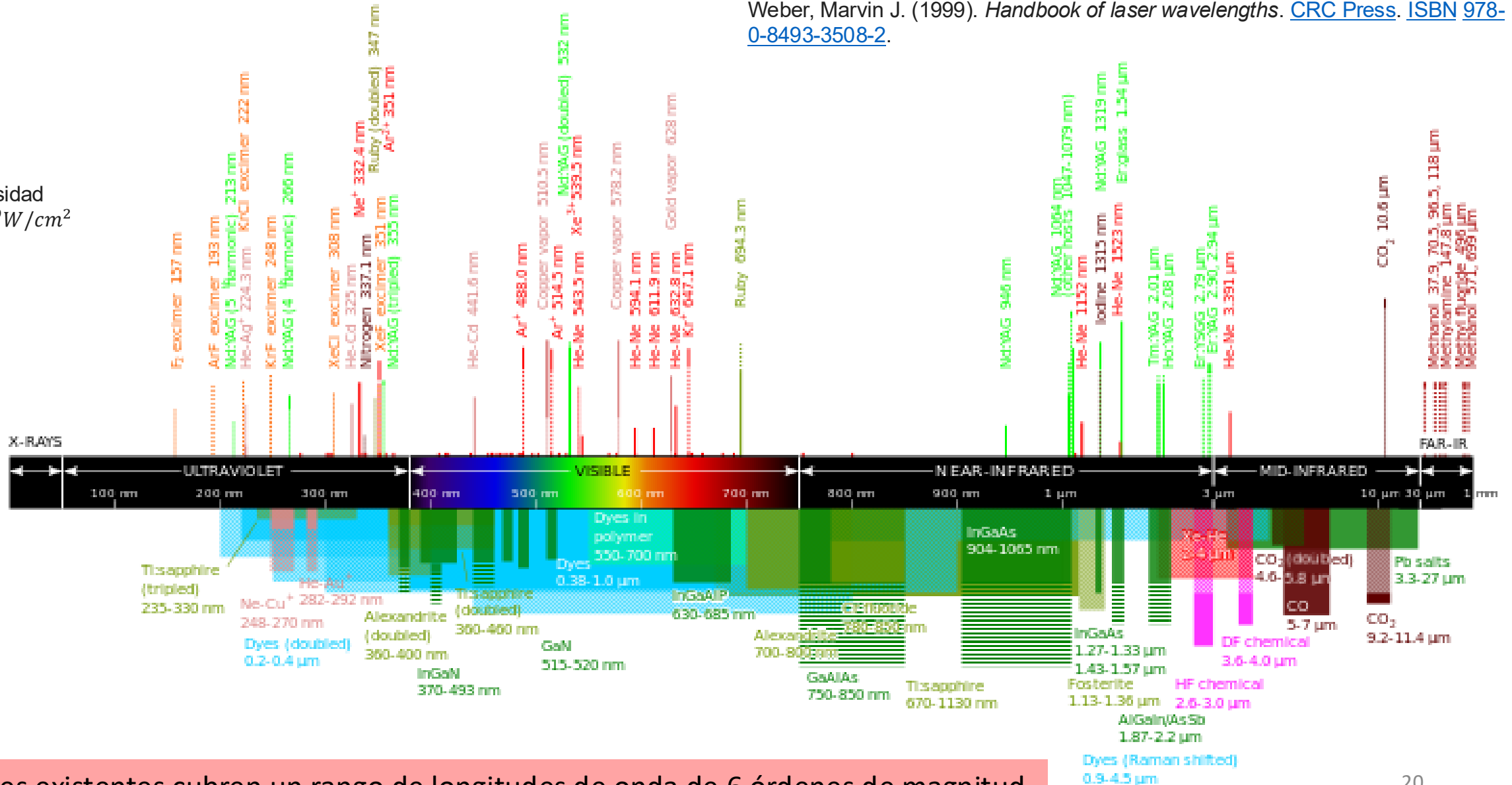
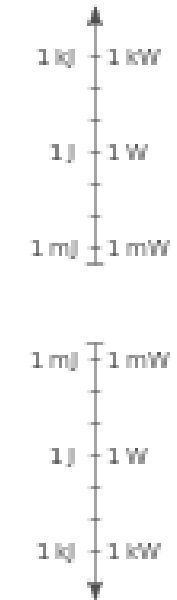
Introducción: características generales



Weber, Marvin J. (1999). *Handbook of laser wavelengths*. CRC Press. ISBN 978-0-8493-3508-2.

Máxima intensidad enfocada 10^{29} W/cm^2

Pulse energy CW power



Los láseres existentes cubren un rango de longitudes de onda de 6 órdenes de magnitud

Láser: creación y evolución

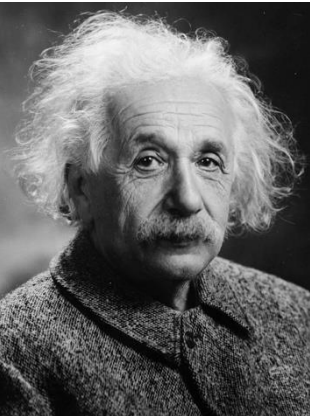


No hubiera sido posible si no fuera por...



- La luz es una forma de radiación electromagnética
- La luz se comporta como partícula

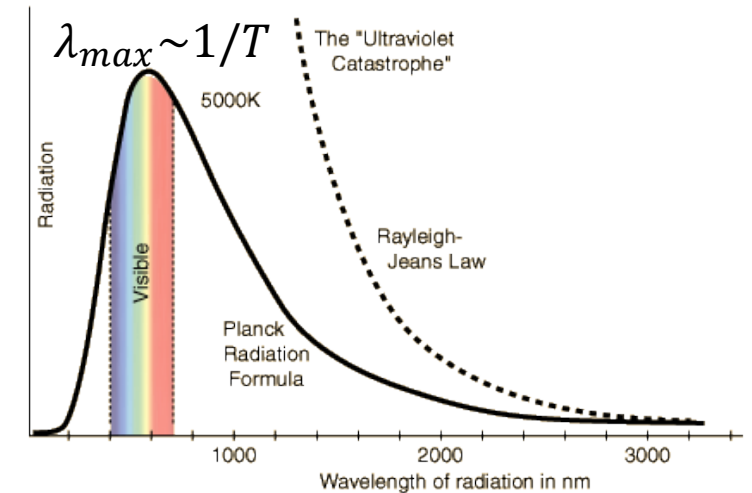
1900 – Max Planck: Radiación de cuerpo negro. La energía puede ser absorbida o emitida en cuantos discretos de energía $E = nh\nu$



1905 – Albert Einstein, efecto fotoeléctrico: La luz también entrega su energía en forma de cuantos: partículas cuánticas llamadas **fotones**

1917 – Albert Einstein propuso el proceso por el cual los láseres son posibles: **Emisión estimulada**

Además de emitir fotones espontáneamente y absorber (estimulado), se puede estimular a los electrones en los átomos para que se produzca la emisión de fotones en longitudes de onda particulares



~ 40 años después se lograron amplificar esas emisiones

Láser: creación y evolución



- 1953 – Charles Townes (Columbia University, USA), simultáneamente Nikolái Básov y Aleksandr Prójorov (URSS), proponen el concepto de MASER

Idea originaria de los LASERS:

MASER = Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

- 1954 – Se construye el primer MASER: por primera vez se genera radiación electromagnética y se amplifica empleando emisión estimulada

Medio activo: vapor de amonio $\lambda \sim 1.25 \text{ cm}$, 10 nW

- 1957 – Gordon Gould– Columbia University – **describe las primeras ideas para construir un “MASER óptico” Laser en su cuaderno de laboratorio y lo hace notariar en un candy shop del Bronx.** Es considerado el primer uso del acrónimo LASER.

Gould se une a la compañía Technical Research Group

Cuaderno notariado de Gould



Láser: creación y evolución



1958 – Charles Townes (CU) y Artur Schawlow - Bell Laboratories

Primera publicación (PRL): propuesta para extender el MASER a frecuencias ópticas e IR

Primera patente 1958 (aplicación)



Primer artículo científico

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 112, NUMBER 6

DECEMBER 15, 1958

Infrared and Optical Masers

A. L. SCHAWLOW AND C. H. TOWNES*

Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey

(Received August 26, 1958)

The extension of maser techniques to the infrared and optical region is considered. It is shown that by using a resonant cavity of centimeter dimensions, having many resonant modes, maser oscillation at these wavelengths can be achieved by pumping with reasonable amounts of incoherent light. For wavelengths much shorter than those of the ultraviolet region, maser-type amplification appears to be quite impractical. Although use of a multimode cavity is suggested, a single mode may be selected by making only the end walls highly reflecting, and defining a suitably small angular aperture. Then extremely monochromatic and coherent light is produced. The design principles are illustrated by reference to a system using potassium vapor.

INTRODUCTION

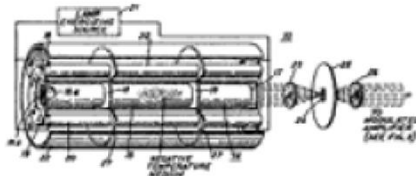
AMPLIFIERS and oscillators using atomic and molecular processes, as do the various varieties of masers,¹⁻⁴ may in principle be extended far beyond the range of frequencies which have been generated electronically, and into the infrared, the optical region, or beyond. Such techniques give the attractive promise of coherent amplification at these high frequencies and of generation of very monochromatic radiation. In the infrared region in particular, the generation of reasonably intense and monochromatic radiation would allow the possibility of spectroscopy at very much higher resolution than is now possible. As one attempts to extend maser operation towards very short wavelengths, a number of new aspects and problems arise, which require a quantitative reorientation of theoretical discussions and considerable modification of the experi-

CHARACTERISTICS OF MASERS FOR MICROWAVE FREQUENCIES

For comparison, we shall consider first the characteristics of masers operating in the normal microwave range. Here an unstable ensemble of atomic or molecular systems is introduced into a cavity which would normally have one resonant mode near the frequency which corresponds to radiative transitions of these systems. In some cases, such an ensemble may be located in a wave guide rather than in a cavity but again there would be characteristically one or a very few modes of propagation allowed by the wave guide in the frequency range of interest. The condition of oscillation for n atomic systems excited with random phase and located in a cavity of appropriate frequency may be written (see references 1 and 2)

$$n \geq hV\Delta\nu / (4\pi u^2 O_c). \quad (1)$$

2,929,922
MASERS AND MASER COMMUNICATIONS
SYSTEM
Arthur L. Schawlow, Madison, N.J., and Charles H.
Townes, New York, N.Y., assignors to Bell Telephone
Laboratories, Incorporated, New York, N.Y., a corpo-
ration of New York
Application July 30, 1958, Serial No. 752,137
11 Claims. (Cl. 250-7)



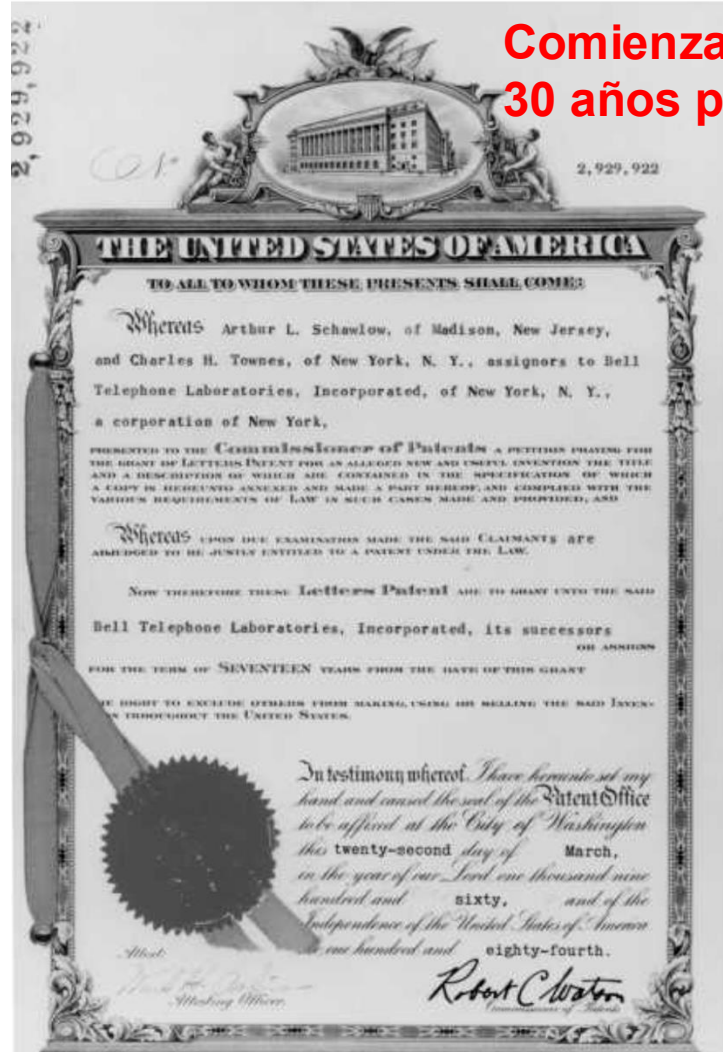
1. A communications system for operation in the infrared, visible, or ultraviolet regions of the electromagnetic wave spectrum comprising a monochromatic maser generator, a coherent modulated maser amplifier, a modulating source, and a detector; said generator comprising a chamber having end reflective parallel members and transparent side members, a negative temperature medium disposed within said chamber, and means arranged about said chamber for pumping said medium; said amplifier comprising a chamber having end reflective parallel members and transparent side members, a negative temperature medium disposed within said chamber, means arranged about said chamber for pumping said medium, and coupling means for abstracting from one end of said chamber an amplified counterpart of the energy transmitted into the other end thereof and for directing said amplified counterpart at said detector.

Láser: creación y evolución



1959 - Gould y TRG aplican a una serie de patentes relacionadas con las ideas de Gould y se las rechazan.

1960 - Townes y Schawlow, (Bell Labs) obtienen la patente para el MASER óptico, hoy conocido como LASER



Comienza una disputa judicial por 30 años por la invención del laser

US patent number
2,929,922



- Arthur Schawlow recalls how Rabi inspired him to make discoveries
- Gordon Gould recalls his creative moment
- (y muchas otras grabaciones para escuchar)

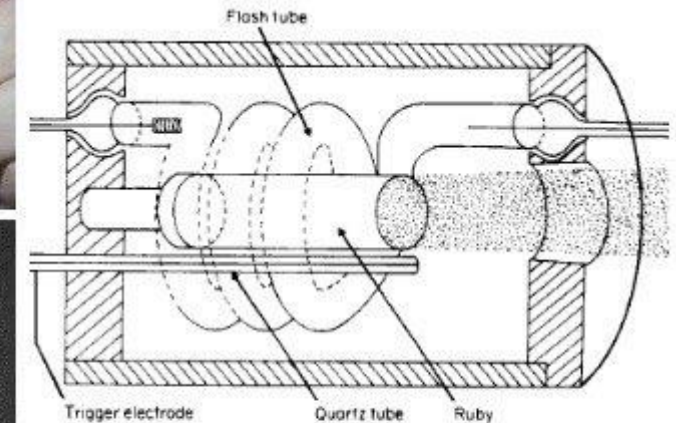
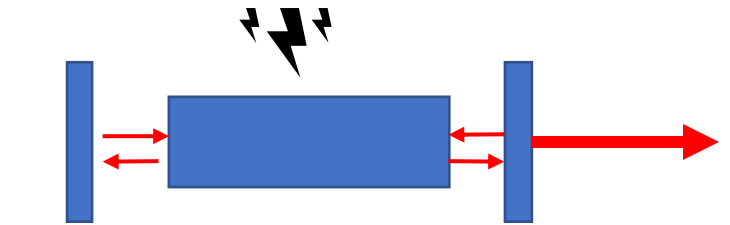
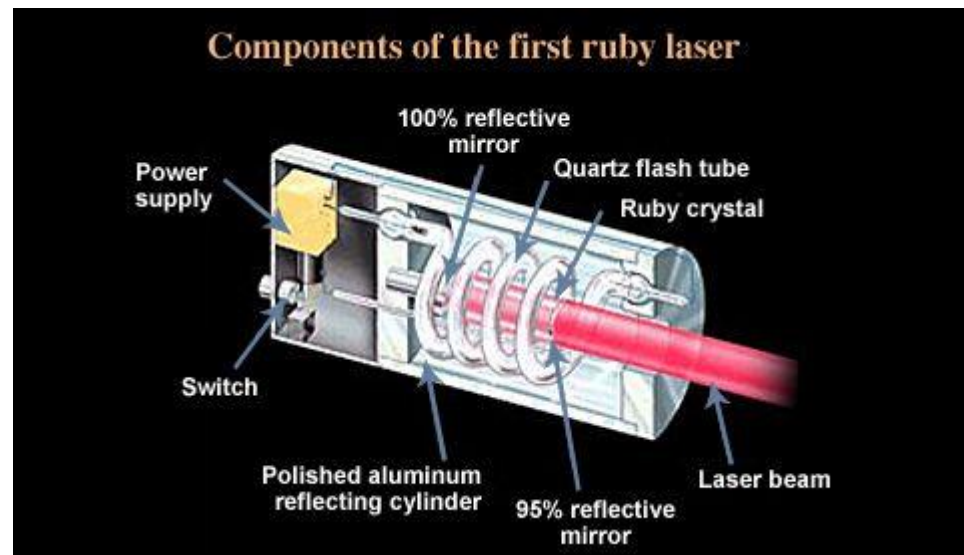
<https://history.aip.org/exhibits/laser/index.html>

Láser: creación y evolución



1960 – Theodore Maiman – Hughes Research Laboratories

1er Láser:



Thomas Maiman, 1960

This man ignored the ridicule of his peers and easily succeeded in producing history's first visible light laser from this simple photographic coiled flashlamp and his ruby crystalline rod.

RUBI: zafiro sintético dopado con Cr
Transición del ión Cr^{3+} , emission en rojo

1960

- Theodore Maiman – Hughes Research Laboratories
Laser de Rubí
- P P. Sorokin y M,J. Stevenson (IBM Thomas J. Watson Research Center)
Laser de uranio
- Ali Javan, William Bennett Jr. and Donald Herriott (Bell Labs)
Laser de Helio-Neón (He-Ne): CW 1.15 μm . Primer láser con medio activo gaseoso.
 - Alta pureza espectral
 - Transiciones atómicas en gases enrarecidos

1961 – Comienza la comercialización del laser .

- Elias Snitzer (American Optical Co.)
Laser de Neodimio vidrio (Nd:glass)



Primera operación ocular: se remueve un tumor usando laser de Rubí

Láser: creación y evolución



1962

- F. J. McClung y Hellwarth primer demostración de laser de pulsado usando la **técnica Q-switching** (usando una celda Kerr).

Potencia pico 100x la del laser de Rubi

Aplicación: soldadura de resortes en relojes.

- Tres grupos de investigación (GE, IBM, and MIT's Lincoln Laboratory)

Laser semiconductor de Arseniuro de Galio (GaAs)

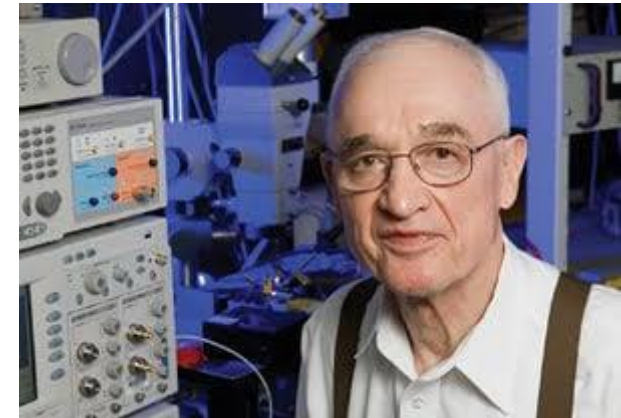
- pulsado, enfriado criogénicamente
- conversión de energía eléctrica en luz IR

- El primer **láser de Yttrium Aluminum Garnet (YAG)**.

- Nick Holonyak Jr., (General Electric Co. lab , Syracuse, N.Y.)

LED (light emitting diode) visible GaAsP (Gallium Arsenide Phosphide)

- Compacto
- Eficiente en el rojo



Nick Holonyak Jr. (L. Brian Stauffer/University of Illinois)



GaAsP LD fue la base de los LEDs que se usan en CDs, DVD players, y teléfonos

1963

- Logan E. Hargrove, Richard L. Fork y M.A. Pollack La primera demostración del método **mode-locking** (trabado de modos) usando un He-Ne y un modulador acustoóptico. Base fundamental para los láseres de fs
- H. Kroemer, University of California, Santa Barbara,
R Kazarinov y Z. Alferov, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute in St. Petersburg, Rusia,

Proponen independientemente las ideas para construir laser de semiconductores a partir de dispositivos de heteroestructuras

1964

- W. B. Bridges, Hughes Research Labs
Laser de Argón pulsado: capaz de emitir en longitudes de onda visible y UV con gran pureza espectral

Láser: creación y evolución



1964

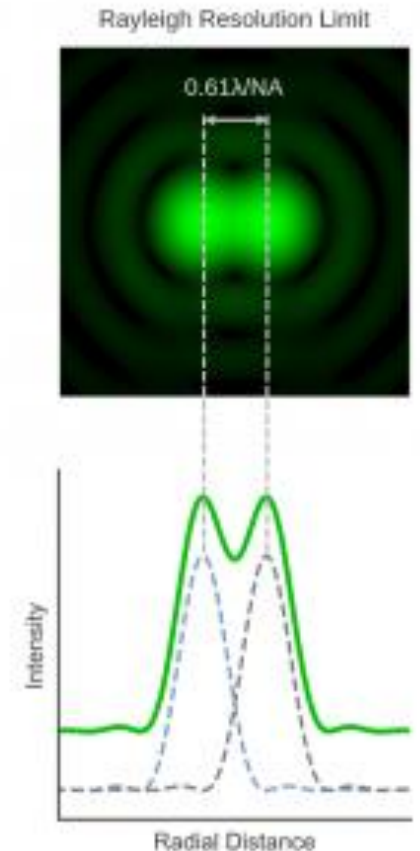
- Kumar Patel at Bell Labs. **Laser de CO₂** : el más potente operando en CW de esos tiempos.
Aplicación: Herramienta de corte en cirugía e industria
- Joseph E. Geusic and Richard G. Smith at Bell Labs
Nd:YAG (neodymium-doped YAG)
Aplicaciones: corrección de vision Keratomielosis

1965

- Jerome V.V. Kasper and George C. Pimentel, University of California, Berkeley
Primer **láser molecular** (o químico): Cloruro de hidrógeno emitiendo a 3.7 μm
- Mary L. Spaeth of Hughes Research Labs
Laser de colorante bombeado por laser de Ruby
Los primeros sintonizables! Importante para aplicaciones en espectroscopía

1970

- Basov, V.A. Danilychev, and Yu. M. Popov (P.N. Lebedev Physical Institute)
Laser de excímeros que emiten en UV (litografía)



Láser: creación y evolución

Optics and Photonics News
(Mayo 2012)

1970

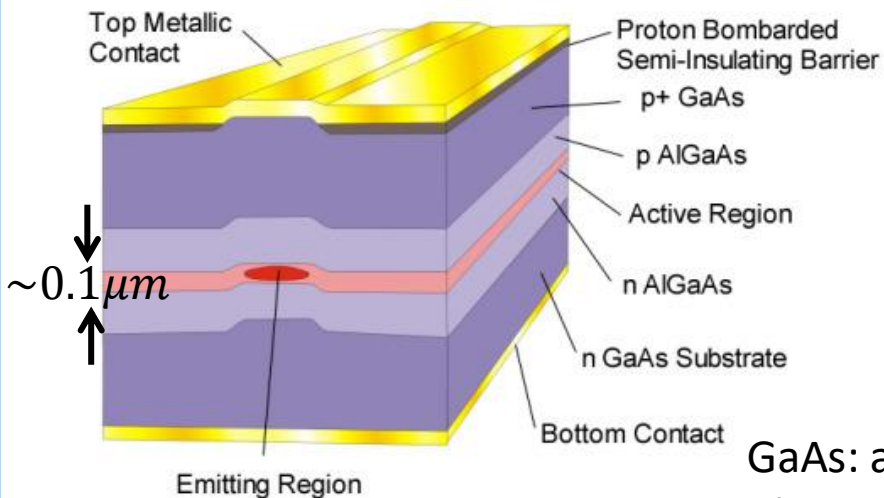
- El grupo de Alferov (Ioffe Physico-Technical Institute), Mort Panish e Izuo Hayashi (Bell Labs)

Laser de heteroestructura o heterobarreras: 1er laser CW de semiconductores a temperatura ambiente

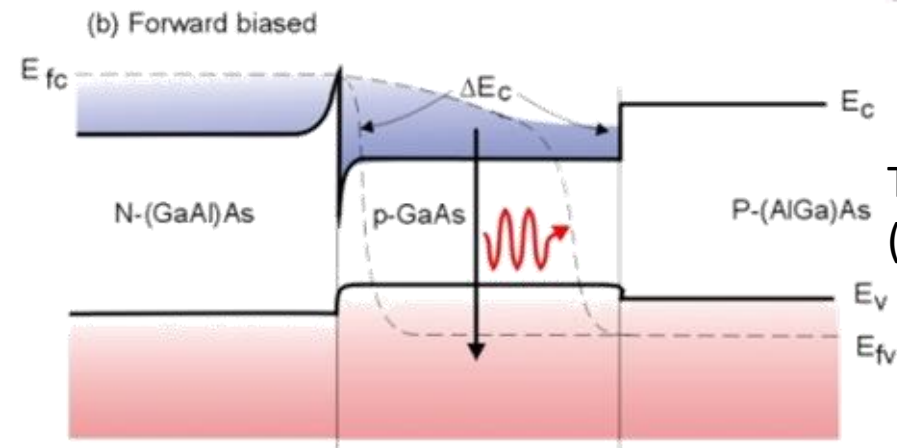
- Corrientes altas (400mA), vida corta

Permitiría la comercialización de sistemas de comunicación por fibra óptica

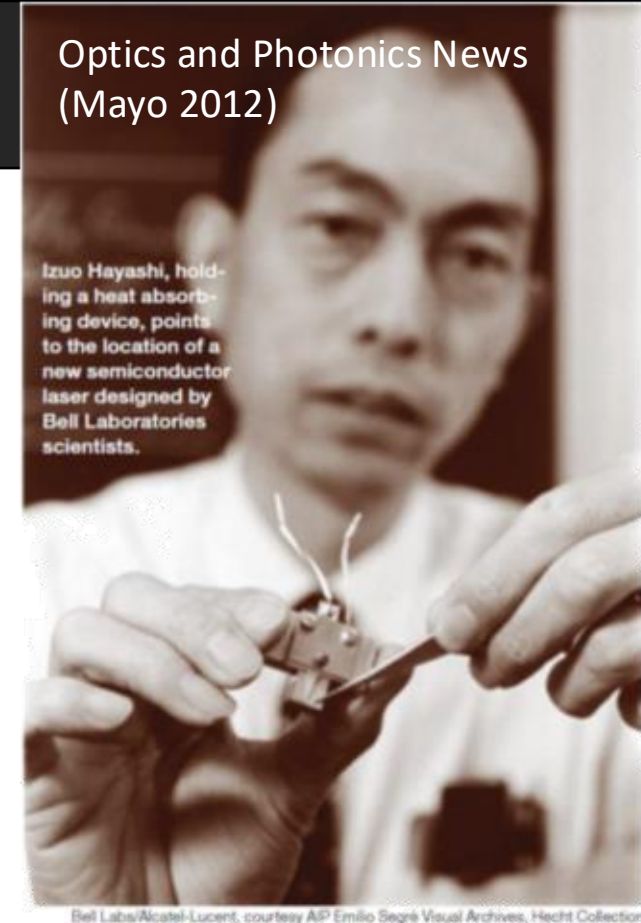
Laser de doble heteroestructura



GaAs: activo
AlGaAs: barrera



Transiciones interbanda
(radiación por recombinación)



Bell Labs/Nicatel-Lucent, courtesy AIP Emilio Segrè Visual Archives, Hecht Collection

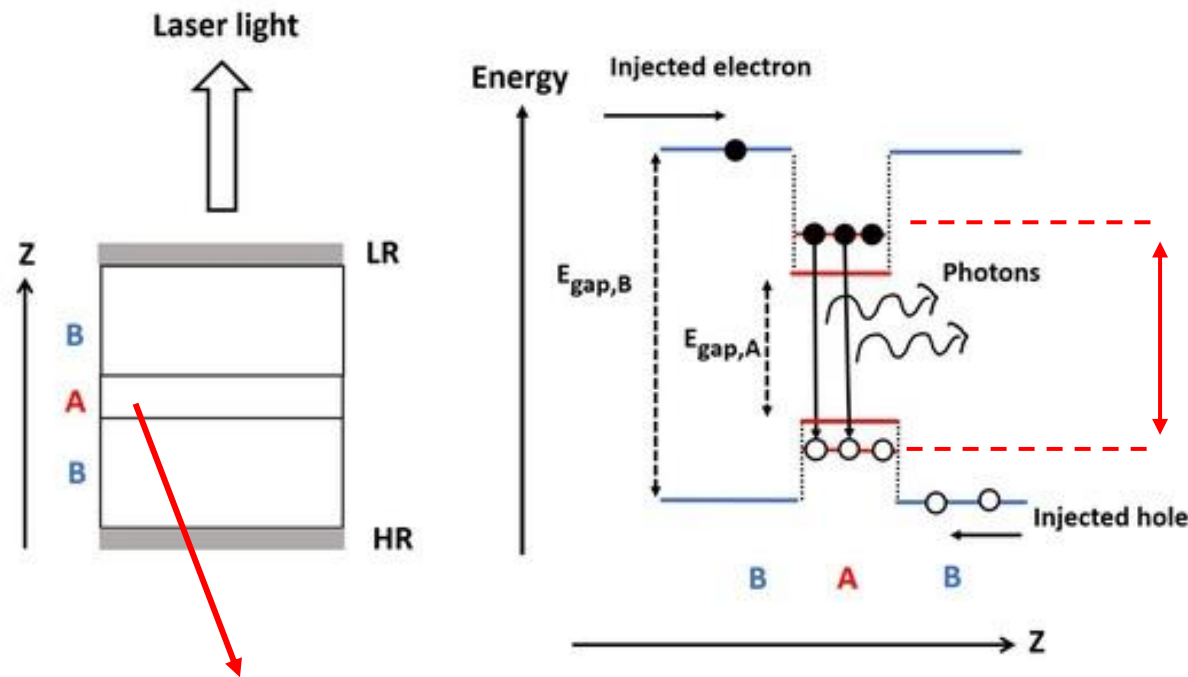
Láser: creación y evolución



1972

Láser de pozos cuánticos, necesita menos corriente para alcanzar la condición umbral de láseo que los láseres de diodo convencionales (o sea son mucho más eficientes), porque QW aumenta la probabilidad de recombinación electrón – hueco. Además, se pueden hacer múltiples QW (mayor eficiencia)

Invencción Charles H. Henry / Primer demostración (1977) Holonyak (University of Illinois, Urbana-Champaign)



Gap efectivo depende del espesor del material

Espesor menor que la longitud de onda de Broglie para electrones ($h/p \sim 100 \text{ \AA}$)



Chicle Wrigley: primer producto que uso código de barra con lectura de scanner laser (1974)

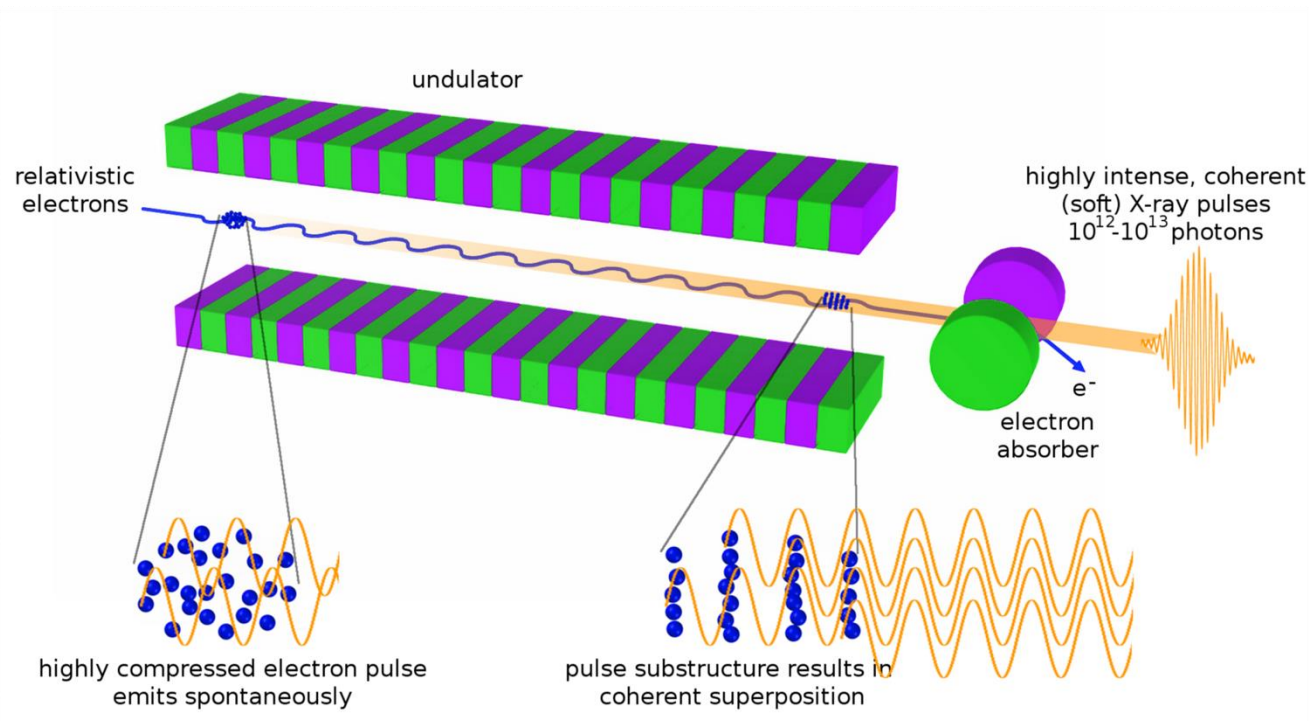
Láser: creación y evolución



1976

Primer laser de electrones libres (FEL: free electron laser). John M.J. Madey (Stanford University, California)

- No usa medio de ganancia, ni cavidad! Alto brillo y direccionalidad
- Usa electrones acelerados a velocidades cercanas a la de la luz, para luego pasar por un arreglo periódico de imanes que produce radiación coherente.
- Como solo son electrones libres en vacío, no produce daños materiales, lentes térmicas, como en otros láseres cuando alcanzan potencias pico grandes



Láser: creación y evolución

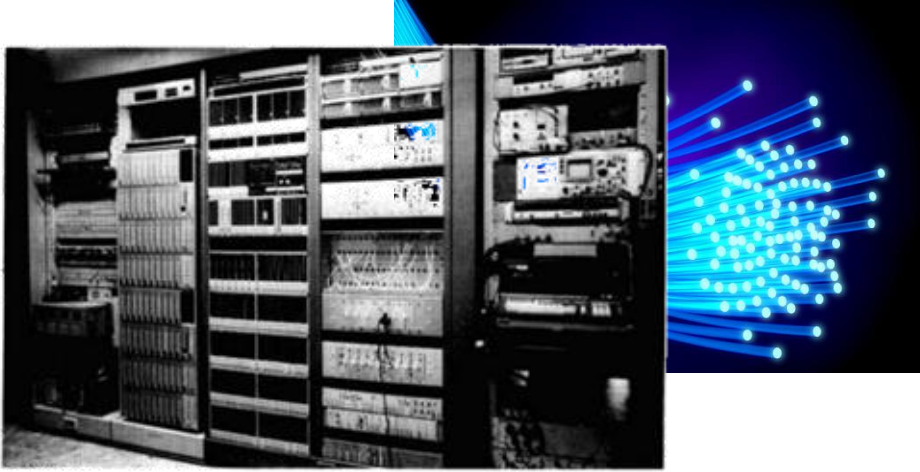


Fig. 2—Franklin Central Office installation.

1977: la primera instalación comercial de un sistema de comunicación por fibra óptica de Bell Labs bajo las calles de Chicago.

Schwartz et al. *Bell System Technical Journal*, 57(6), 1881 (1978)

1982 :

Laser de Titanio Zafiro. Peter F. Moulton, MIT's Lincoln Laboratory
pulsos de picosegundos o femtosegundos

Reemplaza al laser de colorantes en aplicaciones de ultrafast donde se requiere sintonizar



1er prototipo de CD, se usa láser de diodo IR para leer (1978)



1er CD comercial (1982)

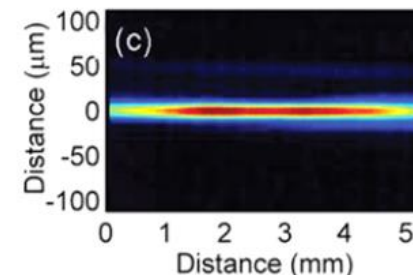
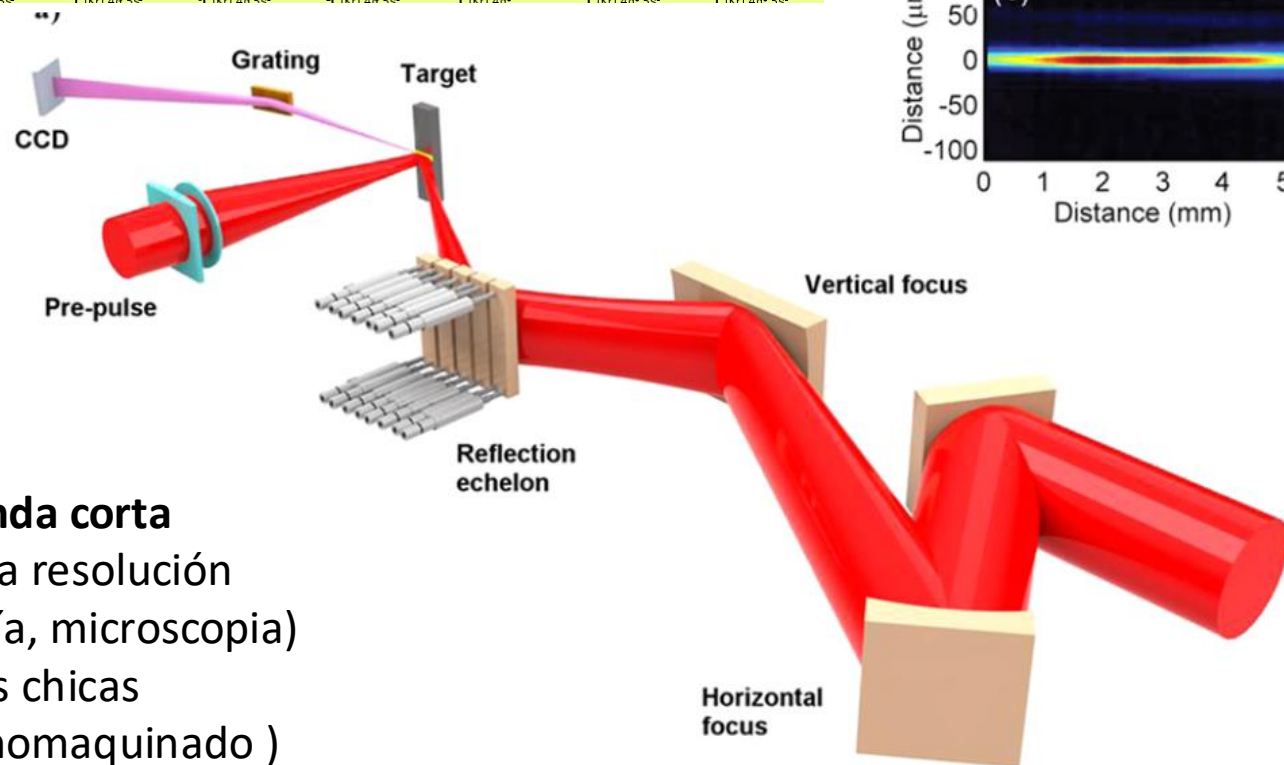
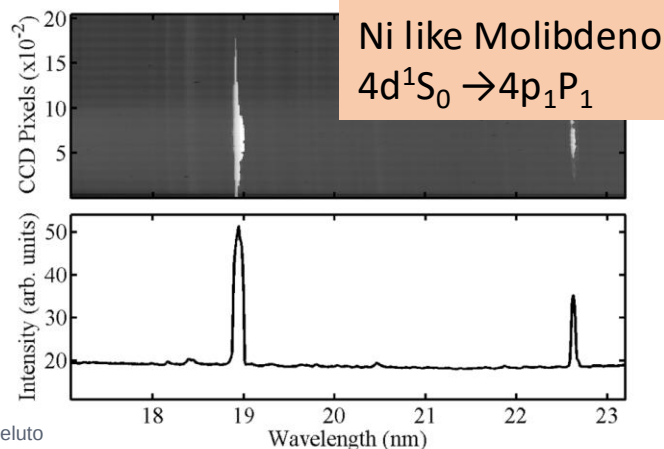
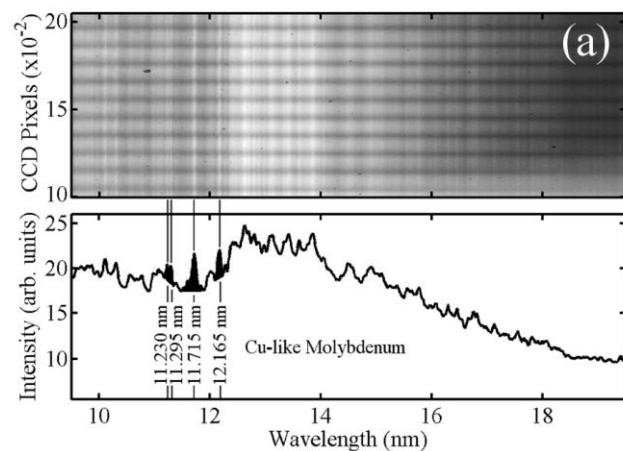
Láser: creación y evolución



1985 Laser de rayos X

Medio activo plasma que se genera enfocando un láser de Nd en un blanco sólido por transferencia de energía óptica en calor en los electrones

51.9962 24 652.9 1.66 Cr Cromo [Ar] 3d 4s ²	54.9380425 717.3 1.55 Mn Manganeso [Ar] 3d 4s ²	55.845 26 762.5 1.83 Fe Hierro [Ar] 3d 4s ²	58.9331927 760.4 1.91 Co Cobalto [Ar] 3d 4s ²	58.6934 28 737.1 1.88 Ni Níquel [Ar] 3d 4s ²	63.546 29 745.5 1.90 Cu Cobre [Ar] 3d ¹⁰ 4s ¹	65.38 3 906.4 1.65 Zn Zinc [Ar] 3d ¹⁰ 4s ²
95.96 42 684.3 2.16 Mo Molibdeno [Kr] 4d 5s ²	(98) 702.0 1.90 Tc Tecnecio [Kr] 4d 5s ²	101.07 44 710.2 2.20 Ru Rutenio [Kr] 4d 5s ²	102.905545 719.7 2.28 Rh Rodio [Kr] 4d 5s ²	106.42 46 804.4 2.20 Pd Paladio [Kr] 4d ¹⁰	107.868247 731.0 1.93 Ag Plata [Kr] 4d ¹⁰ 5s ¹	112.441 4 867.8 1.69 Cd Cadmio [Kr] 4d ¹⁰ 5s ²



Longitud de onda corta

- Medir con alta resolución (Interferometría, microscopia)
- Fabricar cosas chicas (litografía, nanomaquinado)
- Estudiar materiales

J. Rocca (Colorado state University)

Láser: creación y evolución

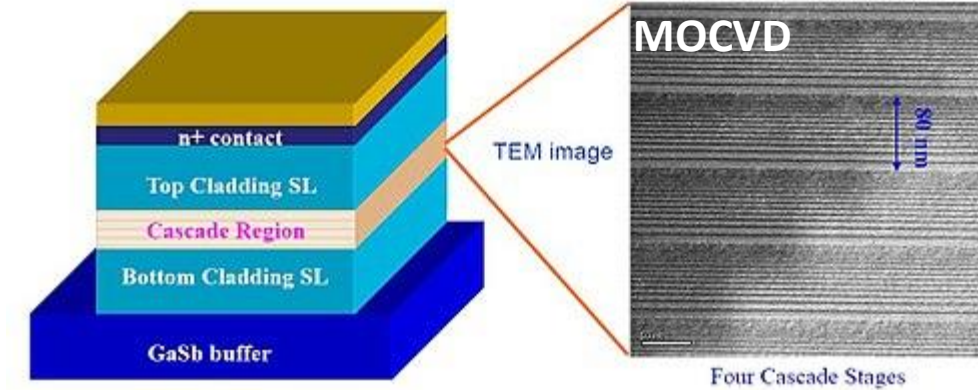


1994

Jérôme Faist, Federico Capasso, Deborah L. Sivco, Carlo Sirtori, Albert L. Hutchinson (Bell Labs)

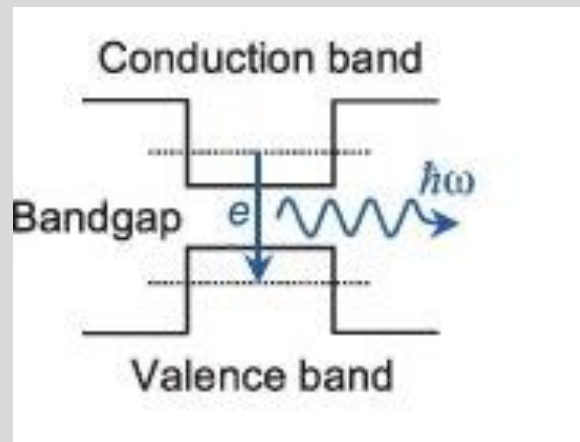
El laser de cascada cuántica

Aplicaciones: sensado remoto de gases atmosféricos (por poder sintonizarse en varias lambdas y potencias).

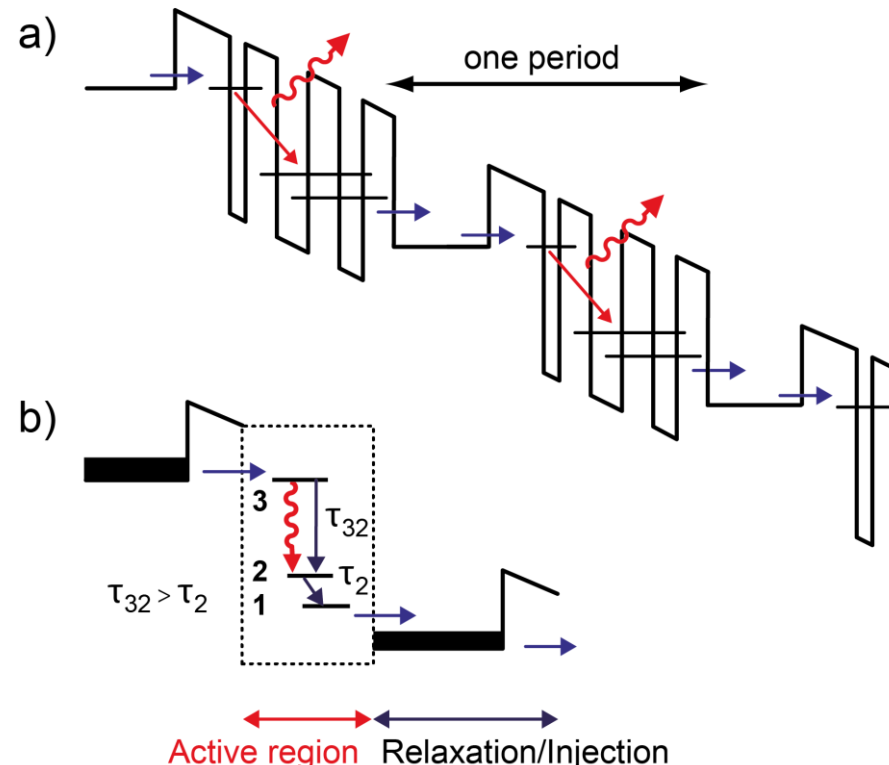


metalorganic chemical vapour deposition (MOCVD)

Laser de pozos cuánticos



1 fotón por cada recombinación e-h



- Transiciones ópticas entre **sub-bandas** (estados confinados cuánticos)
- λ depende del diseño de las capas
- tunneling para inyectar el nivel superior del periodo siguiente
- no hay recombinación e-h
- muchos fotones por cada electrón

1994

Primer **laser de quantum dot** - Nikolai N. Ledentsov of A.F. (Ioffe Physico-Technical Institute.)

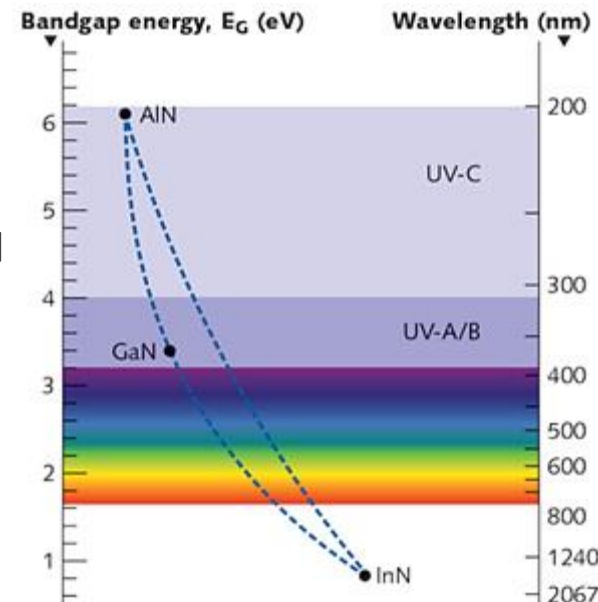
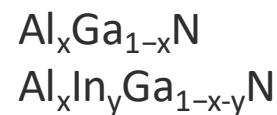
1996

Primer laser pulsado de átomos (laser de materia) - Wolfgang Ketterle (MIT)

1997

El primer laser de Nitruro de Galio (GaN). Shuji Nakamura, Steven P. Den Baars, and James S. Speck at the University of California, Santa Barbara

Emite en el azul/violeta, de manera pulsada



Láser: creación y evolución



2009

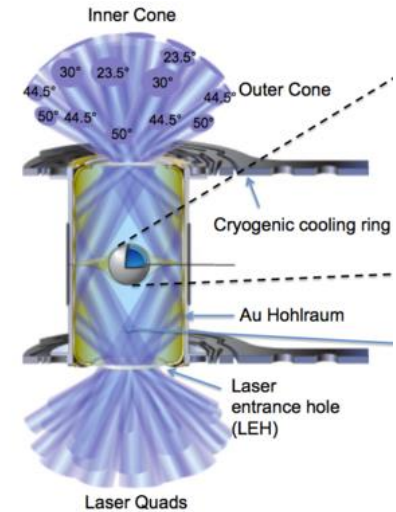
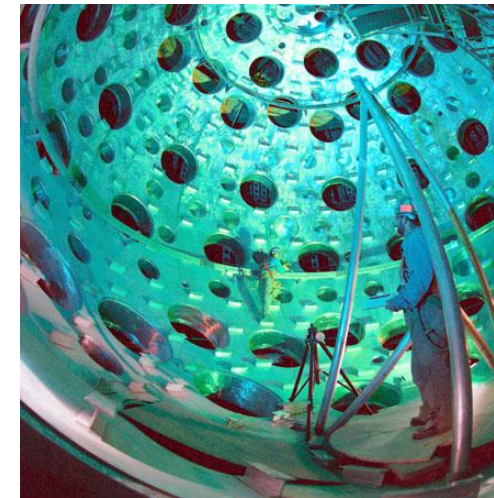
El laser más grande y de mayor energía en el mundo: La National Ignition Facility en Lawrence Livermore National Laboratory:

192 láseres UV enfocados en un target

- Estudiar estado de la materia en condiciones similares a la del interior de las estrellas
- Estudiar fusión de hidrogeno como fuente de energía potencial
- Duplica la energía dentro de un dispositivo nuclear (se pueden verificar simulaciones sin necesidad de hacer pruebas reales- stockpile stwarship)
- Condiciones necesarias para la ignición

2022

<https://lasers.llnl.gov/science/achieving-fusion-ignition>



2MJ en192 lasers@350nm
500TW en-target





2009: NASA Lanza el Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO). Equipado con un “altímetro laser” para medir los puntos altos y bajos. NASA crearía un mapa 3D de la luna que permitiría encontrar zonas de hielo y zonas seguras para el aterrizaje



2009: Intel anuncia la tecnología “Light Peak” . Se usa un laser VCSEL (vertical cavity surface emitting laser) para enviar y recibir 10 billones de bits por segundo (se puede transferir la librería completa del congreso en 17 minutos). Entraría en producción en 2010

2010

University of Konstanz : **Laser de fibra dopada con erbio:**
pulsado de 4.3-fs (una oscilación del campo), longitud de onda 1.5- μm

Láser: creación y evolución



2011

■ Hans Zogg, ETH Zürich

El primer **VECSEL** (vertical cavity surface-emiting laser) en mid-IR 5 μm .

Aplicación: Espectroscopía

■ Malte Gather y Seok Hyun Yun (Harvard University)

El **laser vivo** (célula $\sim 20 \mu\text{m}$ marcada con GFP -Green Fluorescent Protein) en cavidad

Aplicaciones biomédicas y biofotónicas

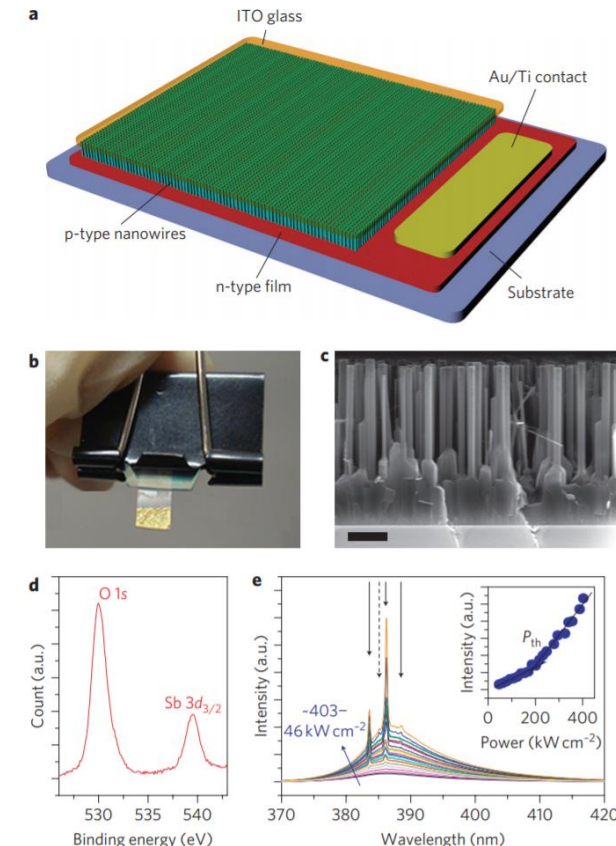
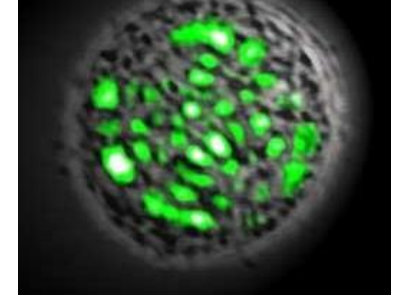
■ Jianlin Liu , University of California, Riverside

Laser de nanohilos de ZnO alimentado eléctricamente (superaron la dificultad de obtener dopaje p con este material)

Importancia ZnO: emisión UV

Integración nano fotónica y nanoelectrónica

laser vivo



2012

Brandon Redding, Michael Choma, y Hui Cao (Yale University)

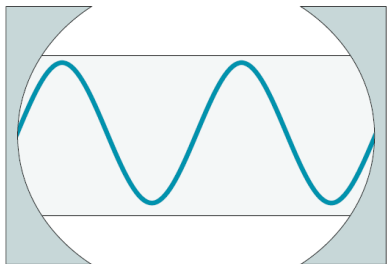
Random laser.

- Brillante como el láser tradicional
- Medio activo desordenado (emisión con baja coherencia especial)
- Baja coherencia elimina ruido coherente (speckle)

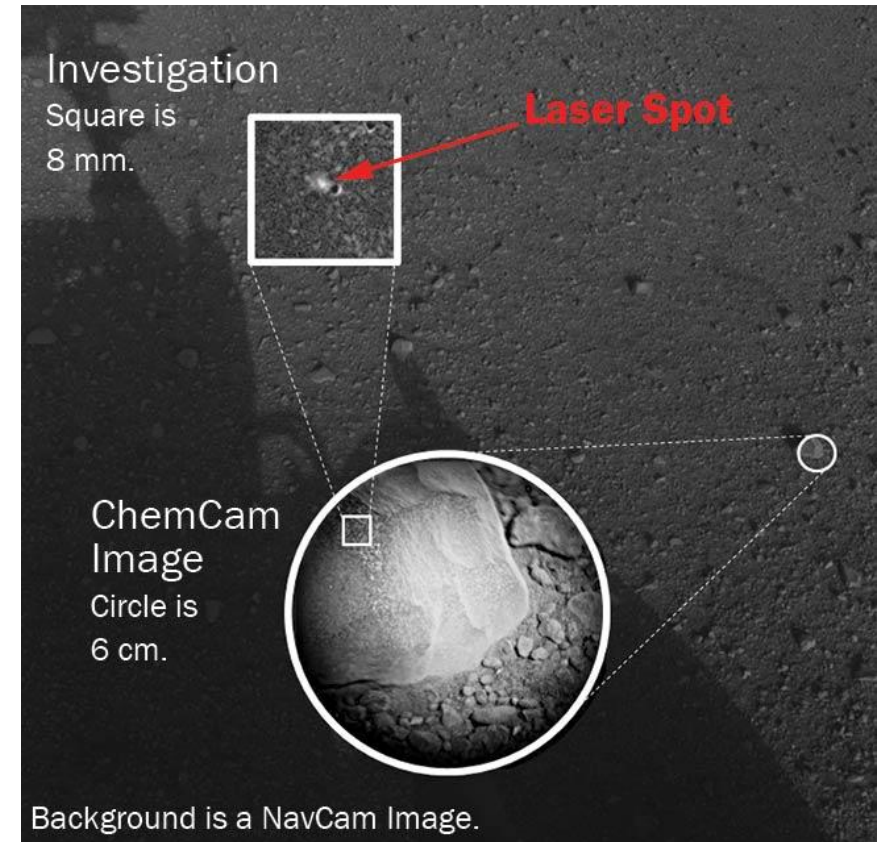
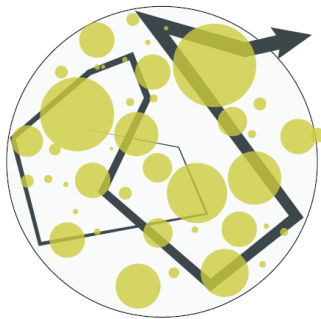
Aplicaciones: microscopia campo completo

Proyecciones de luz digitales

a Conventional lasing



b Random lasing



El robot Curiosity emplea la técnica “laser induced breackdown spectroscopy” para estudiarla composición de las rocas en Marte
usa un laser pulsado de Nd:KGW emitiendo en $1.067\text{ }\mu\text{m}$ para “destruir” una roca y generar una ‘pluma’ de plasma.

Sapienza, R. (2019). *Determining random lasing action. Nature Reviews Physics.*

En paralelo con NIF

* Shanghai Superintense Ultrafast Laser

10 PW laser, 340-J, 800 nm, pulsos de 21-fs

Quieren llegar a 100 PW

- Zeus 3 PW-30fs (UMICH)
- Aleph (CSU) 1PW, 30 fs

Son potencias suficientes para crear materia del vacío cuántico



Photonics Focus Feb 2020 (SPIE)

BACK IN THE

POWER GAME

The US is building one of the most powerful lasers in the world that could eventually break the quantum vacuum and produce matter from nothing

By Rebecca Pool

IT'S NO SECRET THAT THE US HAS TRAILED THE REST of the world when it comes to high-power ultrafast laser science. While North America well and truly led the petawatt pack at the turn of this century, the intense laser science scene has since shifted towards Europe and Asia.

But this is about to change. In September 2019, Karl Krushelnick, director of the Gérard Mourou Center for Ultrafast Optical Science (CUOS) at the University of Michigan, revealed he and colleagues had won \$16 million from the National Science Foundation to build a world-class high-power laser that he believes will bring the US back on track.

As he says, "This laser will have the highest peak power in the US and will be among the world's most powerful laser systems for the next decade." The CUOS team will be drawing on the US's high-power laser heritage alongside decades of photonics innovation worldwide.



Láseres: creación y evolución



LaserNetUS



U.S. DEPARTMENT OF
ENERGY

Office of
Science



Laser: creación y evolución



3828 Vol. 42, No. 19 / October 1 2017 / Optics Letters

Letter

Optics Letters



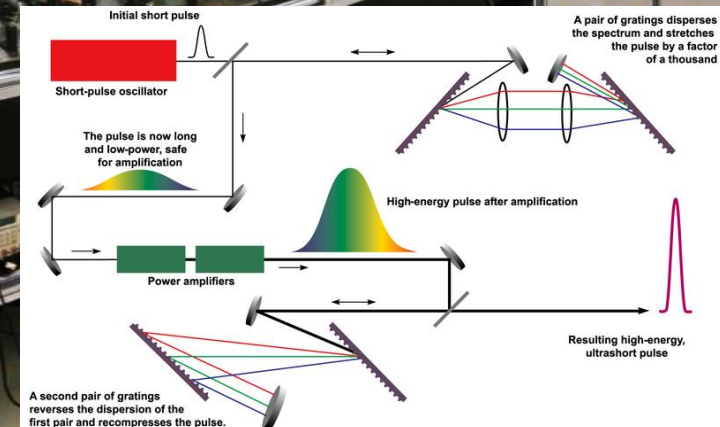
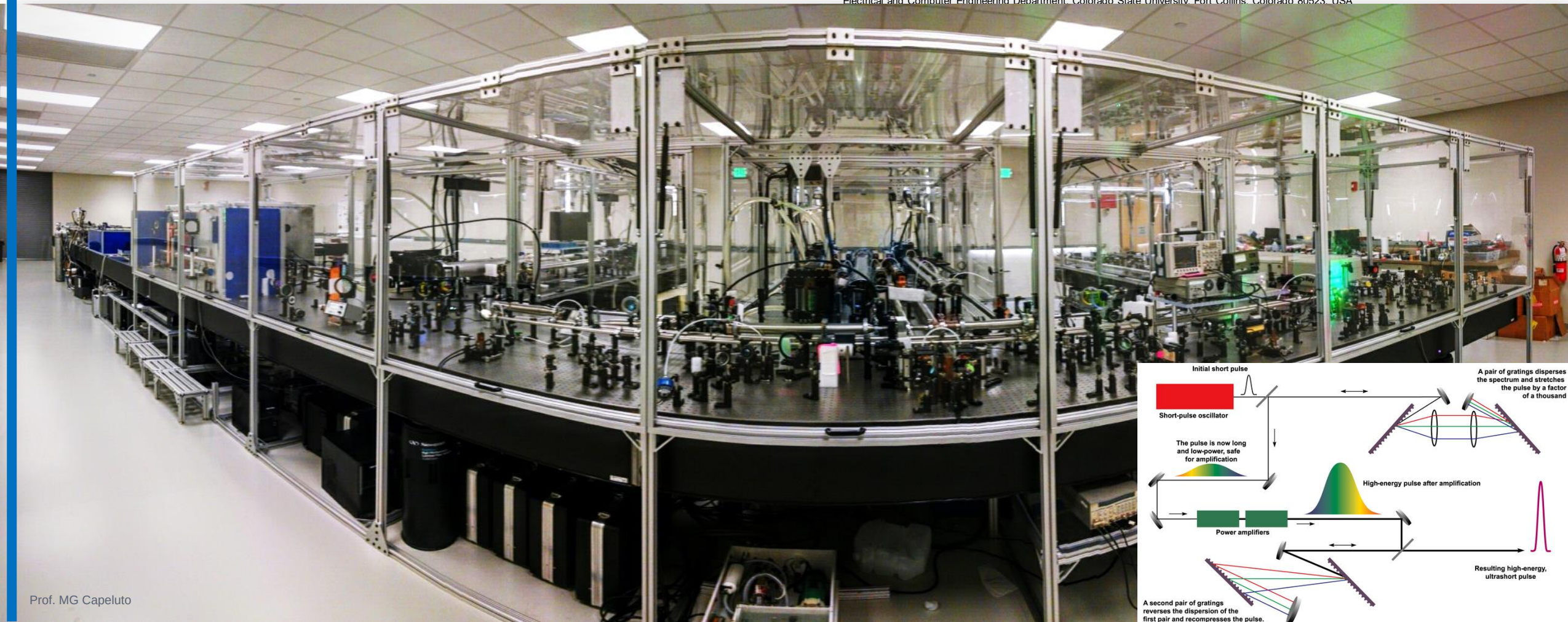
2017

ALEPH 400

0.85 PW laser operation at 3.3 Hz and high-contrast ultrahigh-intensity $\lambda = 400$ nm second-harmonic beamline

YONG WANG,^{1,†,*} SHOUJUN WANG,^{1,†} ALEX ROCKWOOD,^{2,†} BRADLEY M. LUTHER,³ REED HOLLINGER,¹ ALDEN CURTIS,¹ CHASE CALVI,² CARMEN S. MENONI,^{1,3} AND JORGE J. ROCCA^{1,2}

[†]Electrical and Computer Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 80523, USA



Algunos de los premios nobeles relacionados con lasers

1902	Physics Lorentz and Zeeman The Zeeman Effect, Electron Oscillator Model	1964	Physics Townes, Basov, and Prokhorov Maser-Laser Principle
1903	Physiology or Medicine Finsen Phototherapy – use of UV light to treat Lupus	1966	Physics Kastler Precision studies of optical resonances
1907	Physics Michelson The Michelson Interferometer & Precision Measurements	1967	Physiology or Medicine Granit, Hartline, and Wald Physiological and chemical visual processes in the eye
1908	Physics Lippmann Colour Photography based on Interference	1967	Chemistry Eigen, Norrish, and Porter Flashlamp Pump-Probe Studies of Chemical Reactions (μs)
1911	Physiology or Medicine Gullstrand Description of the Refractive Optics of the Eye	1971	Physics Gabor Holography
1912	Physics Dalén Solar-based regulator for buoys and lighthouses	1981	Physics Bloembergen and Schawlow Laser Spectroscopy
1918	Physics Planck Energy Quanta	1981	Physiology and Medicine Hubel and Wiesel Information Processing in the Visual System
1919	Physics Stark The Stark Effect	1989	Physics Ramsey, Dehmelt, and Paul Atomic Clocks, the Ion Trap
1921	Physics Einstein Photoelectric Effect & services to theoretical physics	1997	Physics Chu, Cohen-Tannoudji, and Phillips Laser Cooling and Trapping
1922	Physics Bohr Atomic Structure and the nature of radiation	1999	Chemistry Zewail Femtochemistry
1923	Physics Millikan Elementary Charge and the Photoelectric Effect	2000	Physics Alferov and Kroemer Optoelectronics, Semiconductor Heterostructures
1927	Physics Compton The Compton Effect	2001	Physics Cornell, Ketterle, and Wieman Bose Einstein Condensation
1930	Physics Raman Raman scattering	2005	Physics Glauber, Hall, and Haensch Quantum Optics, Spectroscopy, Optical Frequency Comb
1932	Physics Heisenberg Creation of Quantum Mechanics	2008	Chemistry Shimomura, Chalfie, and Tsien Green Fluorescent Protein GFP
1933	Physics Schrodinger and Dirac New Productive Forms of Atomic Theory	2009	Physics Kao, Boyle, and Smith Optical Fiber Communications ; Imaging and the CCD
1945	Physics Pauli Pauli Exclusion Principle	2012	Physics Harocche and Wineland Individual Quantum Systems
1953	Physics Zernike Phase Contrast Microscope	2014	Physics Akasaki, Amano, and Nakamura The Blue LED and Energy-Saving White Light Sources
1954	Physics Born Statistical Interpretation of the Wavefunction	2014	Chemistry Betzig, Hell, and Moerner Super-resolution microscopy
1955	Physics Lamb Fine structure of the H Spectrum (Lamb Shift, QED)	2018	Physics Ashkin, Mourou, and Strickland Optical Tweezers & Biophotonics Chirped Pulse Amplification

Prof. MG Capeluto

2023 Pierre Agostini, Ferenc Krausz, Anne L'Huilier:

For experimental methods generating attosecond pulses of light for studying electron dynamics in matter.



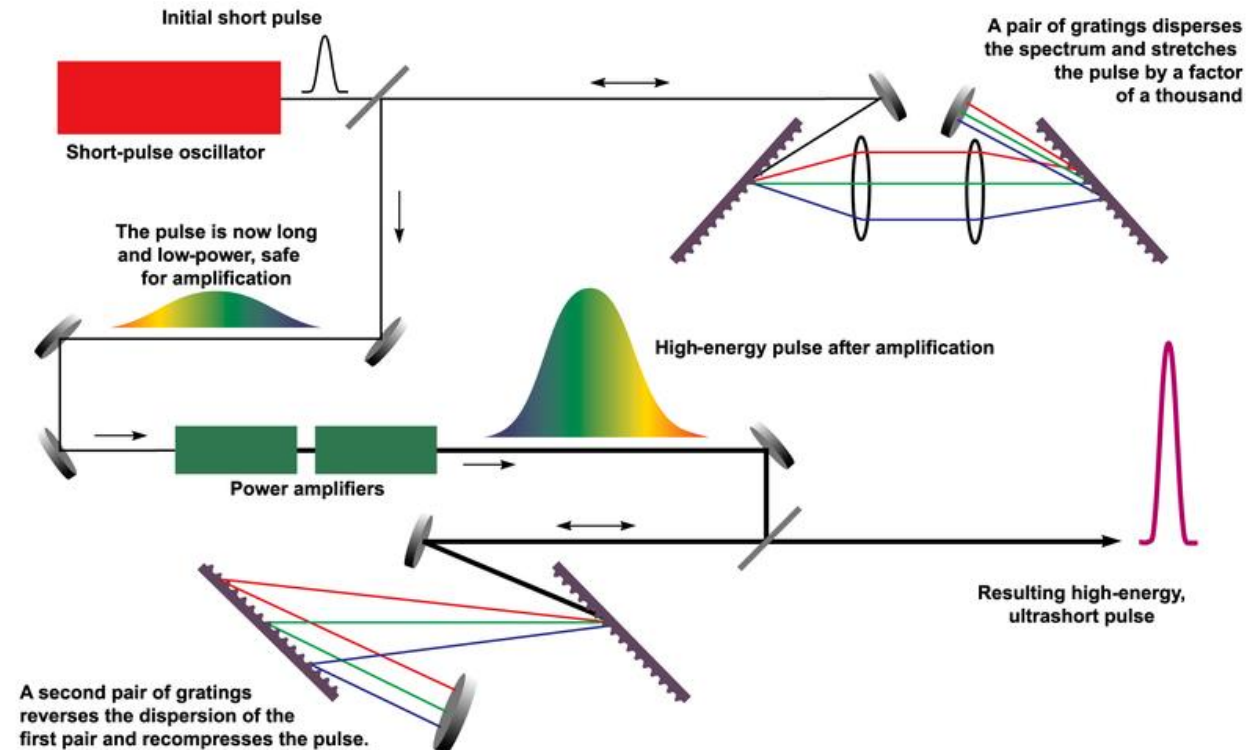
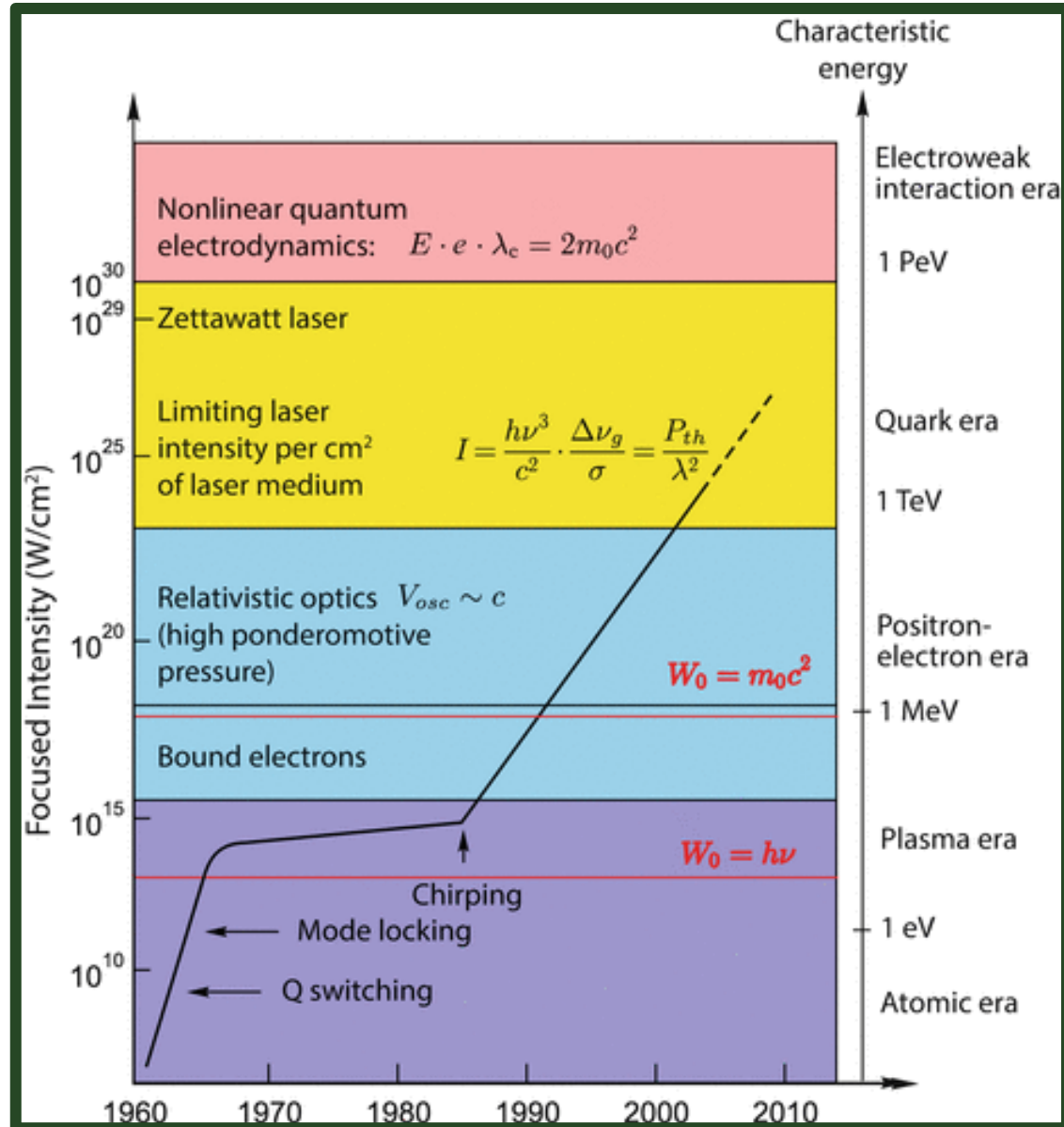
A selection of Nobel Prizes related to light, masers and lasers, and applications

<https://www.spiedigitallibrary.org/journals/advanced-photonics/volume-2/issue-05/050501/Light-Lasers-and-the-Nobel-Prize/10.1117/1.AP.2.5.050501.full?SSO=1>

- Desarrollo del conocimiento
- Desarrollo tecnológico
- Manufactura y procesamiento de materiales
- Medicina y biofotónica
- Microelectrónica
- Metrología y precisión
- Búsqueda de fuentes alternativas de energía
- Aplicaciones militares y estratégicas

En la mayor parte de los casos, interesa incrementar la potencia o disminuir la longitud de onda

Las fuerzas motoras del desarrollo de los láseres



Gérard Mourou and Donna Strickland Nobel 2018

Las fuerzas motoras del desarrollo de los láseres

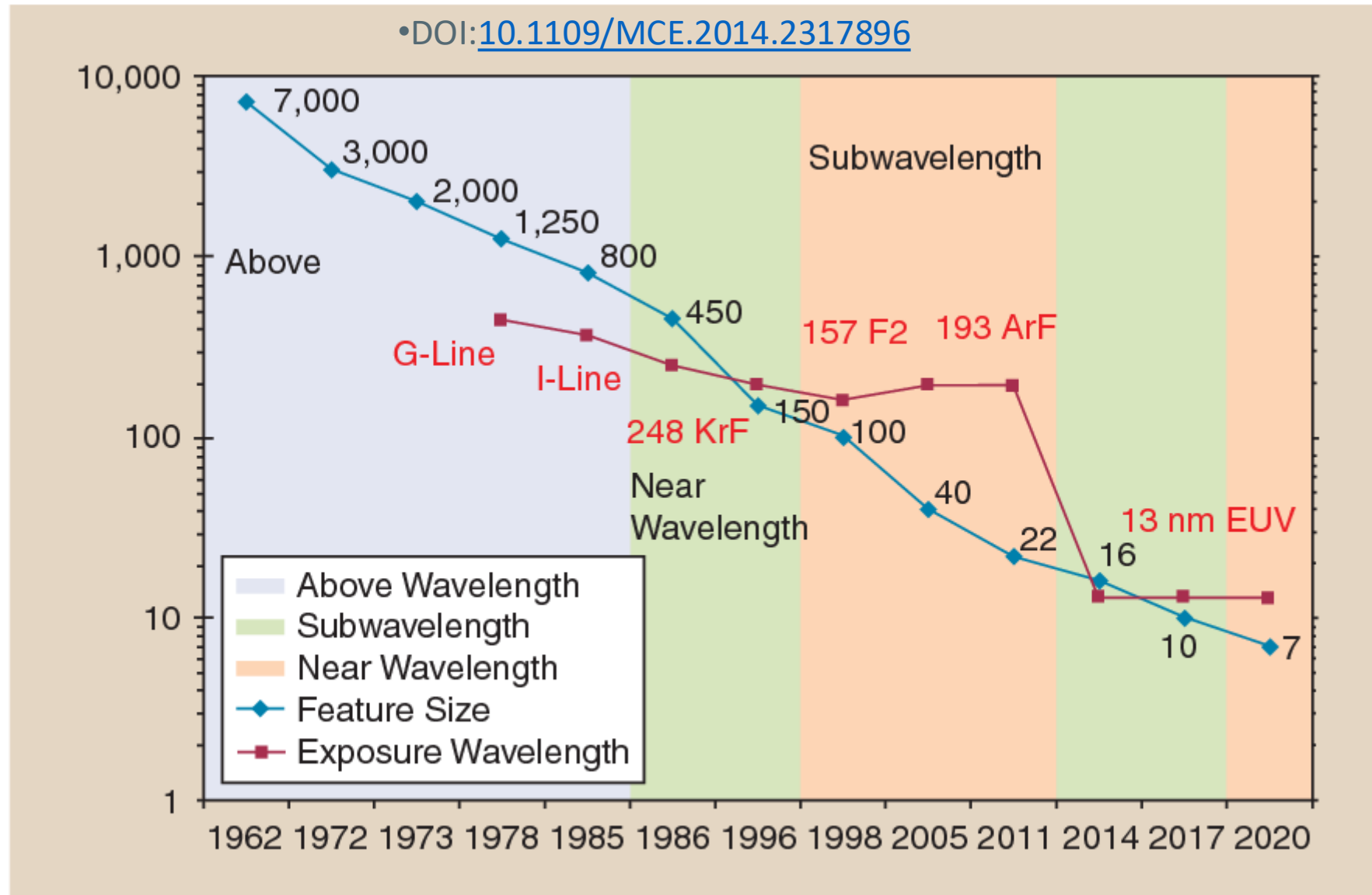


FIGURE 4. Semiconductor lithography trends showing the transistor feature size (in nm)

A large, complex industrial machine, likely an ASML Extreme Ultraviolet (EUV) lithography system, is shown in a dark environment. The machine features several large, curved, metallic components that appear to be mirrors or lenses, reflecting a bright purple light. The overall structure is intricate and industrial, with various pipes, cables, and mechanical parts visible.

State of the art lithography

- **2016**

ASML (Advanced Semiconductor Materials Lithography)

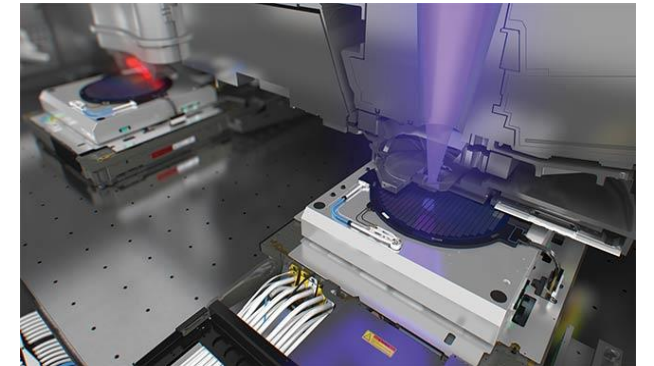
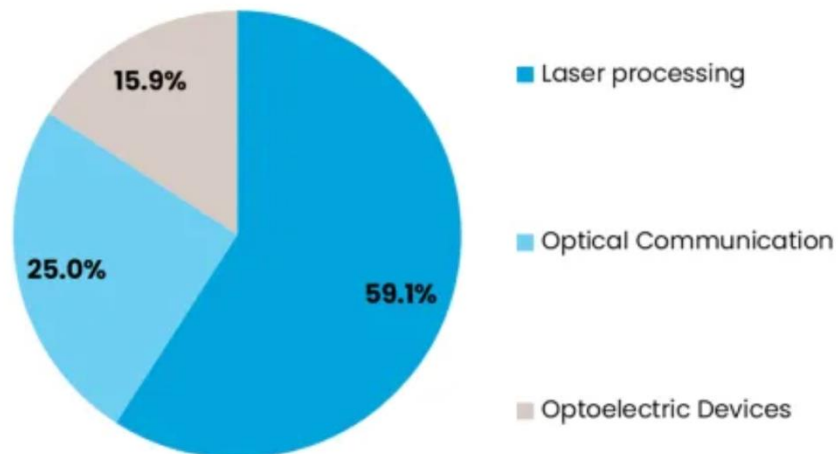
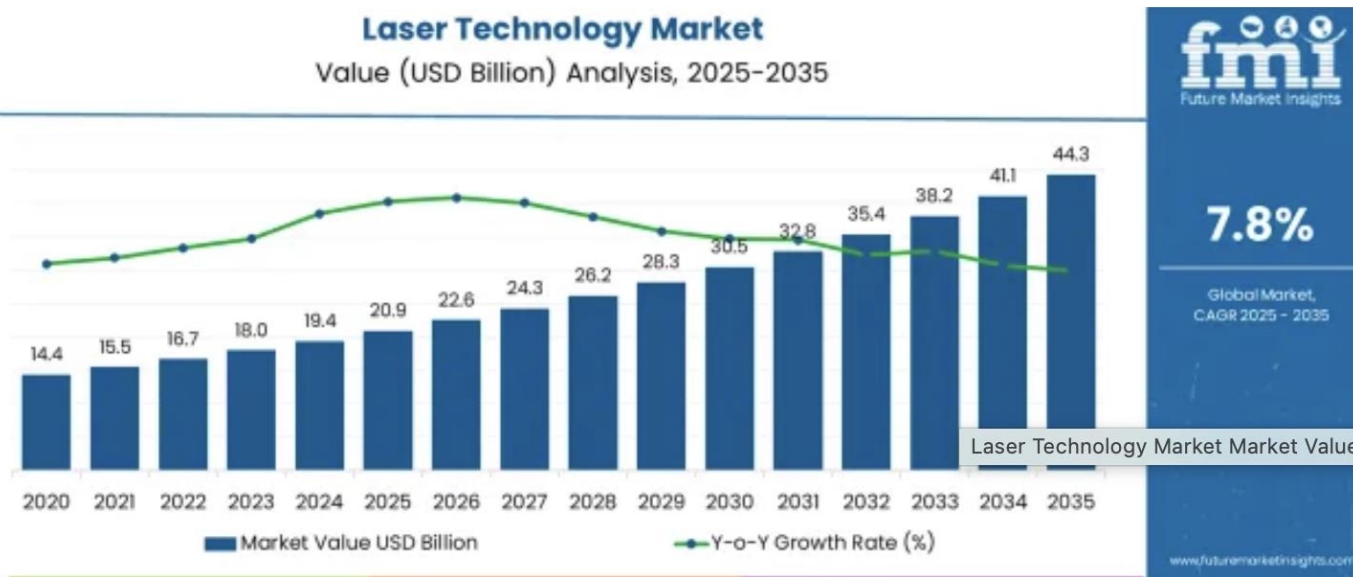
- La tecnología para litografía EUV (Extreme Ultraviolet) está lista de implementar: Desarrollan una fuente brillante en 13.5-nm
- Plasma producido iluminando una gota microscópica de estaño derretido con un laser de CO₂ (IR)

Las tecnologías basadas en láseres hoy



Lasers: de todos los tamaños, cada vez más potentes y más baratos. La tecnología de los láseres se expandió a un sinnúmero de longitudes de onda y materiales usados.

Laser Technology Market
Value (USD Billion) Analysis, 2025-2035



Litografía laser en semiconductores (\$477 billion en 2018, Gartner)

Self-driving car: radar, lidar, y otros sensors para navegación.(Waymo).

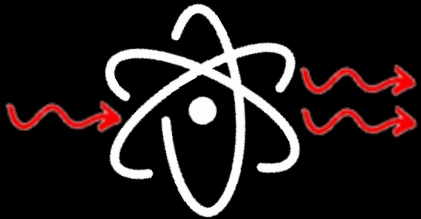




¡Ahora a charlar
con amigos!



Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026



- Propiedades ondulatorias de la luz relevantes para comprender el funcionamiento de los láseres
- Ecuaciones de Maxwell en vacío, propagación de ondas en vacío. Medios isótropos y homogéneos.
- Velocidad de fase y grupo
- Coherencia

La naturaleza ondulatoria de la luz



James Clerk Maxwell [1831-1879] a partir de leyes experimentales (Faraday, Ampere, Gauss, Biot-Savart) derivó un conjunto de ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Maxwell.

Estas leyes predicen la existencia y propiedades de la radiación electromagnética

Permeabilidad magnética del vacío $\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

Permitividad eléctrica del vacío $\epsilon_o = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ (experimental)

Velocidad predicha por las ecs. de Maxwell

$$c = \left(\frac{1}{\epsilon_o \mu_o} \right)^{1/2} = (299\,784\,000 \pm 10000) \text{ m/s}$$

Velocidad medida experimentalmente $c = (299\,792\,457.4 \pm 1.1) \text{ m/s}$

- Rømer, 1676
- Fizeau , 1849
- Foucault, 1850

determinadas a partir de mediciones independientes de electricidad y magnetismo

¡La luz es una onda electromagnética!

Los campos eléctricos $\vec{E}$ y magnéticos $\vec{B}$ ejercen fuerzas sobre cargas y corrientes, según la ley de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$[\vec{E}] = V/m$$

$$[q] = C$$

$$[\vec{B}] = \text{Tesla}$$

El estado electromagnético de los materiales se describe a partir de las siguientes cantidades

		Unidades
ρ	densidad de carga (carga por unidad de volumen)	C/m ³
$\vec{P}$	polarización (momento dipolar eléctrico por unidad de volumen)	C/m ²
$\vec{M}$	magnetización (momento dipolar magnético por unidad de volumen)	A/m
$\vec{J}$	densidad de corriente (corriente por unidad de área)	A/m ²

Ley de Ohm: la respuesta de los electrones en un medio de conductividad σ a un campo eléctrico $\vec{E}$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

1) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

(Ley de Gauss)

2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(Ley de Gauss para $\vec{B}$)

3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(Ley de Faraday)

4) $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$

(Ley de Ampere)

Ecuaciones constitutivas de los medios materiales

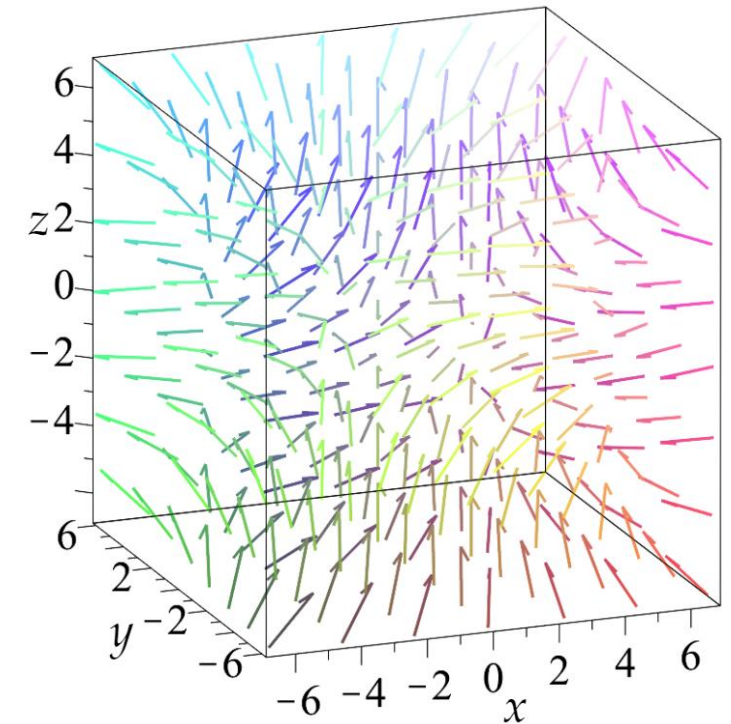
Desplazamiento eléctrico o densidad de flujo de campo eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

Vector de inducción de campo magnético

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \sim \mu_o \vec{H}$$

Campo vectorial: En cada punto el espacio tiene un valor de magnitud y dirección



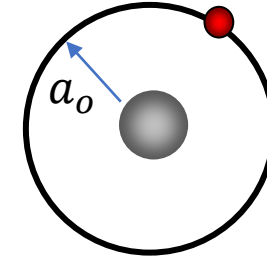
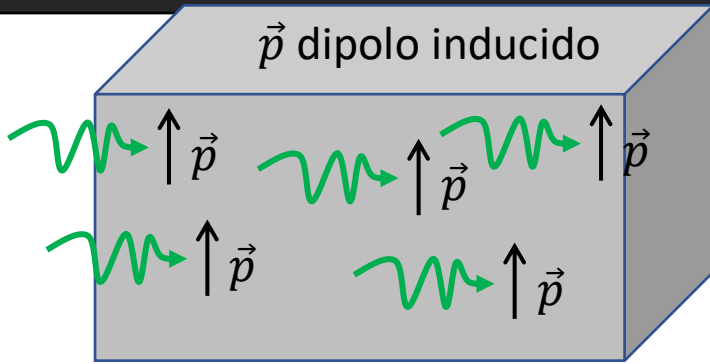
Ecuaciones constitutivas de los medios materiales

Vector de **Desplazamiento eléctrico** $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$

En el espacio libre $\vec{P} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$

En otros casos; tenemos que ver como es la polarización, es decir, como interactúa la luz con los medios materiales

Interacción de la luz con los materiales



$$E_o = \frac{e}{4\pi\epsilon_o a_o^2} \sim 5 \times 10^{11} \text{ V/m}$$

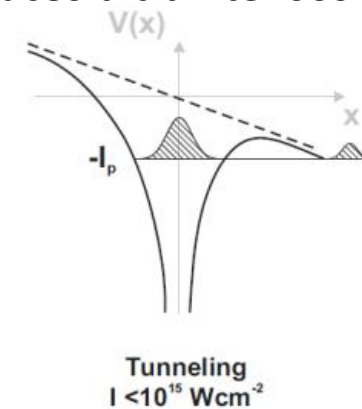
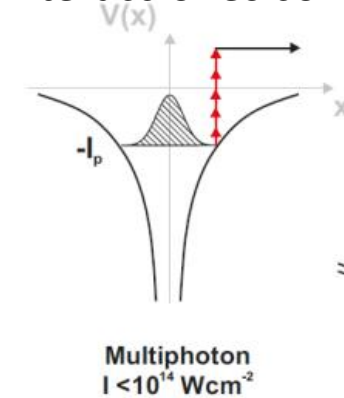
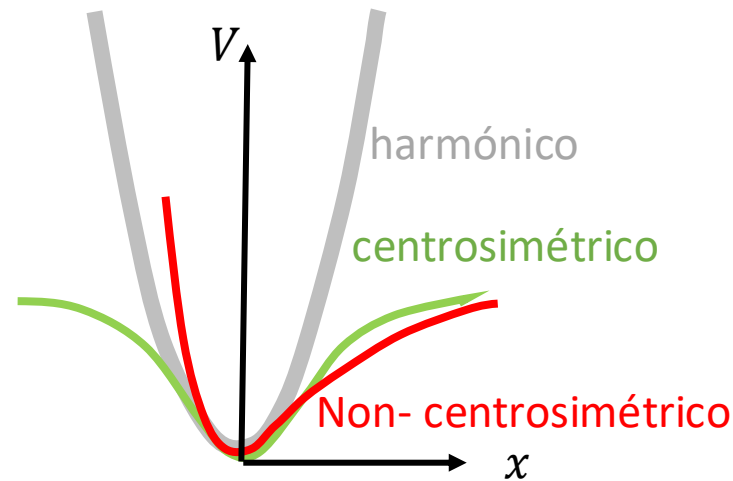
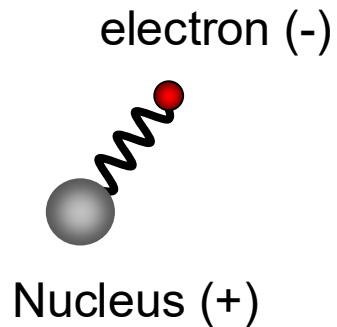
$$I \sim 3 \times 10^{16} \text{ W cm}^{-2}$$

Intensidad

Propiedades ópticas lineales

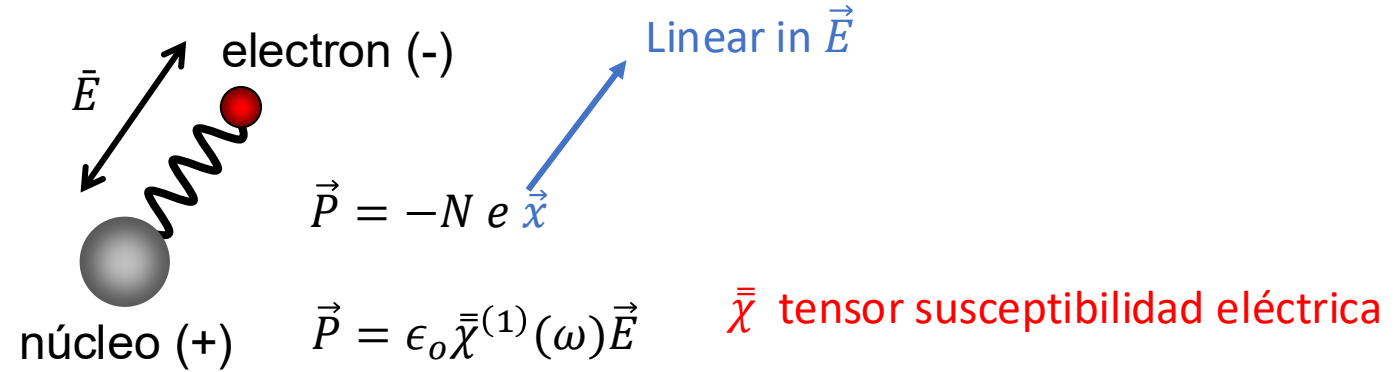
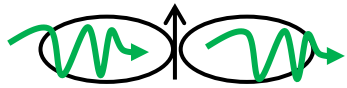
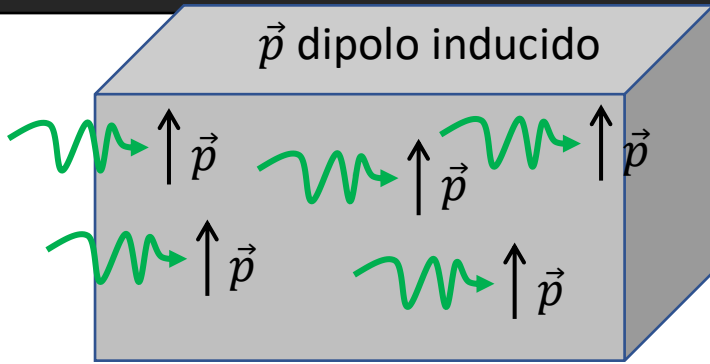
Propiedades ópticas no lineales

Interacciones con haces ultraintensos



$$P_j = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots$$

Propagación de ondas en medios lineales



$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_o \vec{E} + \bar{\chi} \epsilon_o \vec{E} = \epsilon_o (1 + \bar{\chi}) \vec{E} = \bar{\epsilon} \vec{E}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_o (1 + \bar{\chi}) \text{ permitividad eléctrica}$$

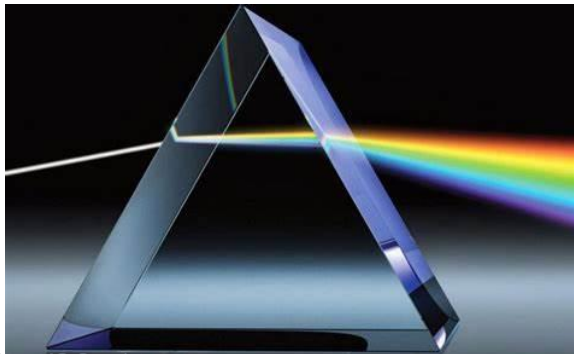
$$n_{ij}(\omega) = \sqrt{\epsilon_{ij}(\omega)} = \sqrt{1 + \chi_{ij}^{(1)}(\omega)}$$

Medios lineales NO isótropos: (materiales birrefringentes)

Medios lineales isótropos:

Medios homogéneos: $\bar{\chi}$ no depende de las coordenadas

Ejemplos de medios lineales isótropos y homogéneos: SiO₂



Ecuaciones constitutivas de los medios materiales

Vector de inducción de campo magnético

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M})$$

En el espacio libre $\vec{M} = 0$ $\rightarrow \vec{B} = \mu_o \vec{H}$

En medio lineal e isótropo $\vec{M} = \chi \vec{H}$ $\rightarrow \vec{B} = \mu_o (1 + \chi) \vec{H} = \mu \vec{H}$

1) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (Ley de Gauss)

2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (Ley de Gauss)

3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Ley de Faraday)

4) $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$ (Ley de Ampere)

Ecuaciones constitutivas de los medios materiales

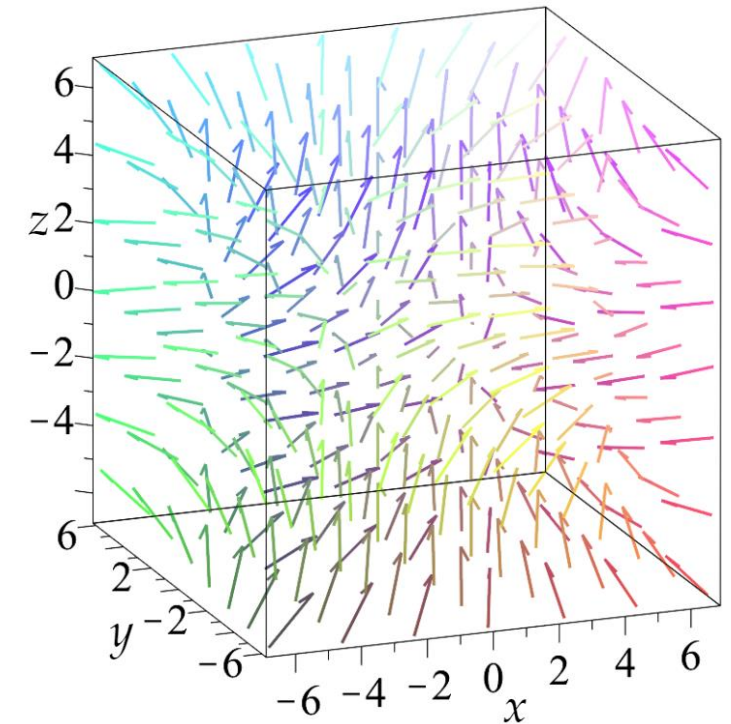
Desplazamiento eléctrico o densidad de flujo de campo eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

Vector de inducción de campo magnético

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M})$$

Campo vectorial: En cada punto el espacio tiene un valor de magnitud y dirección



Gradiente, Divergencia, Rotor, Laplaciano....



$\phi = \phi(x, y, z)$ función de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ Campo vectorial: En cada punto el espacio tiene un valor de magnitud y dirección

Gradiente

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Apunta en la dirección de mayor crecimiento, tasa de variación

Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

Existencia de fuentes o sumideros del campo en un pto del espacio

Rotor

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

mide si el campo vectorial circula en un punto del espacio

Laplaciano

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Densidad de flujo del gradiente de una función
Relacionado con la curvatura de esa función

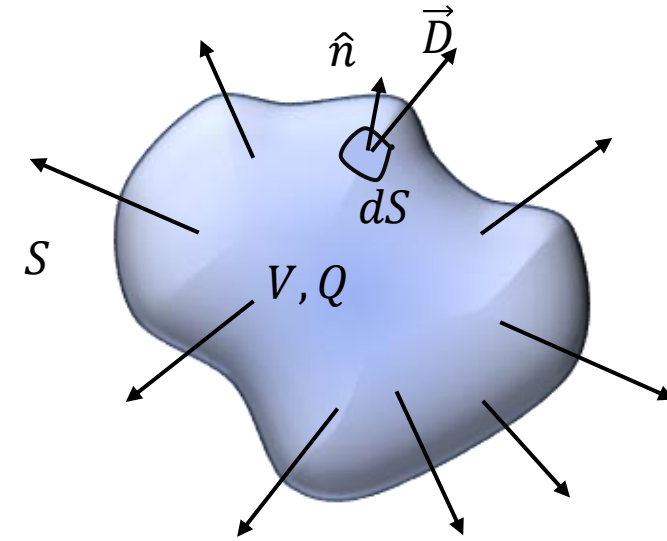
Interpretación de las ecuaciones de Maxwell



Ley de Gauss para la densidad de flujo de campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

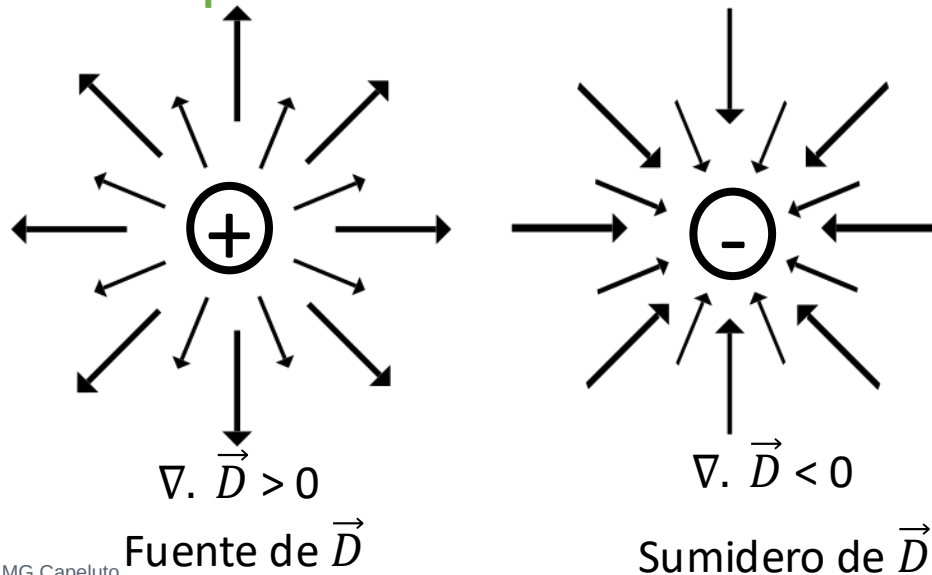
$$\phi = \oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_T = \int_V \rho dV$$



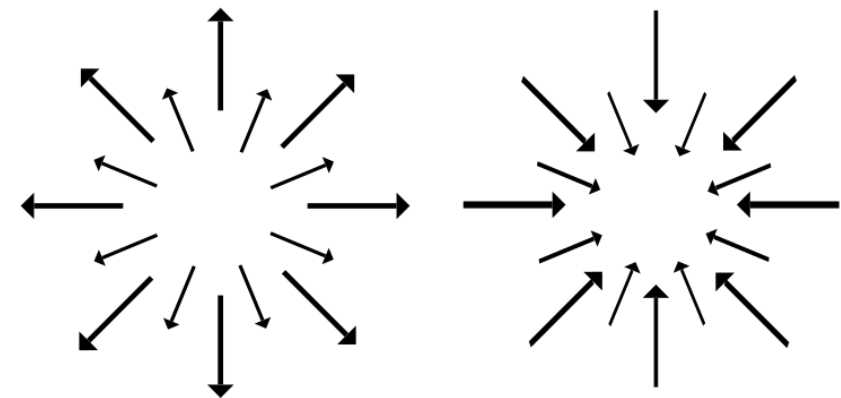
El flujo campo eléctrico TOTAL que atraviesa una superficie cerrada es proporcional a la carga total Q_T contenido en el volumen encerrado por esa superficie.

$\vec{D} \cdot \hat{n}$ solo importa la componente paralela a $\hat{n}$ (la que entra o sale de la superficie)
 $\oint dS \rightarrow$ sumo todas las contribuciones

Situaciones posibles



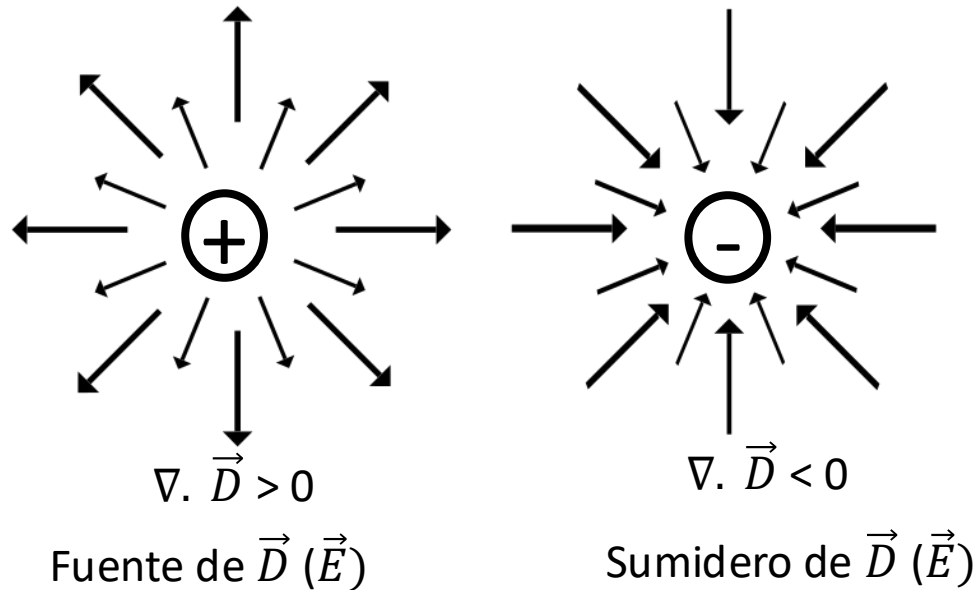
Situaciones no posibles



Interpretación de las ecuaciones de Maxwell



Dado que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ vale también para $\vec{E}$



Fuerza entre dos cargas puntuales

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

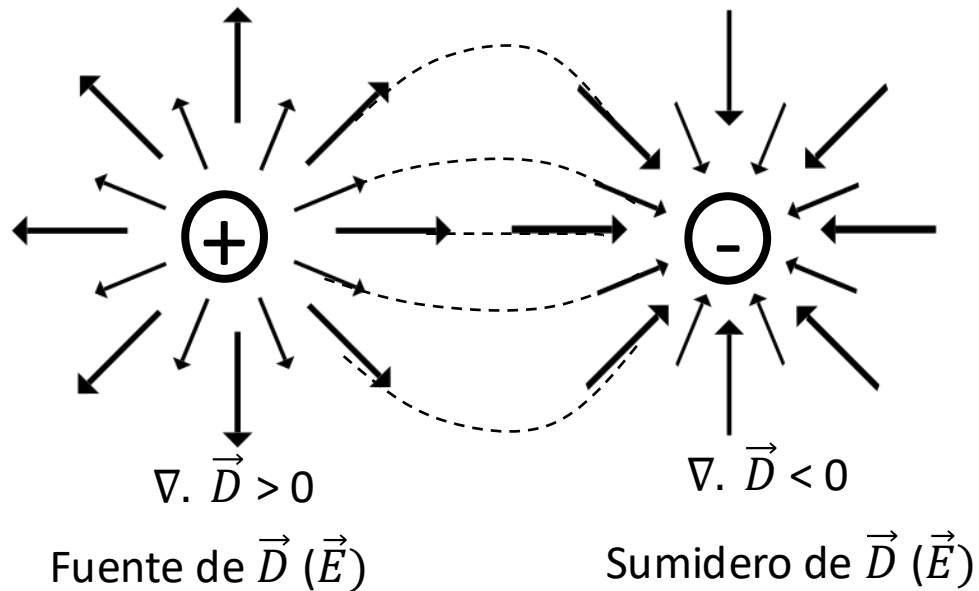
$$|\mathbf{D}| = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Cargas opuestas se atraen, cargas iguales se repelen
 $\vec{D}$ ($\vec{E}$) nacen en cargas + y terminan en las -

Interpretación de las ecuaciones de Maxwell



Dado que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ vale también para $\vec{E}$



Fuerza entre dos cargas puntuales

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$|\mathbf{D}| = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Cargas opuestas se atraen, cargas iguales se repelen
 $\vec{D}$ ($\vec{E}$) nacen en cargas + y terminan en las -

Interpretación de las ecuaciones de Maxwell

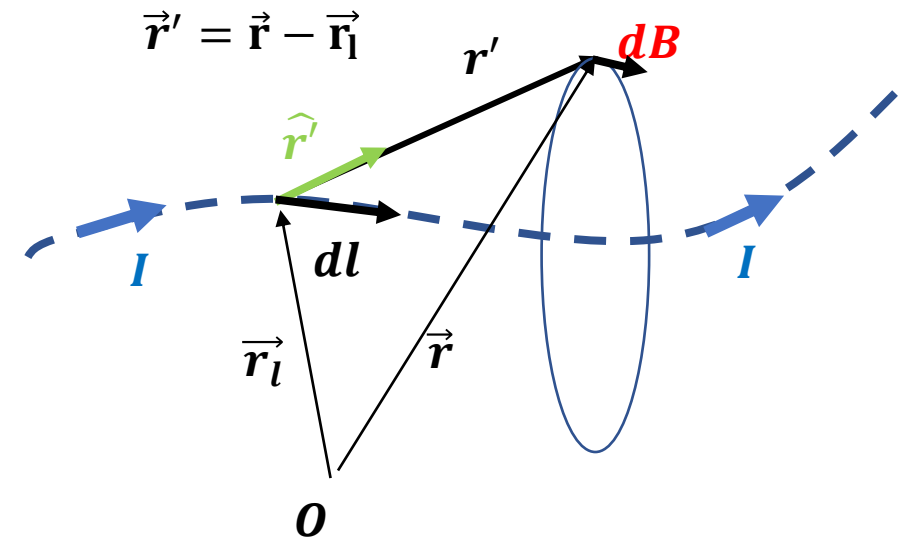


$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ No existen monopolos magnéticos

Ley de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}'}{r'^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(V) \times \frac{\hat{r}'}{r'^2} dV \longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$



dl = elemento diferencial de longitud

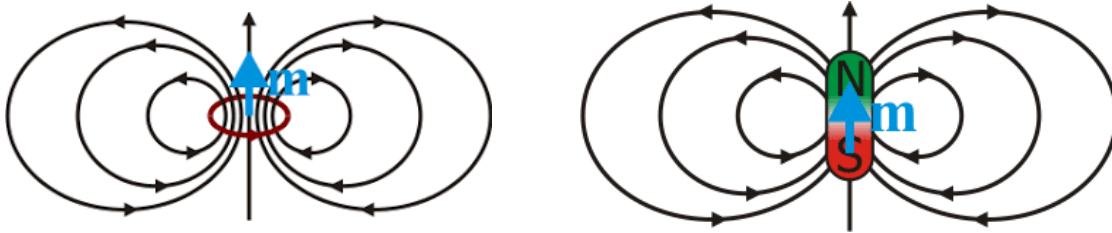
Las líneas de $\vec{B}$ forman siempre lazos cerrados.

Interpretación de las ecuaciones de Maxwell

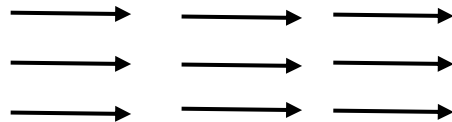
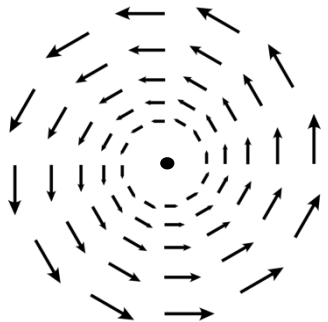


$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ No existen monopolos magnéticos

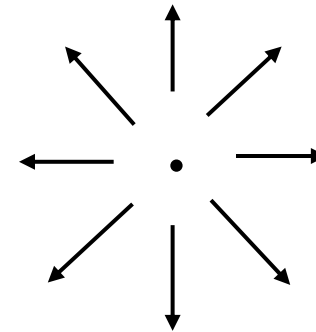
Dipolo magnético



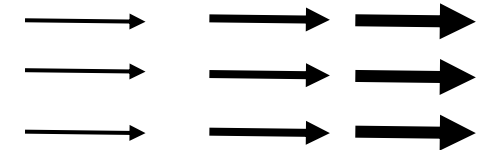
Es posible $\nabla \cdot \vec{B} = 0$



No es posible



$\nabla \cdot \vec{B} > 0$



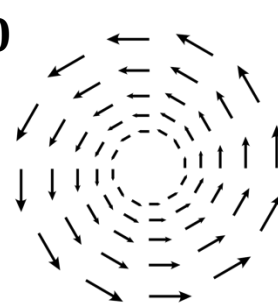
$\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$

Interpretación de las ecuaciones de Maxwell

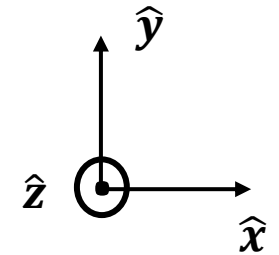
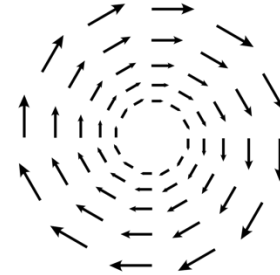


$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

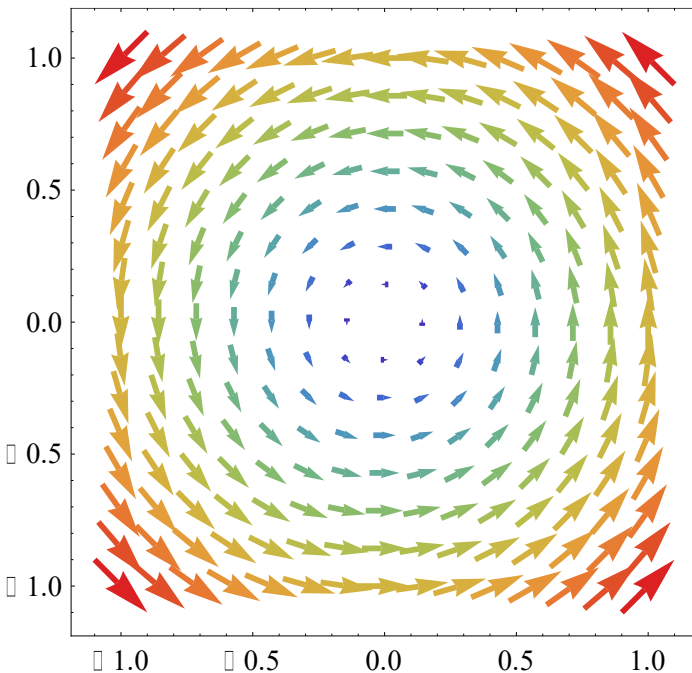
$$\nabla \times \vec{E} > 0$$



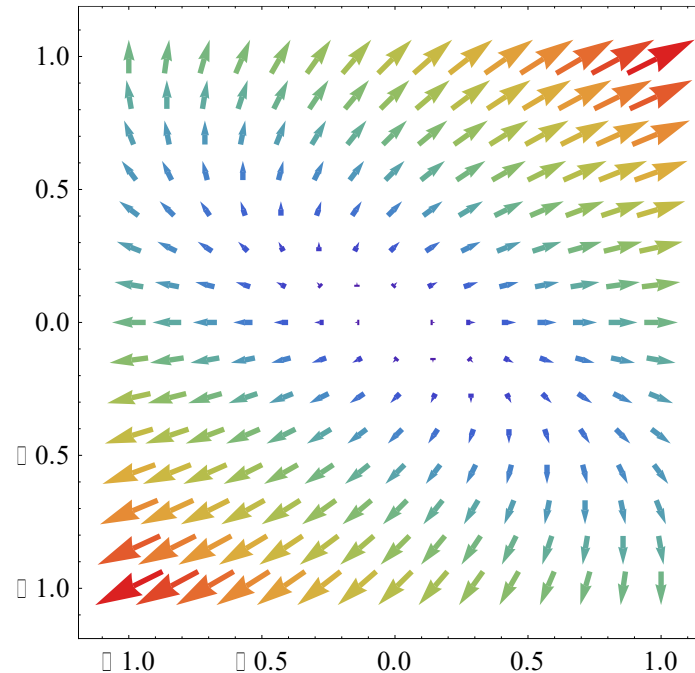
$$\nabla \times \vec{E} < 0$$



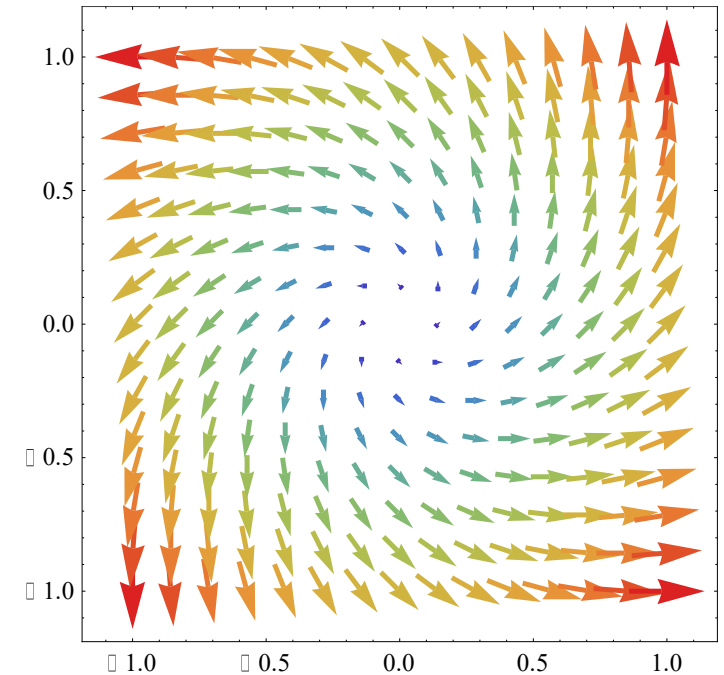
Campos vectoriales con rotor distinto de cero



$$\nabla \times \vec{F} = 2\hat{z}$$



$$\nabla \times \vec{F} = -\hat{z}$$



$$\nabla \times \vec{F} = 2\hat{z}$$

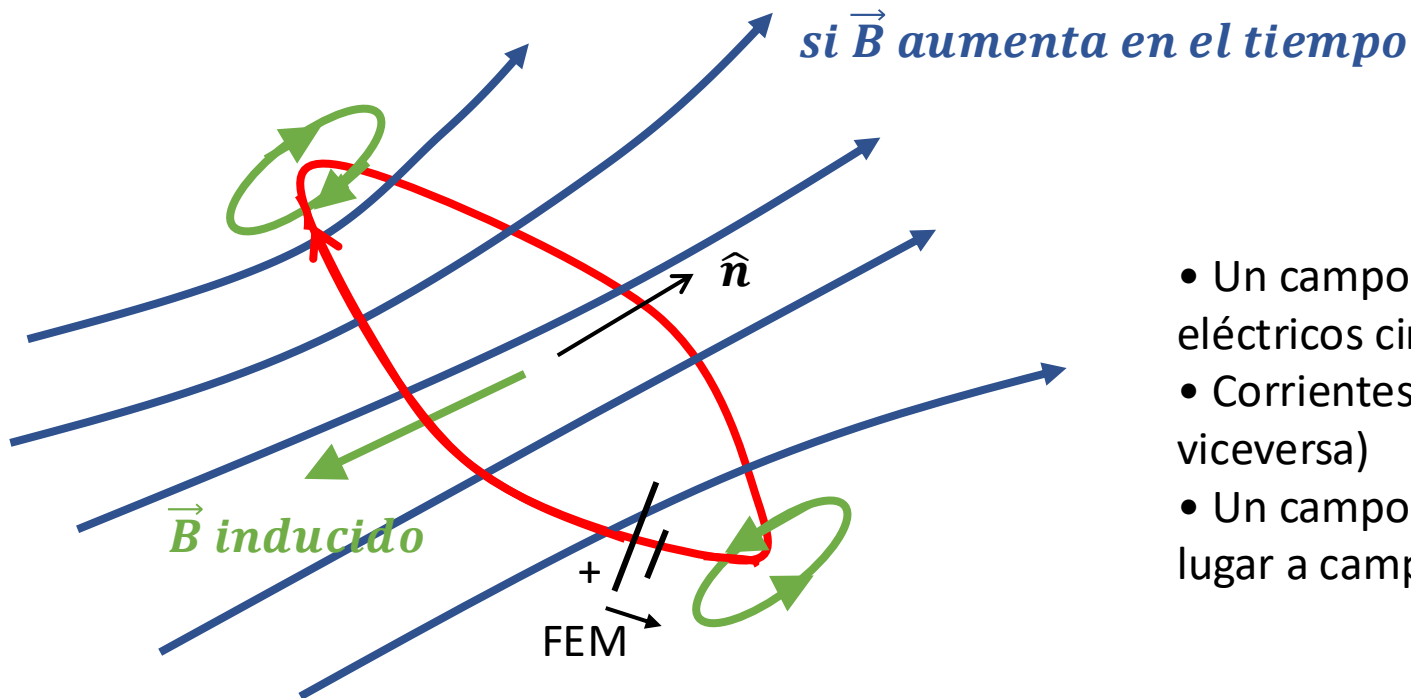
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Ley de Faraday-Lenz

La Fuerza electromotriz total en un circuito cerrado (la integral del campo eléctrico en una curva cerrada) es proporcional a la variación de flujo magnético que atraviesa la superficie S encerrada por circuito

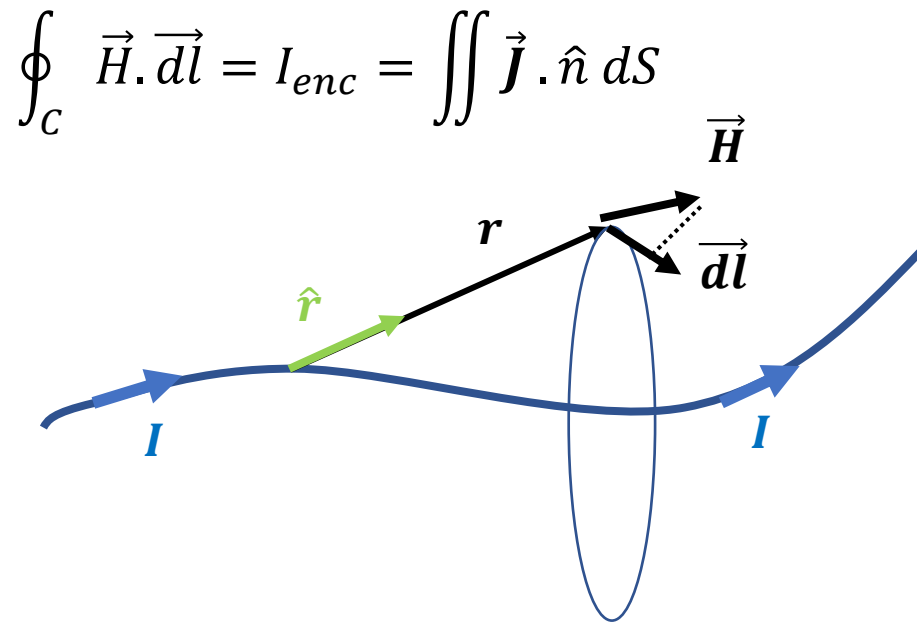


- Un campo magnético variable en el tiempo generan campos eléctricos circulantes
- Corrientes eléctricas dan a lugar a campos magnéticos (y viceversa)
- Un campo eléctrico variable en el espacio (y circulante) da a lugar a campos magnéticos variables en el tiempo (y viceversa)

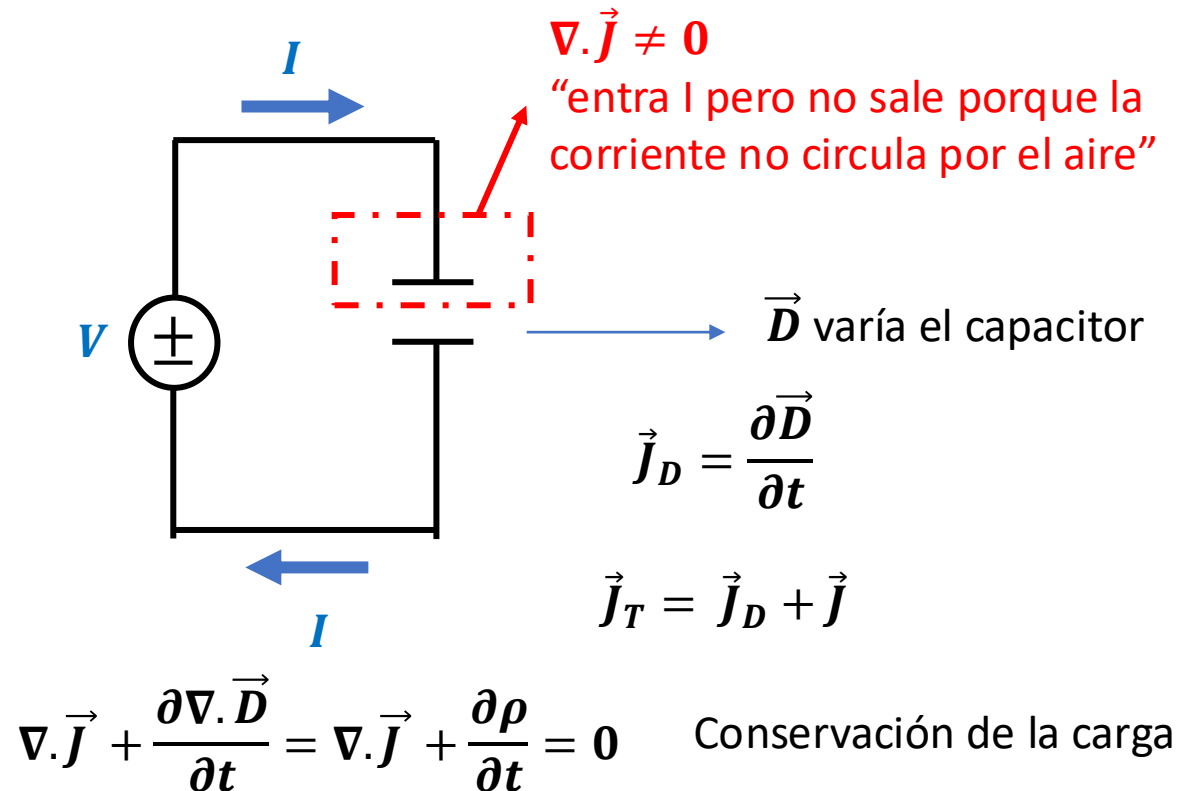
Ley de Ampere

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

- El flujo de corriente eléctrica ($\vec{J}$) o la corriente de desplazamiento ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) dan a lugar a campos magnéticos que encierran a dichas corrientes
- Hay dos maneras de generar campos magnéticos circulantes (Corrientes y campos eléctricos variables)



$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0$$



Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{M}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{M}$$

Ecuaciones de Maxwell en medio LIH

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4)$$



$$\vec{J} = 0$$
$$\rho = 0$$

Medio lineal
isótropo y
homogéneo

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Nota: es fácil pasar al vacío, usando que $\vec{P} = 0$ y $\vec{M} = 0$ y por lo tanto $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$

Ecuaciones de Maxwell en vacío

$$(3) \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(4) \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$\nabla \times$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Propiedad

$= 0$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{H} = 0$$



$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

Ecuaciones de Maxwell en vacío

$$(3) \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(4) \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$\nabla \times$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Propiedad

$= 0$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{H} &= \vec{H}(x, y, z, t) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En vacío

$$\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_o = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$c = \left(\frac{1}{\epsilon_o \mu_o} \right)^{1/2} = 299792458 \text{ m/s} \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

determinadas a partir de mediciones independientes de electricidad y magnetismo

En medio material LIH

$$v = \left(\frac{1}{\mu\epsilon} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\mu_r \mu_o \epsilon_r \epsilon_o} \right)^{1/2} = c \left(\frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \right)^{1/2} = \frac{c}{n(\omega)}$$

Índice de refracción

$$n = (\mu_r \epsilon_r)^{1/2}$$

$n = n(\omega) \rightarrow$ dispersión cromática

NOTA

Lo que sigue es la solución detallada hasta el final de este documento, no va a ser explicado en clase. Tener en cuenta para las consultas

Probar que cualquier función que dependa de z y t como $f(z \pm vt)$ es solución de Ecuación de ondas escalar

$$\frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial t^2}$$



Solución general de la ecuación de ondas – la luz es un campo electromagnético

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Ecuación de ondas vectorial

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t) \hat{x} + A_y(x, y, z, t) \hat{y} + A_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas de radiación em



Solución general de la ecuación de ondas – la luz es un campo electromagnético

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Ecuación de ondas vectorial

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t) \hat{x} + A_y(x, y, z, t) \hat{y} + A_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

Si el campo se propaga solo en $z \rightarrow \vec{A} = \vec{A}(z, t)$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial t^2}$$

Ecuación de ondas escalar

$$\nabla \cdot \vec{A} = \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial y}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

Ecuación de ondas escalar

$$\frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial t^2}$$

Proponemos que la solución $\Phi(z, t) = \Phi_z(z)\Phi_t(t)$

$$\Phi_t(t) \frac{\partial^2 \Phi_z(z)}{\partial z^2} = \frac{\Phi_z(z)}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi_t(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{v^2}{\Phi_z(z)} \frac{\partial^2 \Phi_z(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi_t(t)}{\partial t^2} \frac{1}{\Phi_t(t)} = \omega^2$$

Ambos términos deben ser iguales a una misma constante por depender de variables independientes

$$\frac{\partial^2 \Phi_z(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \Phi_z(z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_t(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \Phi_t(t) = 0$$

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \text{ relación de dispersión}$$

Función que derivada dos veces me da proporcional a la misma función (senos cosenos exponenciales)

$$\Phi_z(z) = C_1 e^{i k_z z} + C_2 e^{-i k_z z}$$

$$\Phi_t(t) = D_1 e^{i \omega t} + D_2 e^{-i \omega t}$$

$$\Phi(z, t) = (C_1 e^{i k_z z} + C_2 e^{-i k_z z})(D_1 e^{i \omega t} + D_2 e^{-i \omega t})$$

C_1, C_2, D_1, D_2 condiciones iniciales y de contorno

Ver que la dependencia en las variables es solo en $k_z z \pm \omega t$

$$\Phi(z, t) = (A_1 e^{i k_z z + i \omega t} + A_2 e^{i k_z z - i \omega t} + A_3 e^{-(i k_z z + i \omega t)} + A_4 e^{-(i k_z z - i \omega t)})$$

Es más...!

Probar que cualquier función que dependa de z y t como $f(z \pm vt)$ es solución de Ecuación de ondas escalar

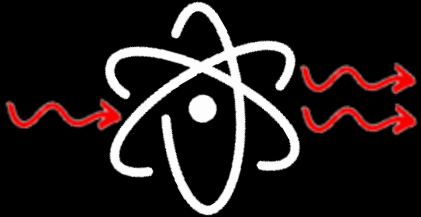
$$\frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial t^2}$$



$$\oint_{\text{Circuit}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad [\text{Stokes' Theorem}]$$

$$\iint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV \quad (\text{Teorema de Gauss})$$

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

Soluciones generales

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{H}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{H}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{E}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$\vec{k}$ dirección de propagación o vector de onda, $|\vec{k}| = k$ número de ondas

$\omega = v k$ Relación de dispersión $v = \frac{c}{\eta}$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{H}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{H}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

Revisando las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho = 0$$

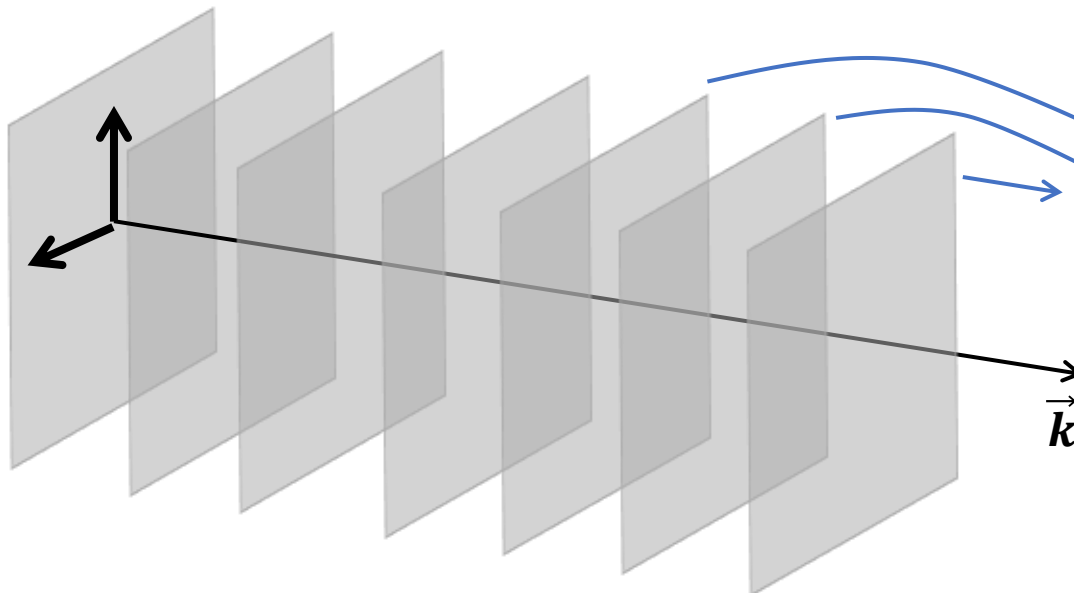
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



$$\begin{aligned} -i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ -i\vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Las ondas em son transversales:

Los campos em varían en un plano perpendicular a $\vec{k}$



$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ \Phi(\vec{r}, t) &= cte \end{aligned}$$

Ondas planas

En planos de fase constante, los campos son constantes

La extensión de los planos es infinita

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{H}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{H}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{R}e \left\{ \vec{E}_o e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$$

Revisando las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

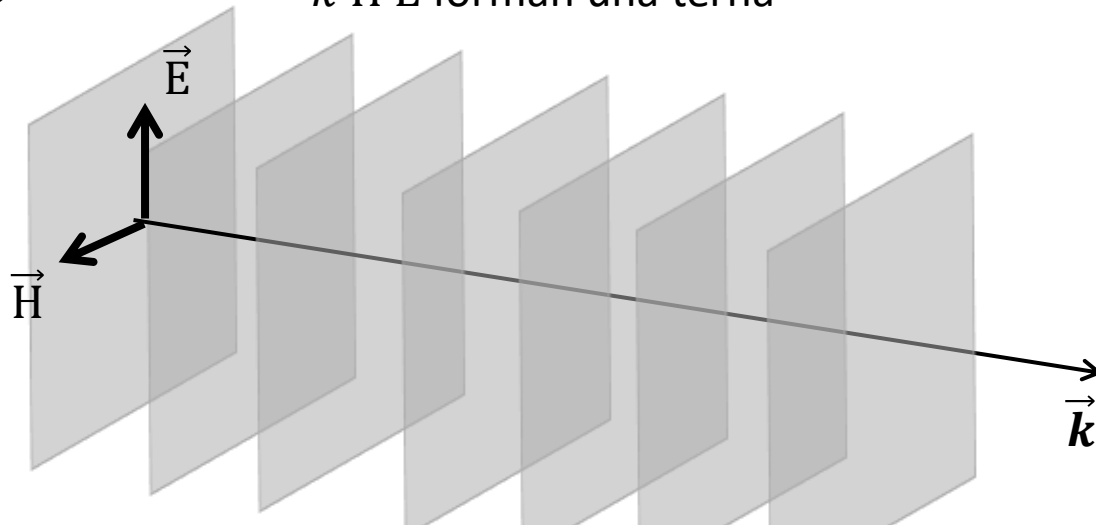


$$\vec{k} \times \vec{H} = -\epsilon\omega \vec{E}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega \vec{H}$$

$$\mu |\vec{H}| = \frac{|\vec{k}| |\vec{E}|}{\omega}$$

$\vec{k}$ $\vec{H}$ $\vec{E}$ forman una terna



$$1) |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{v}$$

En vacío

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$$2) \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{\omega \mu_o}{|\vec{k}|} = c\mu_o = 377 \Omega$$

Las ondas de radiación em



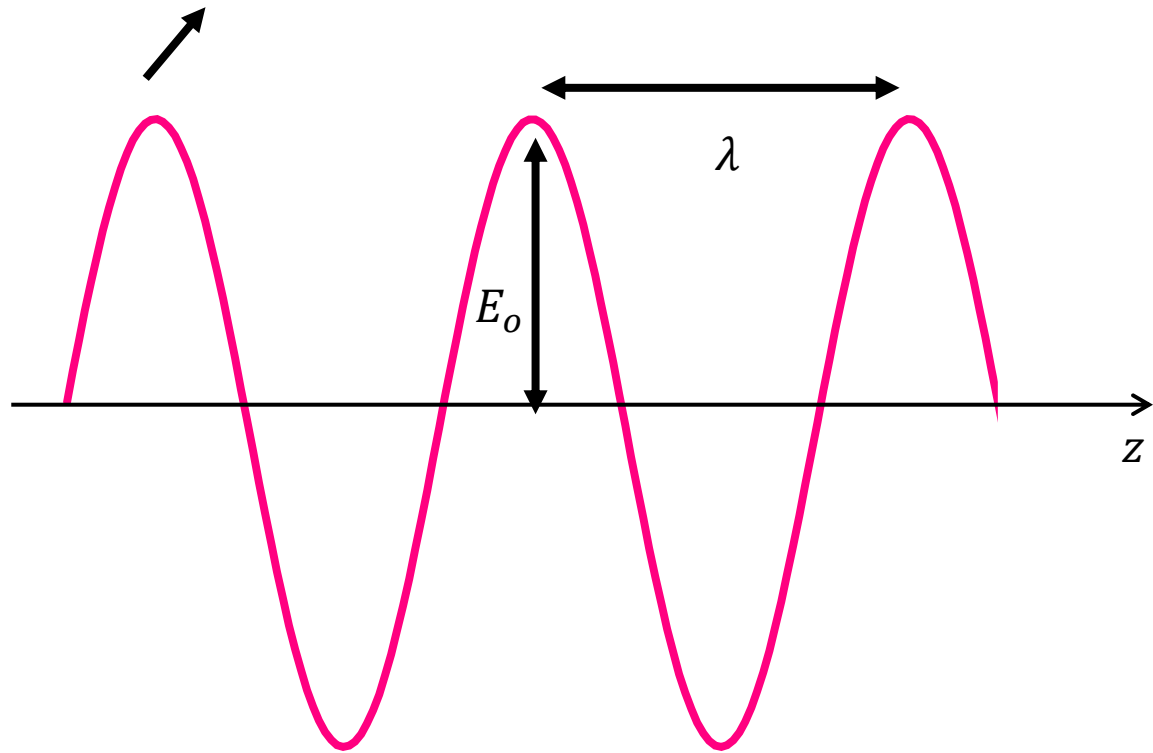
Campo eléctrico en $\hat{x}$ que se propaga en $\hat{z}$: $\vec{E}(z, t) = (E_o \hat{x}) e^{-i(k_z z - \omega t)}$ (Linealmente polarizado)

Las ondas de radiación em



Campo eléctrico en $\hat{x}$ que se propaga en $\hat{z}$: $\vec{E}(z, t) = (E_o \hat{x}) e^{-i(k_z z - \omega t)}$

$$t = t_o \quad \vec{E}(z, t) = E_o e^{-i(k_z z - \omega t_o)} \hat{x}$$



Análogamente....

$$\omega = v k_z$$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda}$$

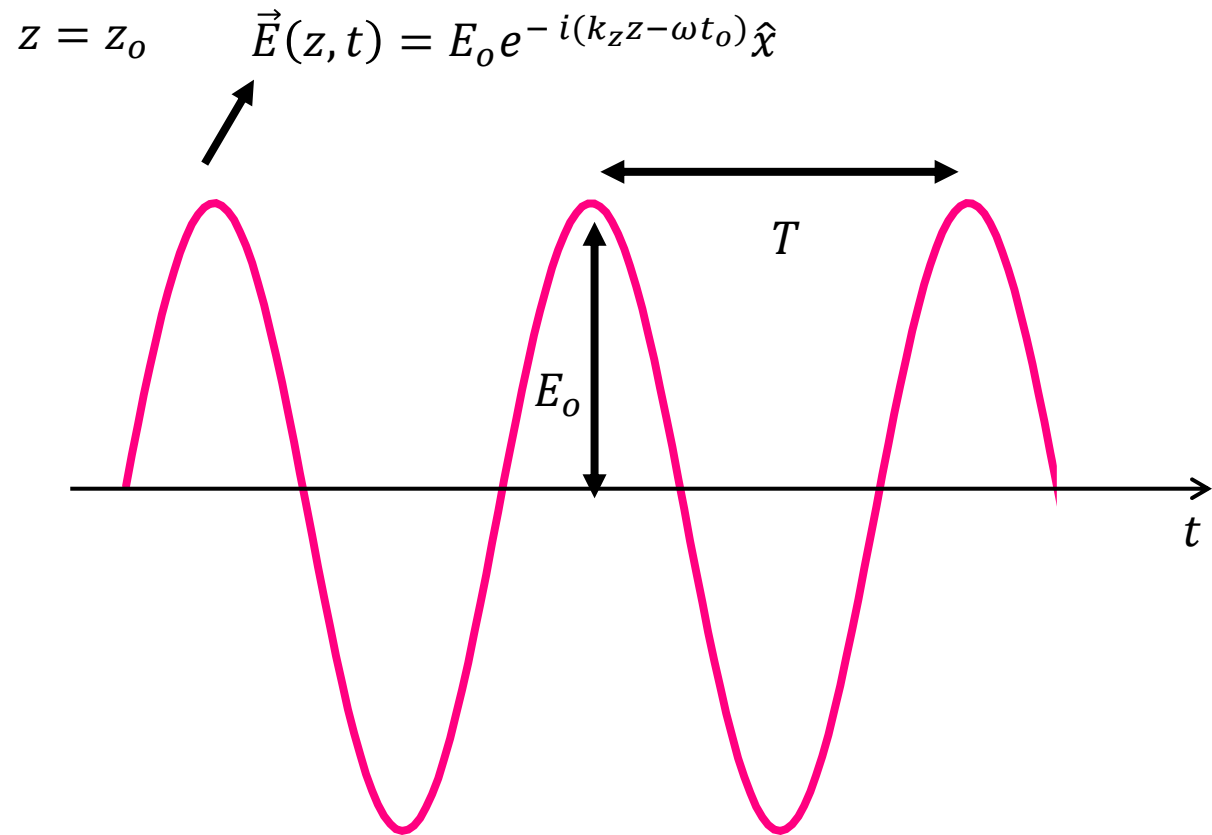
Número de ondas
(número de ondas por
unidad de longitud)

Longitud de onda
(distancia en la que
un punto de la onda
realiza un ciclo
complete
o
La distancia en que la
onda se repite en una
foto a tiempo fijo)

Las ondas de radiación em



Campo eléctrico en $\hat{x}$ que se propaga en $\hat{z}$: $\vec{E}(z, t) = (E_o \hat{x}) e^{-i(k_z z - \omega t)}$



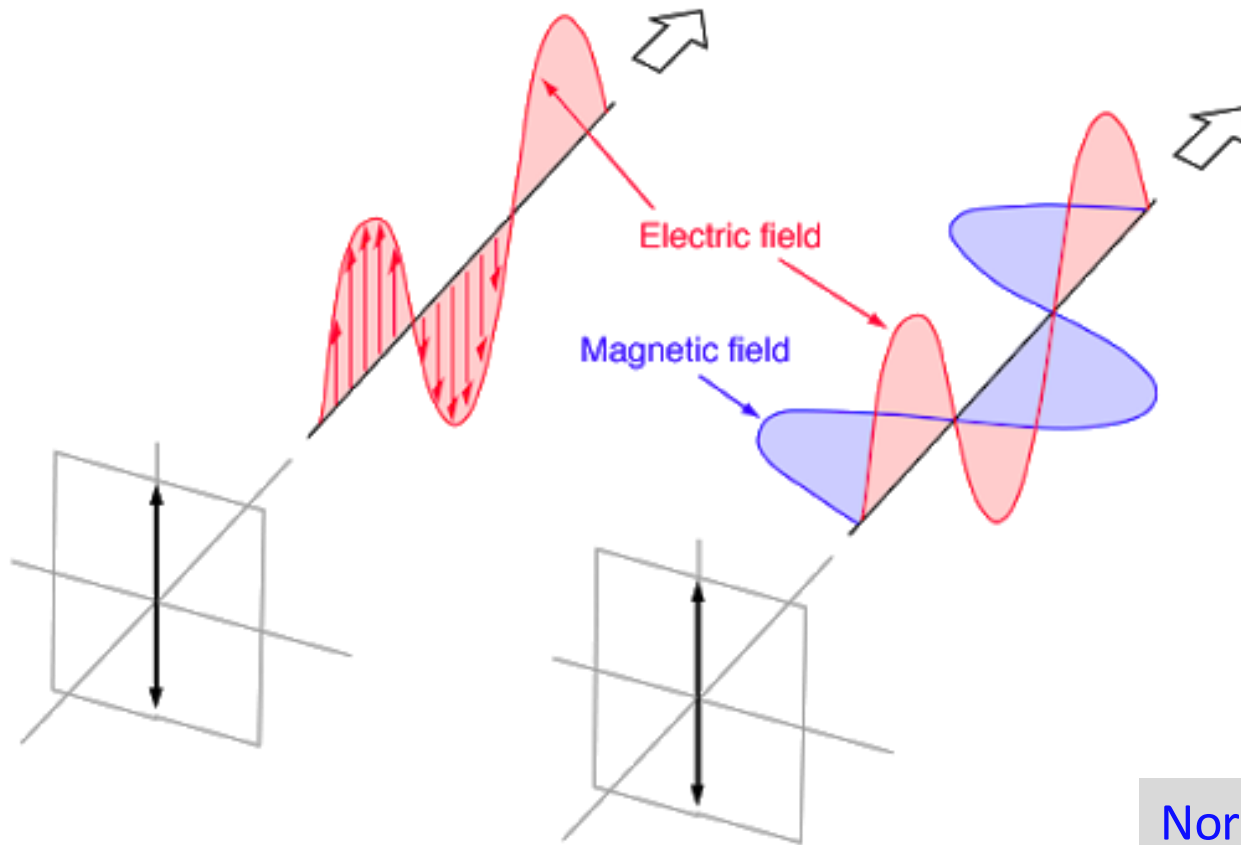
$$\omega = v k_z$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

frecuencia
(número de ondas por
unidad de tiempo)

Período
(tiempo en que la
onda realiza un ciclo
completo
o tiempo en que la
onda se repite en
posición fija del
espacio)

$$\vec{E}(z, t) = (E_0 \hat{x}) e^{-i(k_z z - \omega t_0)}$$



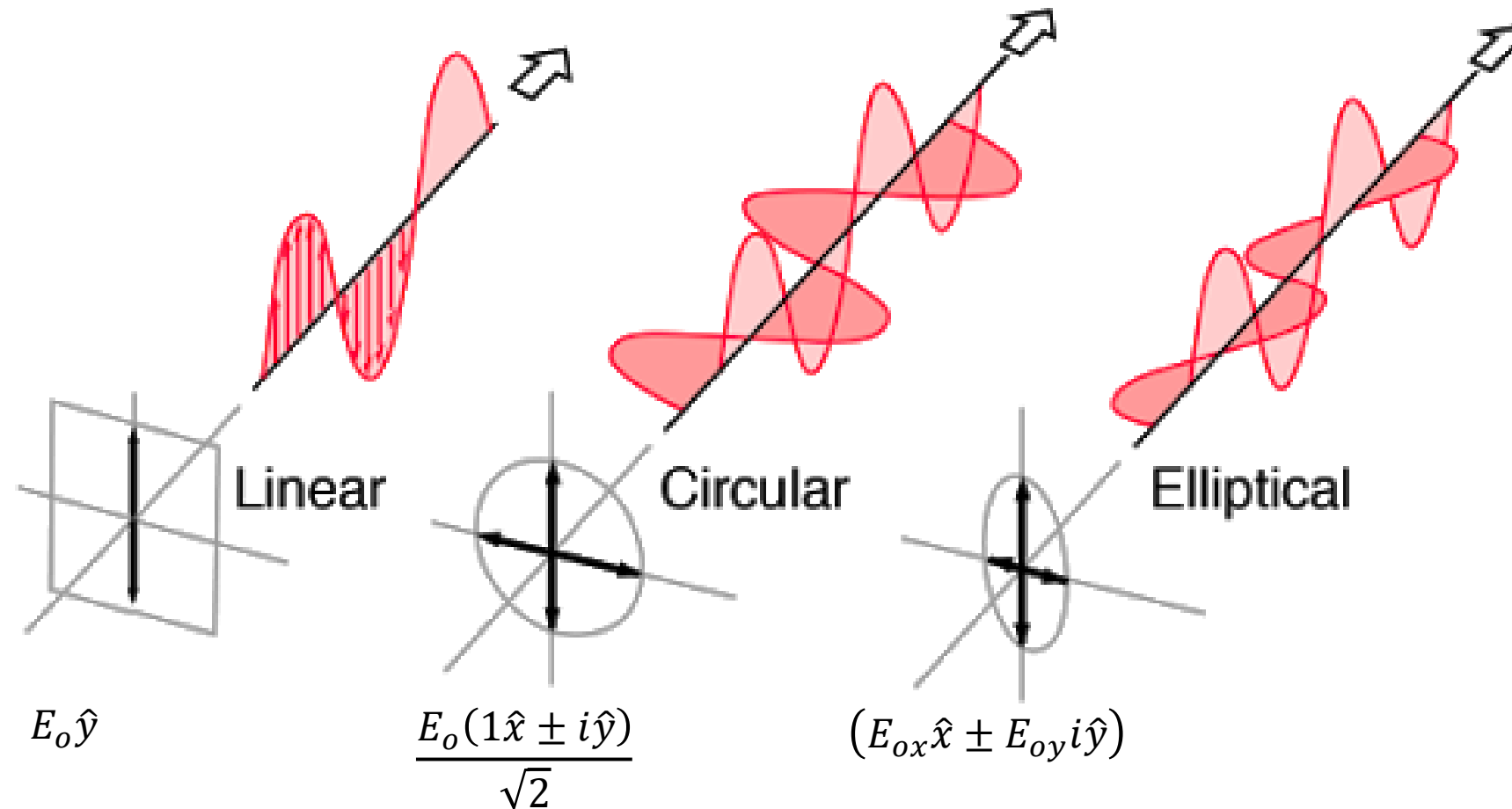
$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H}$$

El campo magnético y el eléctrico están en fase, y son perpendiculares

Normalmente los láseres están polarizados linealmente

Polarización lineal: El campo eléctrico describe una línea en el plano perpendicular a $\vec{k}$

Otros tipos de polarizaciones

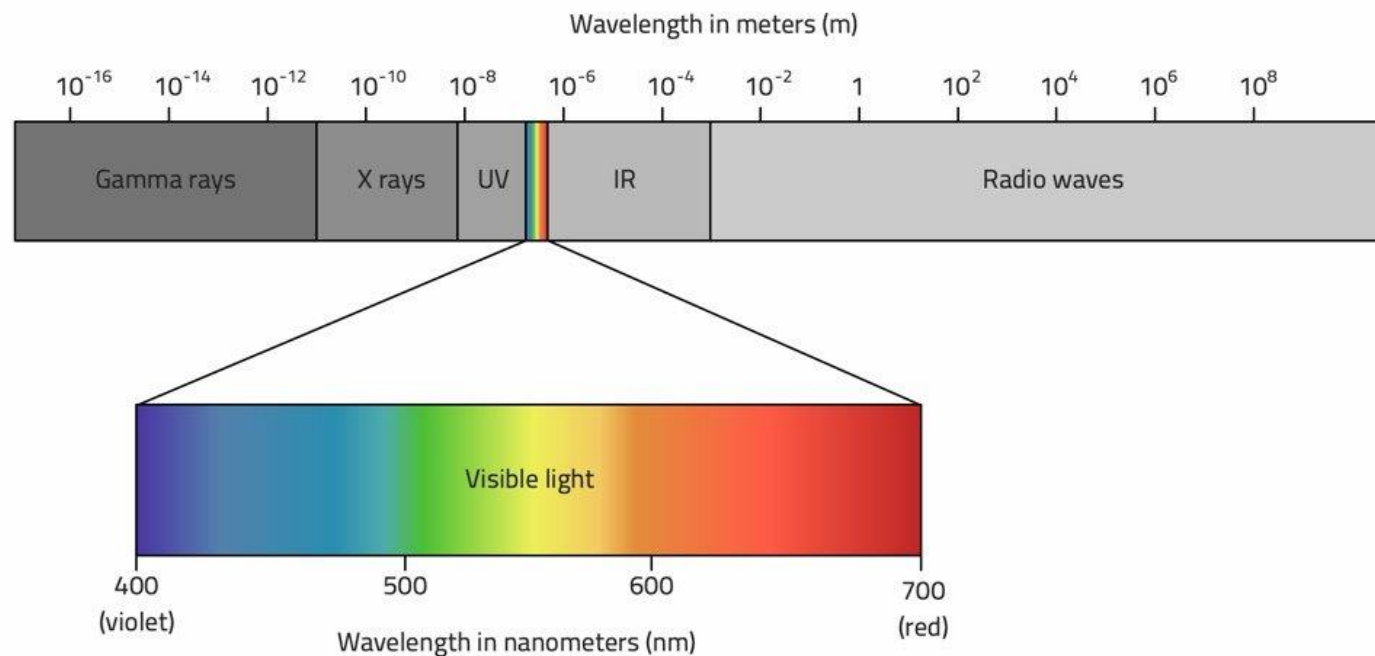


Ejemplo: ondas en vacío



$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-i(k_z z - \omega t)} \hat{x}$$

$$v = c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$



$$\lambda_{vis} = 532 \text{ nm}$$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{532 \times 10^{-9} \text{ m}} = 1.18 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = c k_z = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1.18 \times 10^7 \text{ m}^{-1} = 3.5 \times 10^{15} \text{ rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 564 \times 10^{12} \text{ Hz} = 564 \text{ THz}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 1.77 \times 10^{-15} \text{ s} = 1.77 \text{ fs}$$

$$E(\text{eV}) = \frac{1240}{\lambda(\text{nm})} = 2.3 \text{ eV}$$

Completar y comparar órdenes de magnitud

λ	Vis	IR	X-ray	UV
k				
ω				
ν				
T				
$E(\text{eV})$				



¿En cuánto se parece un láser a una onda plana?



Onda plana:

- Perfectamente monocromática
- Extendida infinitamente

Laser:



¿En cuánto se parece un láser a una onda plana?



Onda plana:

- Perfectamente monocromática
- Extendida infinitamente



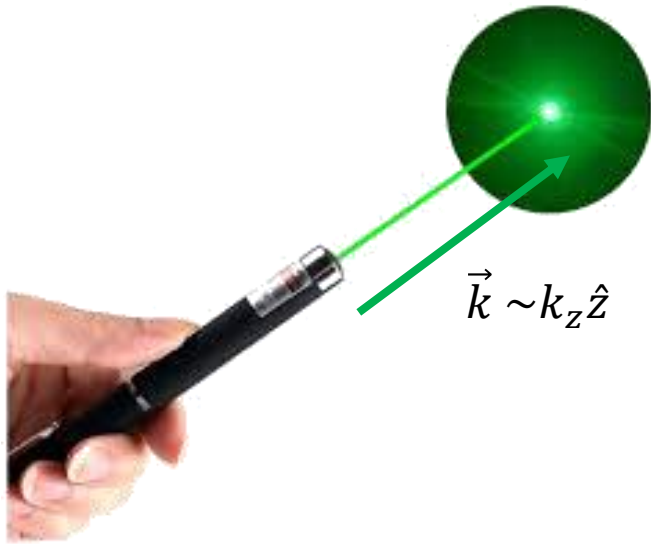
Idealización matemática
(muy útil pero no existe en la realidad)

Laser:



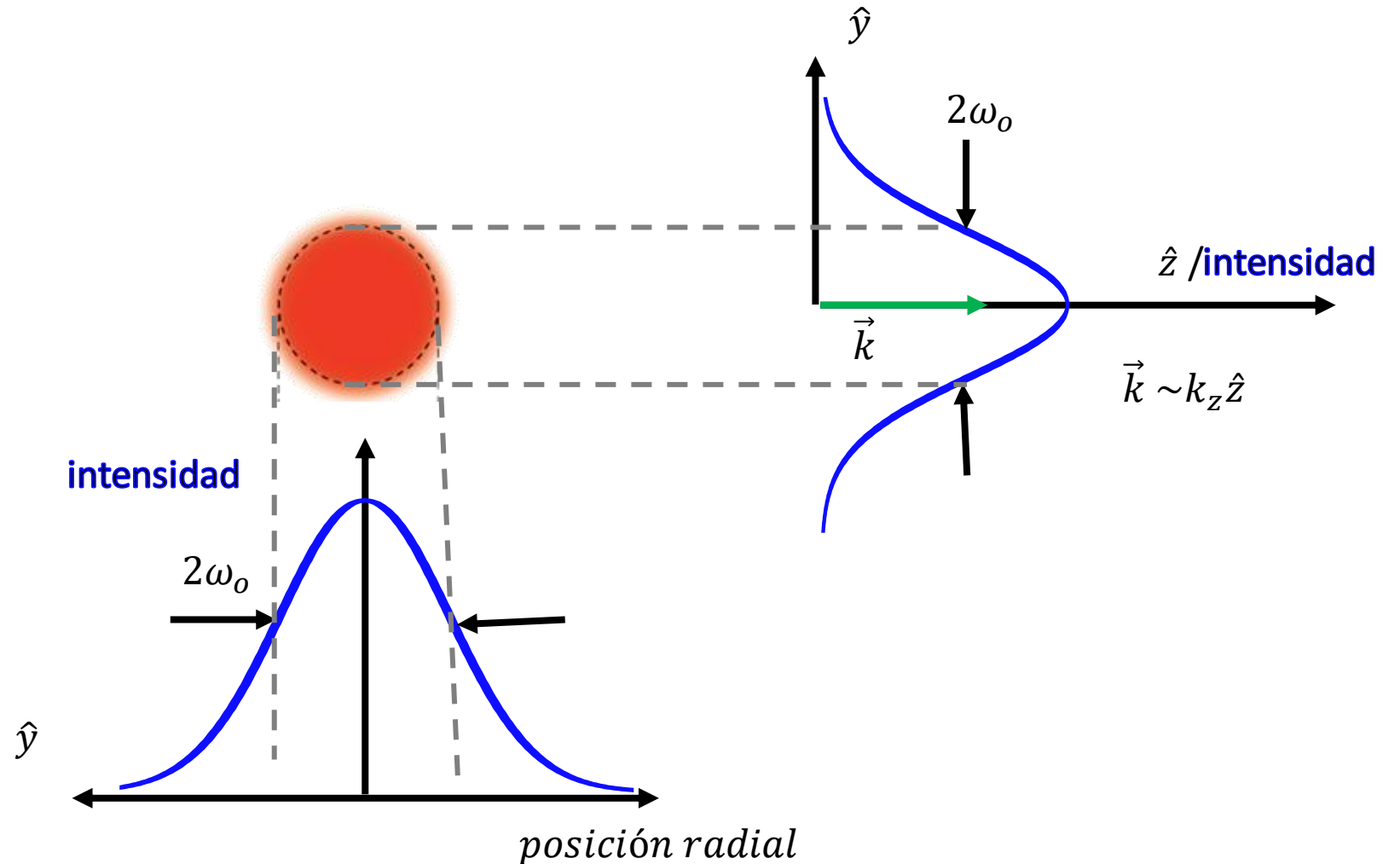
- No es perfectamente monocromático (si muy!)
- No es extendida infinitamente

¿En cuánto se parece un láser a una onda plana?

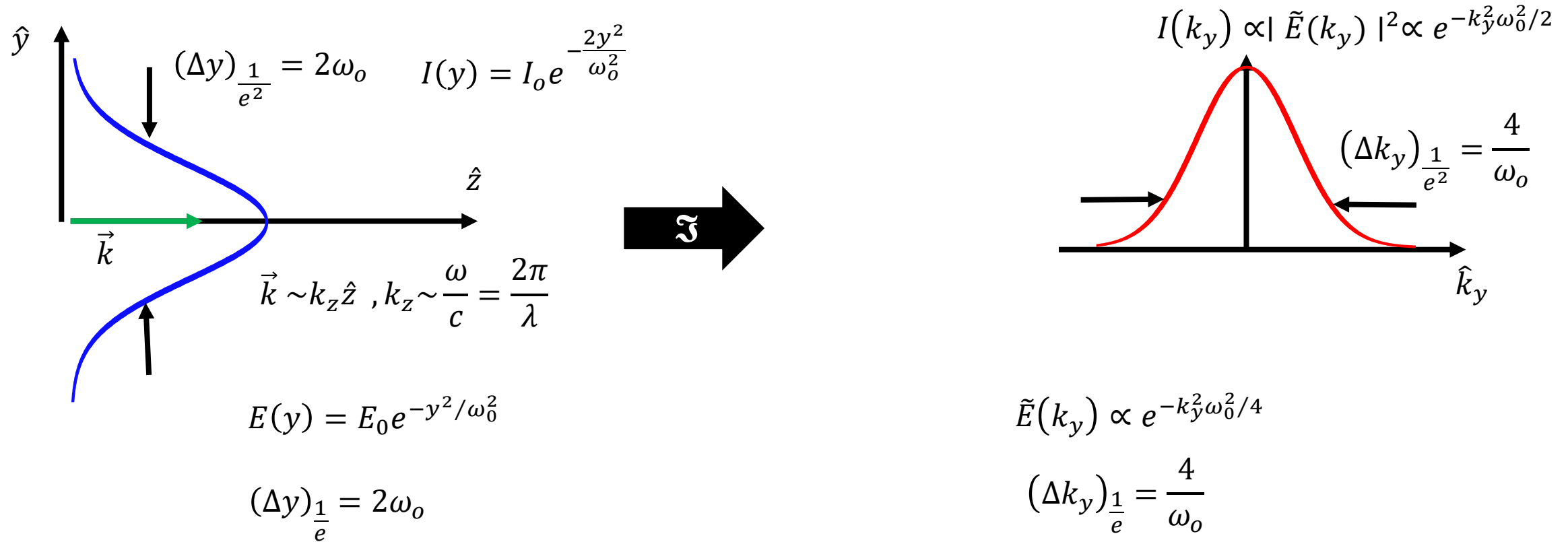


$$E(y) = E_0 e^{-y^2/\omega_0^2}$$

$$I(y) = I_0 e^{-\frac{2y^2}{\omega_0^2}}$$



¿En cuánto se parece un láser a una onda plana?



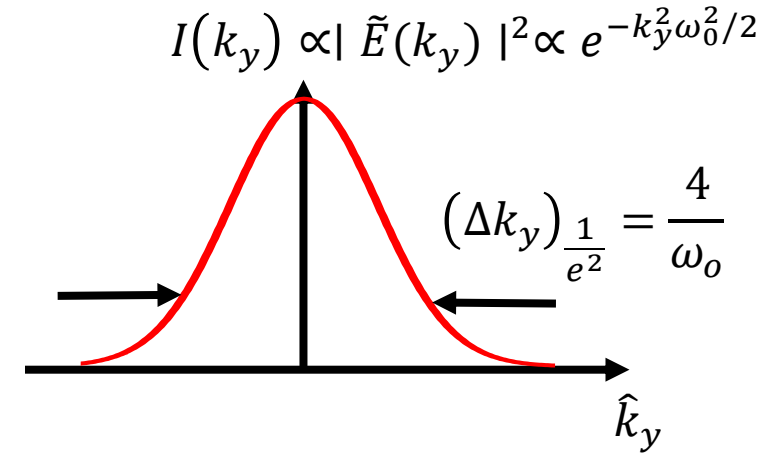
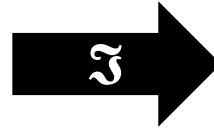
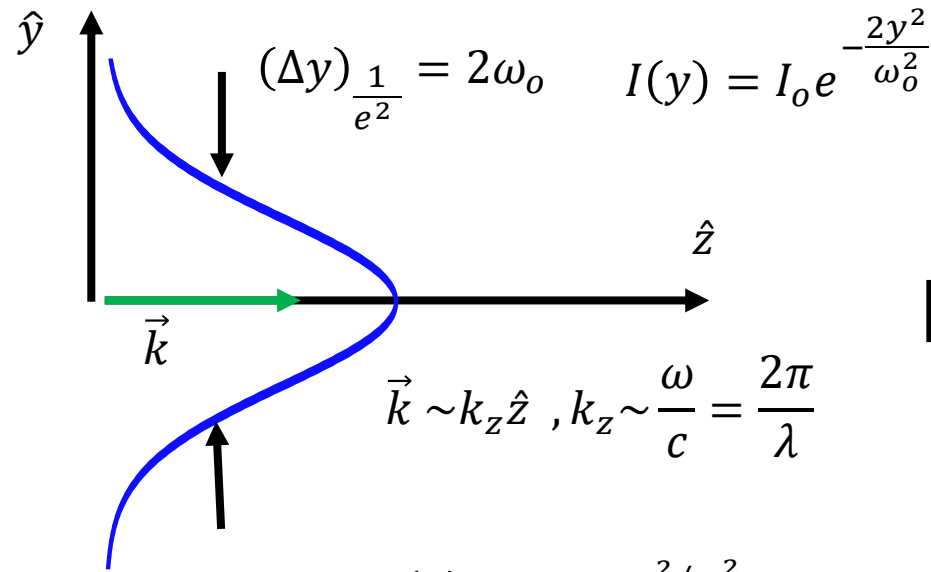
Tamaño limitado



Δk_y está limitado

¿Qué sucede durante la propagación?

¿En cuanto se parece un láser a una onda plana?

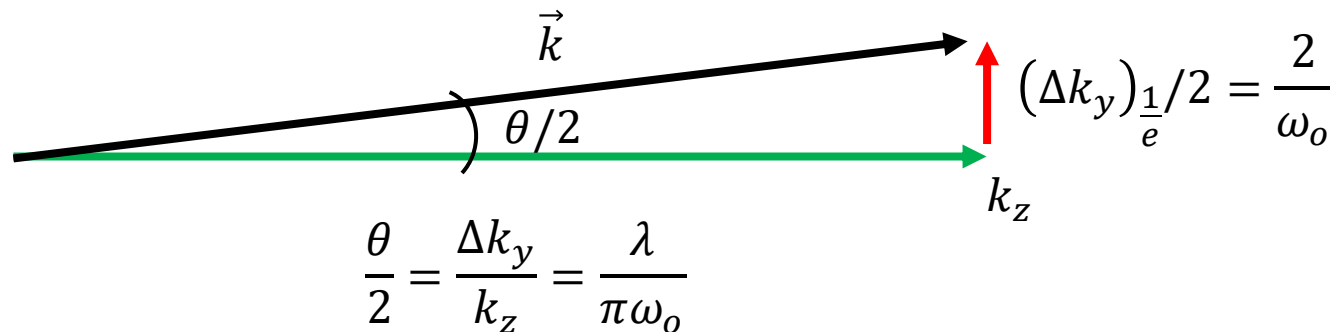


$$E(y) = E_0 e^{-y^2 / \omega_0^2}$$

$$(\Delta y)_{\frac{1}{e}} = 2\omega_0$$

$$\tilde{E}(k_y) \propto e^{-k_y^2 \omega_0^2 / 4}$$

$$(\Delta k_y)_{\frac{1}{e}} = \frac{4}{\omega_0}$$

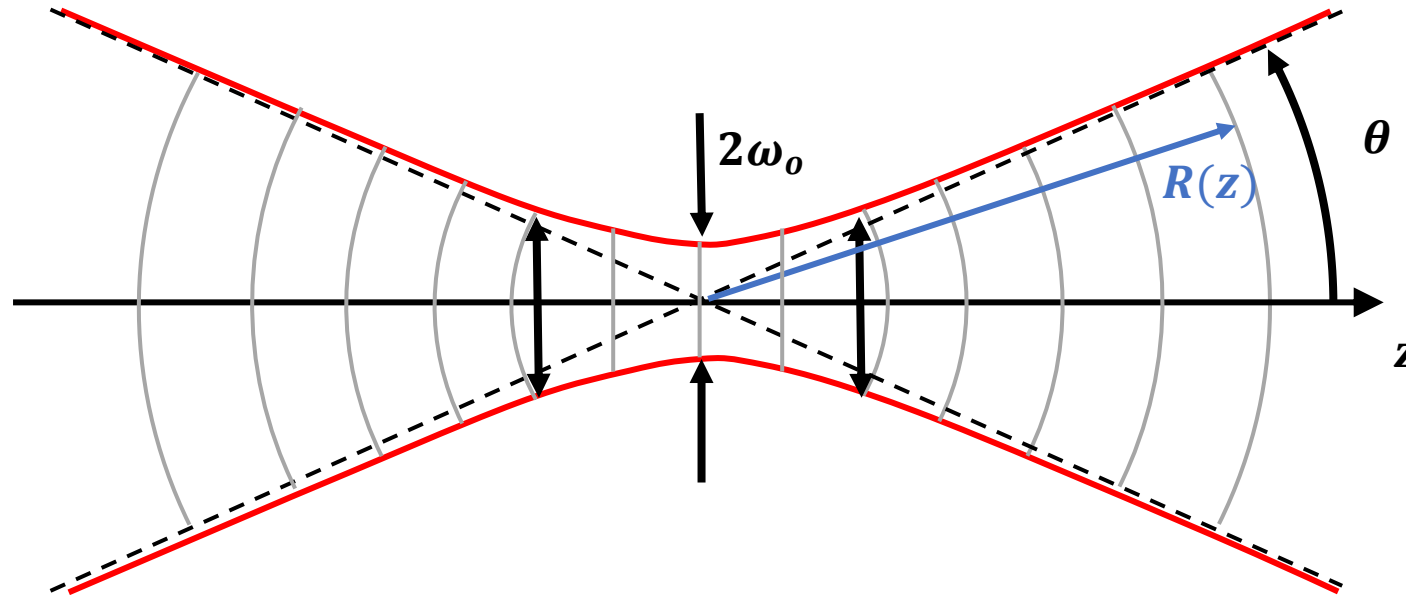


Un haz limitado espacialmente diverge!

¿En cuanto se parece un láser a una onda plana?



Haces gaussianos



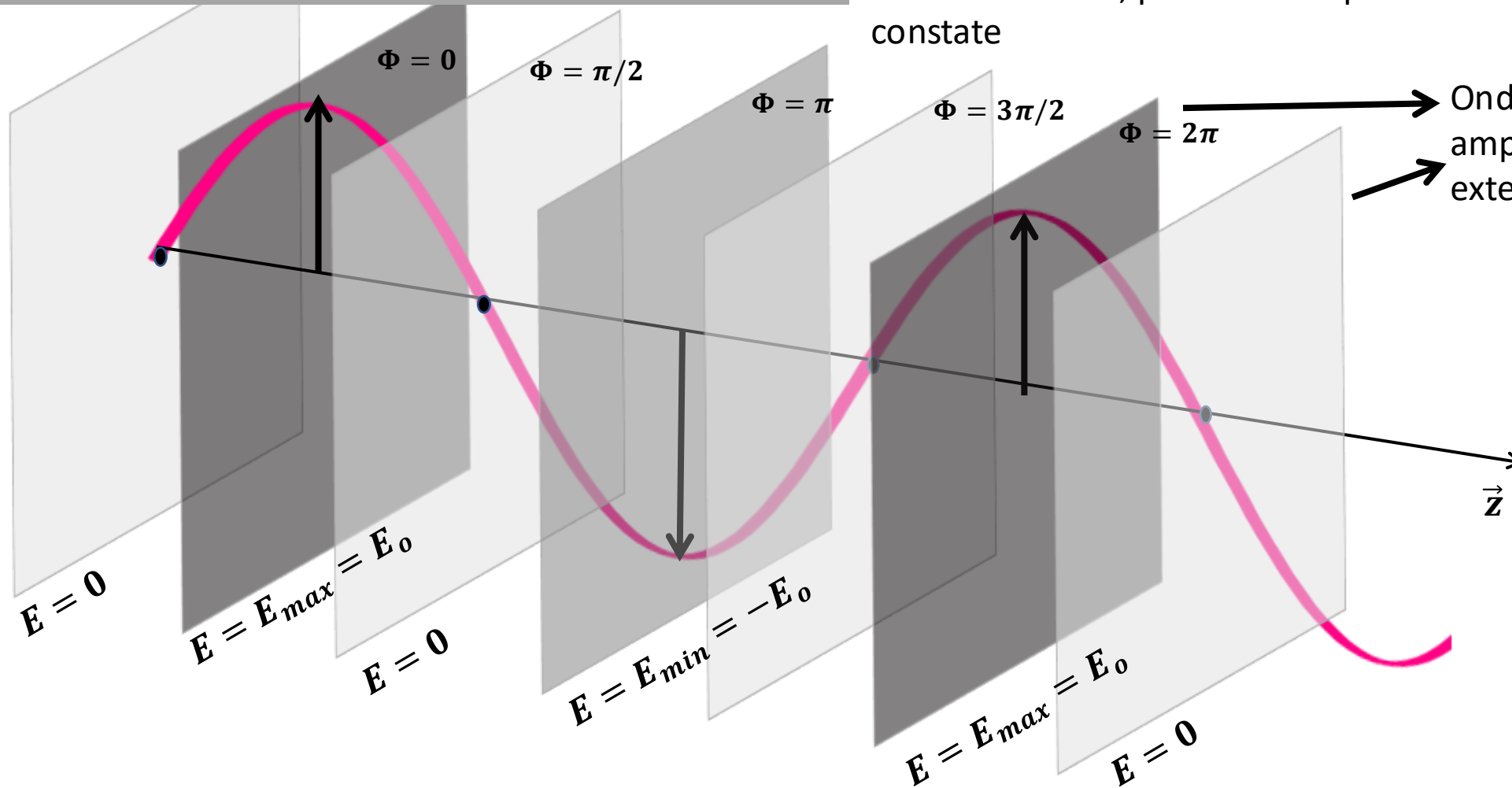
Veremos que los haces gaussianos son una mejor aproximación para los láseres, aunque las ondas planas siguen siendo útiles en una gran infinidad de situaciones

Velocidad de fase, velocidad de grupo



$$E(z, t) = E_0 e^{-i(k_z z - \omega t)} \hat{x} \rightarrow (\text{tomar parte real})$$

Frente de ondas, puntos del espacio en donde la fase es constante



$$\Phi(x, t) = k_z z - \omega t$$

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \rightarrow E(z, t) = \text{cte}$$

¿Cómo se mueve el frente de ondas en función del tiempo?

Velocidad de fase, velocidad de grupo

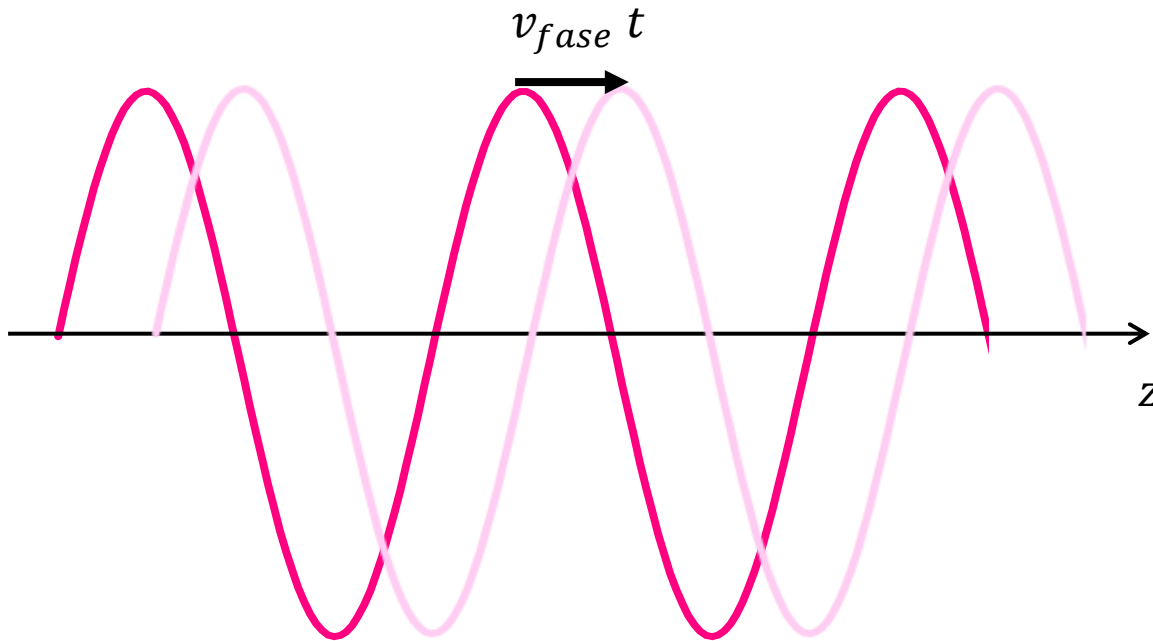


$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = \text{cte}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = k_z z - \omega t = \Phi_0$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = k_z \frac{dz}{dt} - \omega = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_z} = v_{fase} \rightarrow \text{Velocidad con la que se propaga la onda}$$

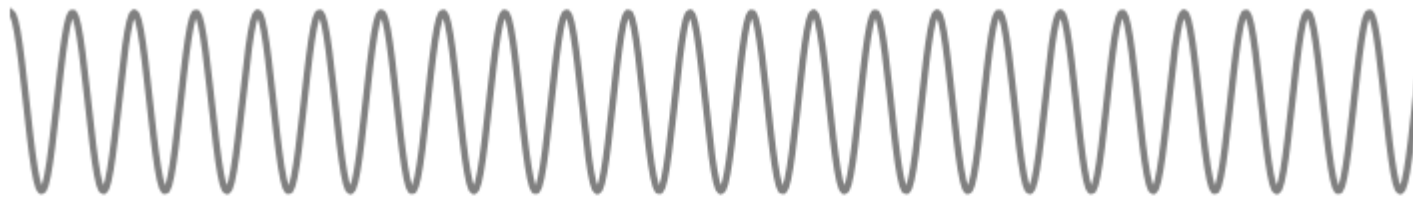


En general

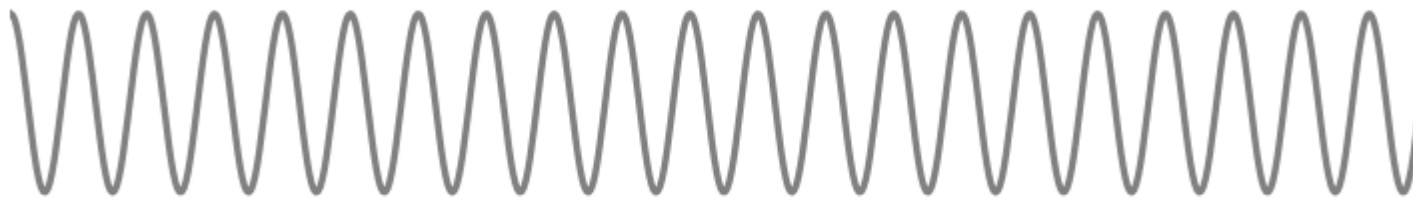
$$\omega = v_{fase} k$$
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Paquete de ondas - velocidad de fase-velocidad de grupo

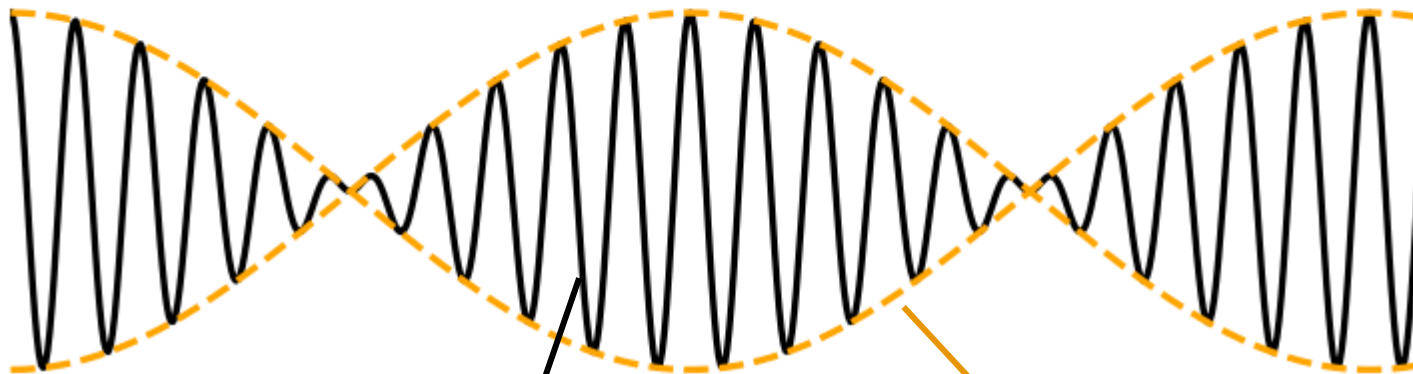
$$E_1 = A_o \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \omega_1 = \frac{c}{\eta(\omega_1)} k_1$$



$$E_2 = A_o \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad \omega_2 = \frac{c}{\eta(\omega_2)} k_2$$



$E_1 + E_2$



$$2A_o \cos(\omega_M t - k_M x) \cos(\omega_o t - k_o x)$$

$$2A_o \cos(\omega_M t - k_M x)$$

$$\text{Velocidad de fase } v_p = \frac{c}{\eta(\omega)}$$

portadora

$$\omega_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$k_o = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

envolvente

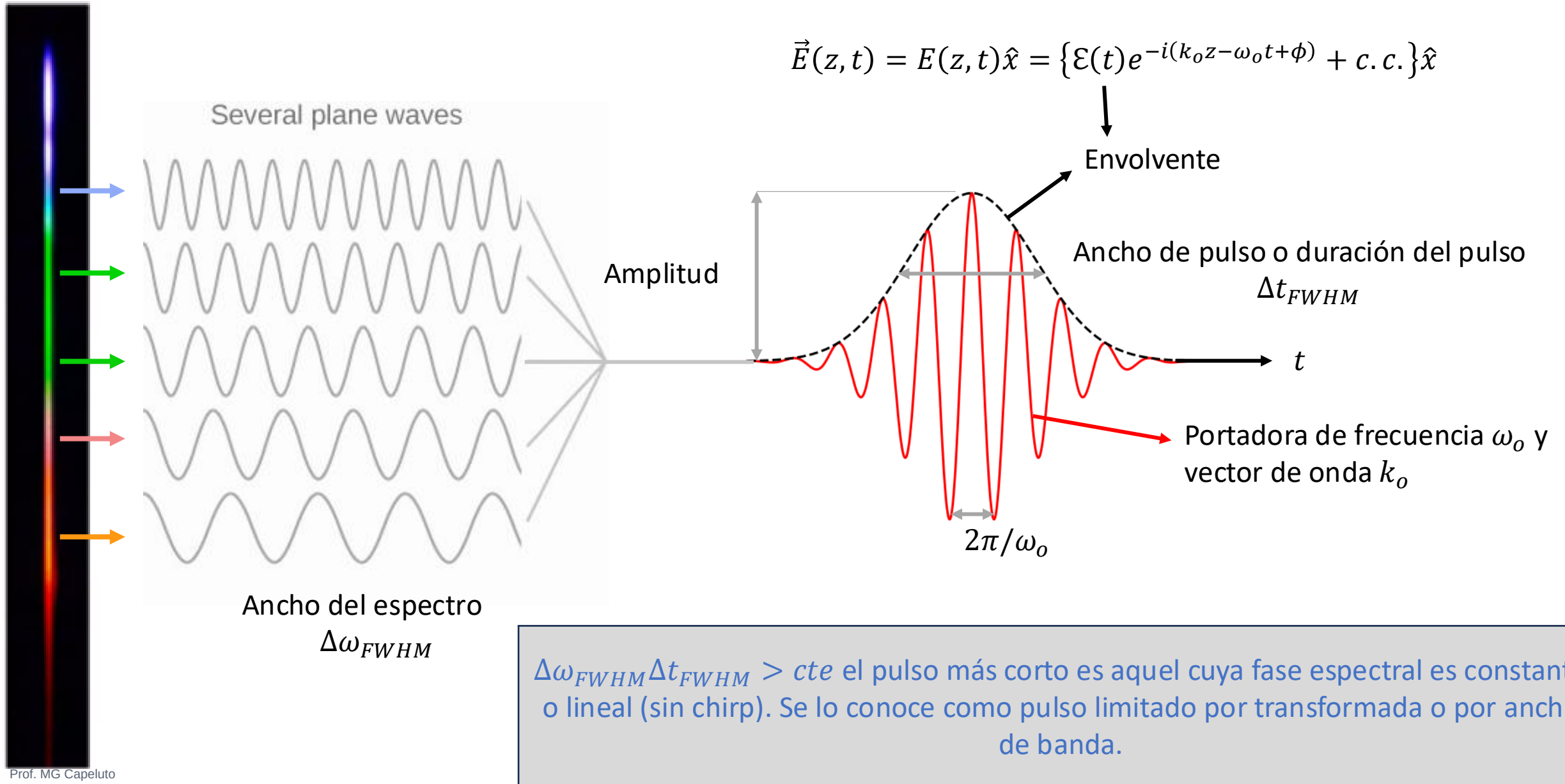
$$\omega_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

$$k_M = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

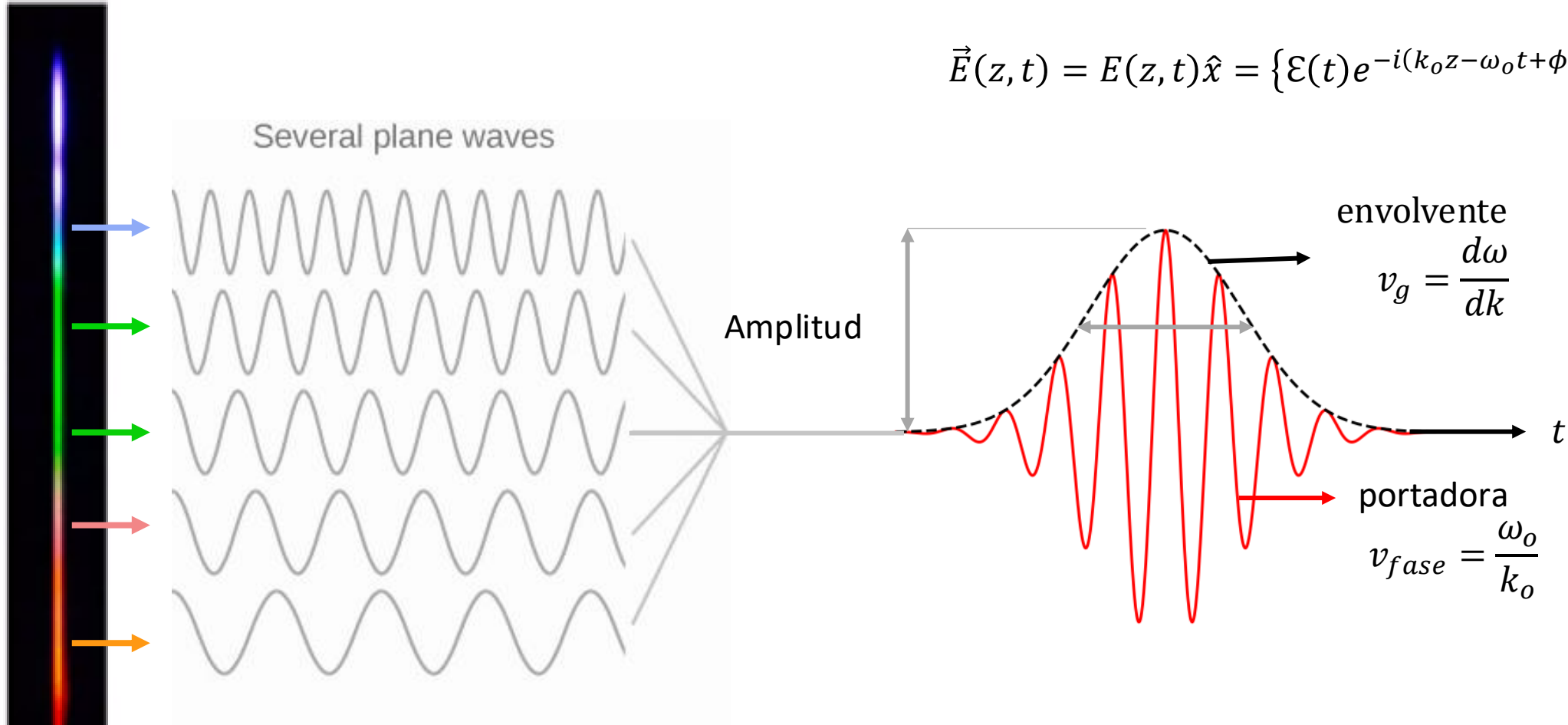
Velocidad de propagación de la envolvente (velocidad de grupo)

$$\frac{\omega_M}{k_M} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{límite continuo})$$

Pulso de luz: superposición de ondas un ancho de banda $\Delta\omega$

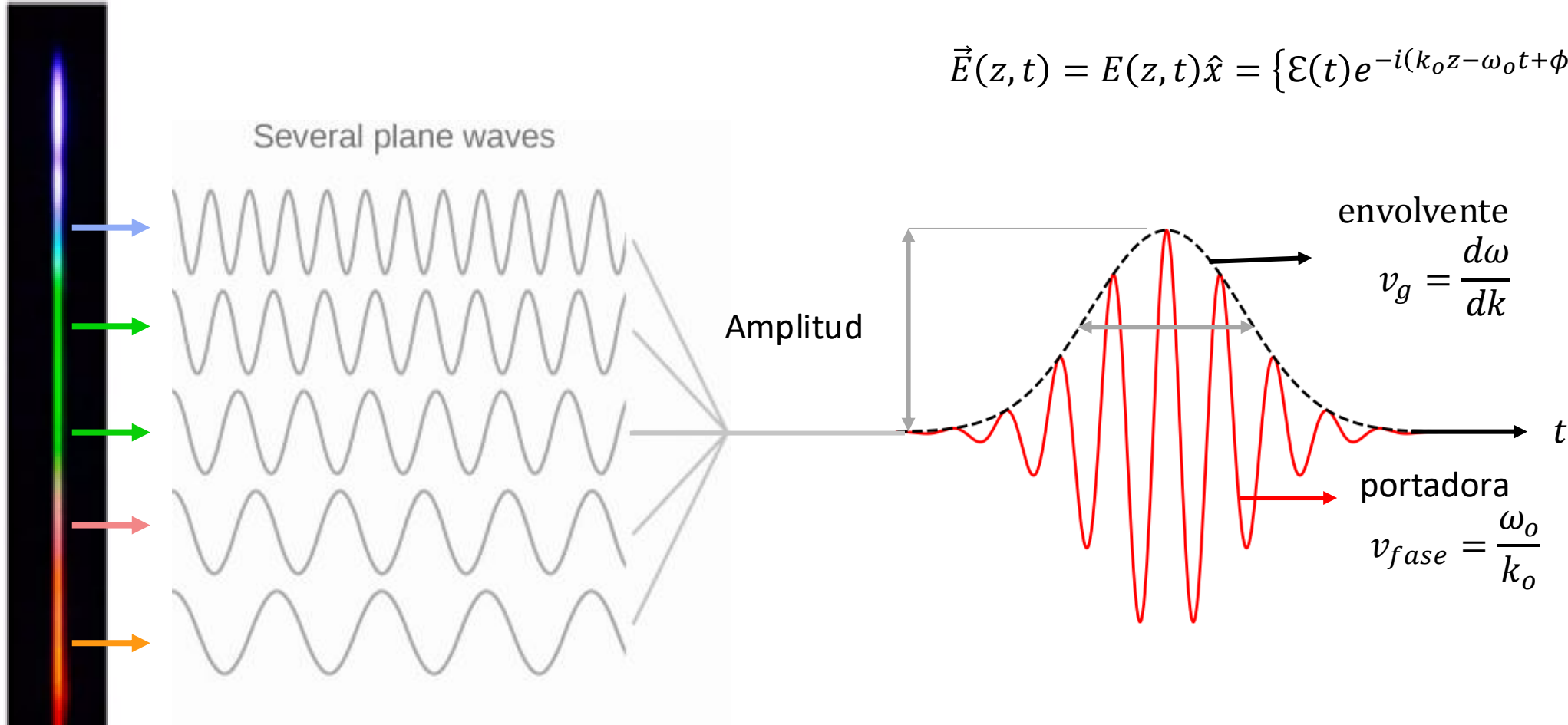


Pulso de luz: superposición de ondas un ancho de banda $\Delta\omega$



$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_{fase}k)}{dk} = v_{fase} + k \frac{d(v_{fase})}{dk}$$

Pulso de luz: superposición de ondas un ancho de banda $\Delta\omega$



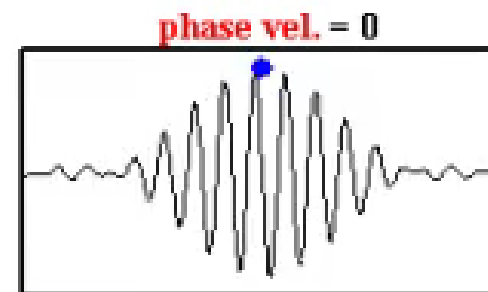
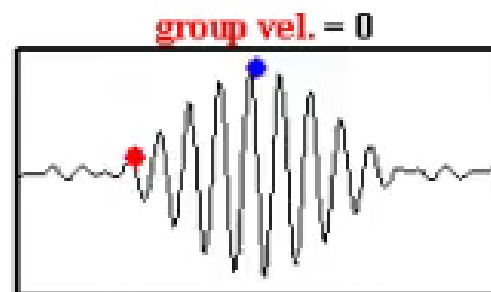
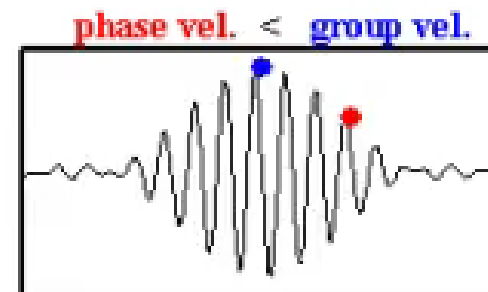
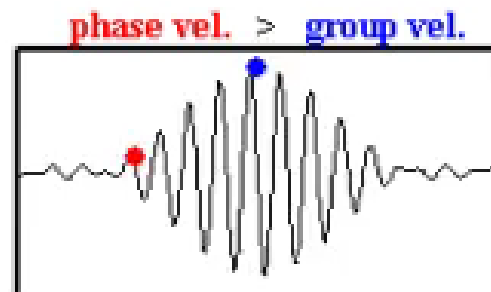
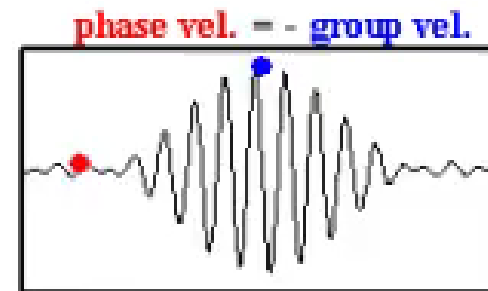
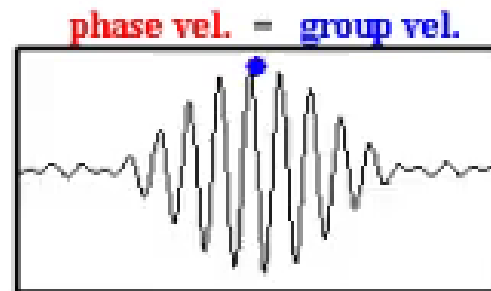
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{fase} + k \frac{dv_{fase}}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_{fase}}{d\lambda}$$

Término dispersivo
= 0 en vacío ($v_{fase} = c$)

medio no dispersivo

$\neq 0$ en un material $v_{fase} = \frac{c}{\eta(\lambda)}$

medio dispersivo



isvr

http://resource.isvr.soton.ac.uk/spcg/tutorial/tutorial/Tutorial_files/littlewavepackets.gif

Veremos más adelante en el curso:

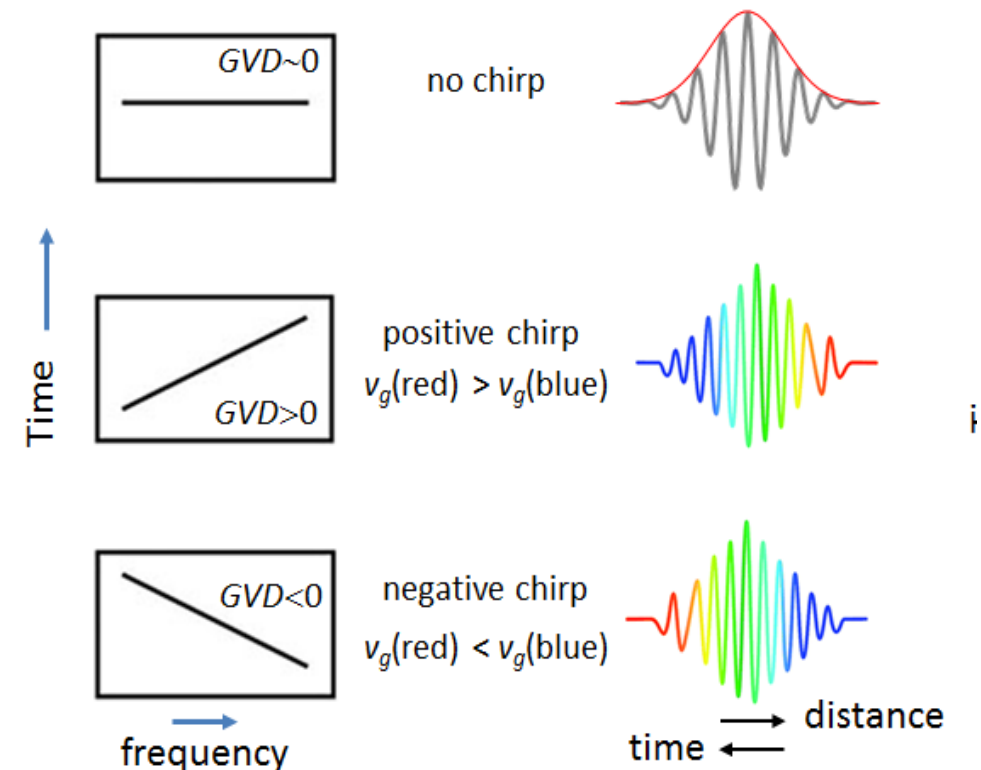
Un pulso gaussiano $E(0, t) = e^{\frac{-t^2}{2\tau_0^2}} e^{i\omega_0 t}$ se propaga una distancia L en un medio material tal que que la frecuencia media ω_0 y el vector de onda medio k_0 cumplen $\Delta\omega \ll \omega_0$ y $\Delta k \ll k_0$

$$\omega = \frac{c}{\eta(\omega)}$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_o (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_o (k - k_0)^2 + \dots$$

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_o (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

Describir las características de propagación del pulso (usar datos experimentales para índice de refracción dependiente de la frecuencia)



La **coherencia** es una medida de la correlación que existe entre las fases de la onda medidas en diferentes puntos. La coherencia de una onda depende de las características de su fuente.

$$\vec{E}(z, t) = E_o e^{-i(kz - \omega t + \varphi)} \hat{x}$$

¿Qué causa la pérdida de relación de fase entre dos ondas que provienen de una misma fuente?

$$\Phi(z, t) = (kz - \omega t + \varphi)$$

Distintas componentes
espectrales

Fases aleatorias entre distintos trenes de onda

La interferometría permite caracterizar las diferencias de fase:

Coherencia: Capacidad que tiene la luz de producir interferencia

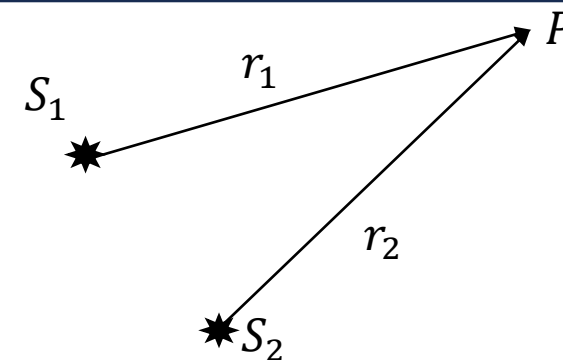
Interferencia fuentes puntuales



$$\vec{E}_1(r_1, t) = \vec{E}_{o1}(r_1) e^{i(kr_1 - \omega t + \epsilon_1)}$$

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_1(r_1, t) + \vec{E}_2(r_2, t)$$

$$\vec{E}_2(r_2, t) = \vec{E}_{o2}(r_2) e^{i(kr_2 - \omega t + \epsilon_2)}$$



$$I \propto \langle \vec{E}(r, t) \vec{E}(r, t)^* \rangle_T \longrightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 500 \text{ THz} \rightarrow \tau \sim 2 \times 10^{-15} \text{ s}$$

T varios ciclos del campo (detectores lentos comparados con las oscilaciones del campo)

$$\vec{E}(r, t) \vec{E}(r, t)^* = |E_{o1}|^2 + |E_{o2}|^2 + 2 \text{Re} \{ \vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2}^* e^{i[(k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2))]} \} \quad \text{Asumiendo amplitudes reales} \rightarrow$$

$$= |E_{o1}|^2 + |E_{o2}|^2 + 2 \vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2} \cos[k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)]$$

Polarizaciones perpendiculares no interfieren

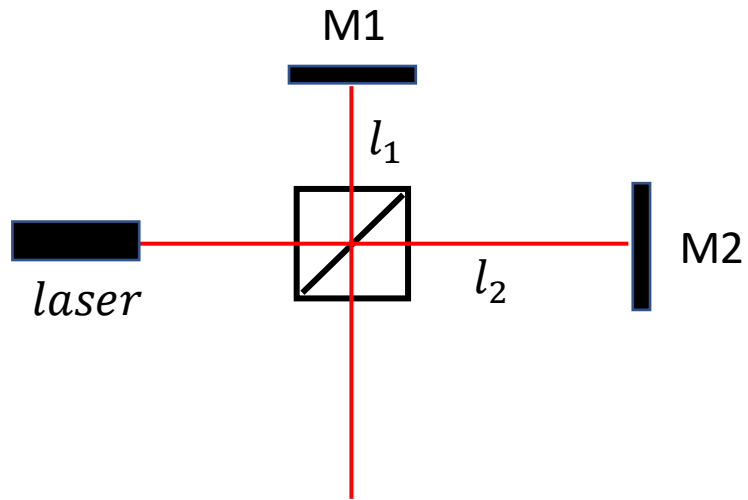
$$\Delta\Phi = k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \text{ diferencia de fase}$$

Si fluctúa en el tiempo, el promedio de este término se anula
Para que haya interferencia, $\Delta\Phi$ debe ser $\sim$ constante en T , y
esto sucede dentro de la longitud de coherencia

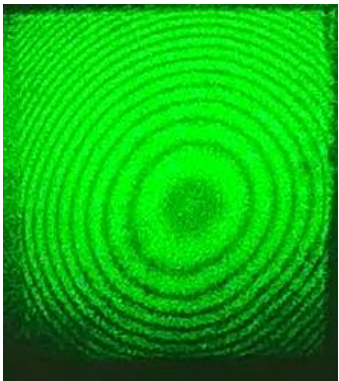
Medición de coherencia temporal (interferometría)



Coherencia temporal o longitudinal: Medición de la correlación entre las fases de una onda entre dos puntos a lo largo de la dirección de propagación. La coherencia temporal nos dice cuan monocromática es la fuente



$$\Delta\Phi = k \Delta l$$



Laser DPSS 532 nm

Medición de coherencia temporal (interferometría)



Interferencia de dos haces: Onda perfectamente monocromática

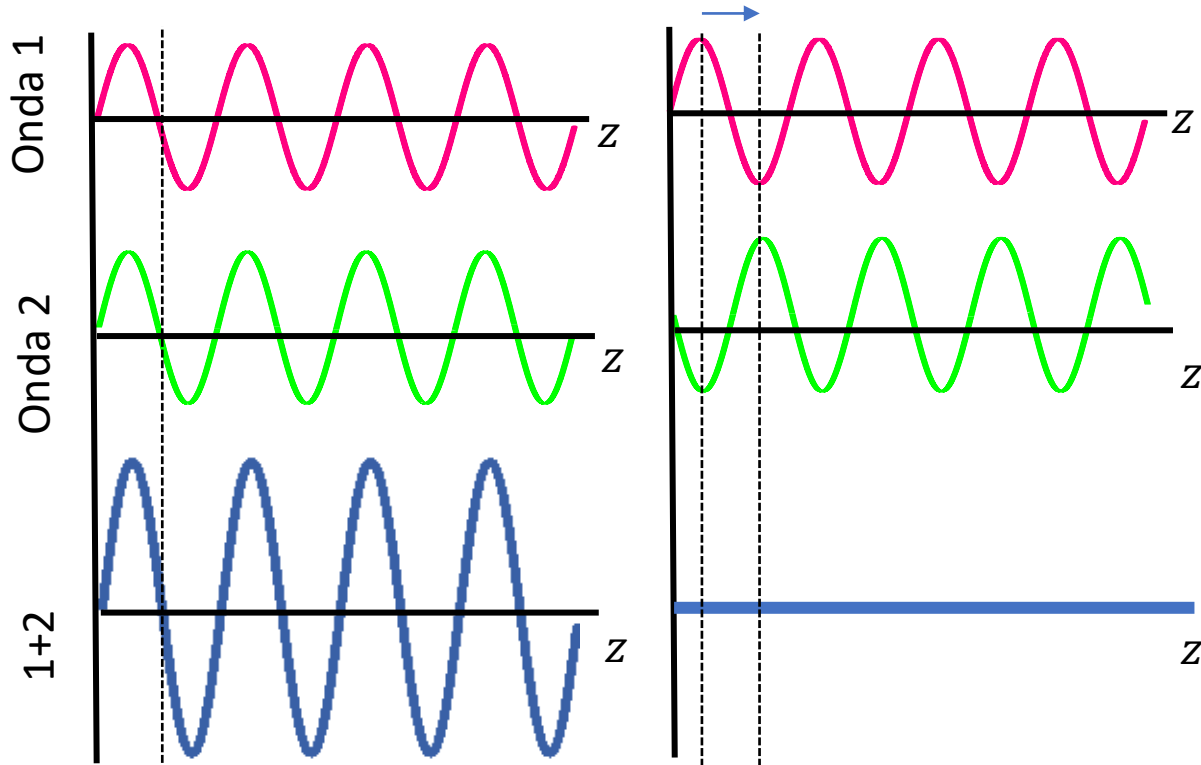
Onda 1

Onda 2

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{o1} e^{-i\Phi_1(z, t)} + \vec{E}_{o2} e^{-i\Phi_2(z, t)}$$

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\Delta\Phi = \pi$$



Interferencia constructiva

Interferencia destructiva

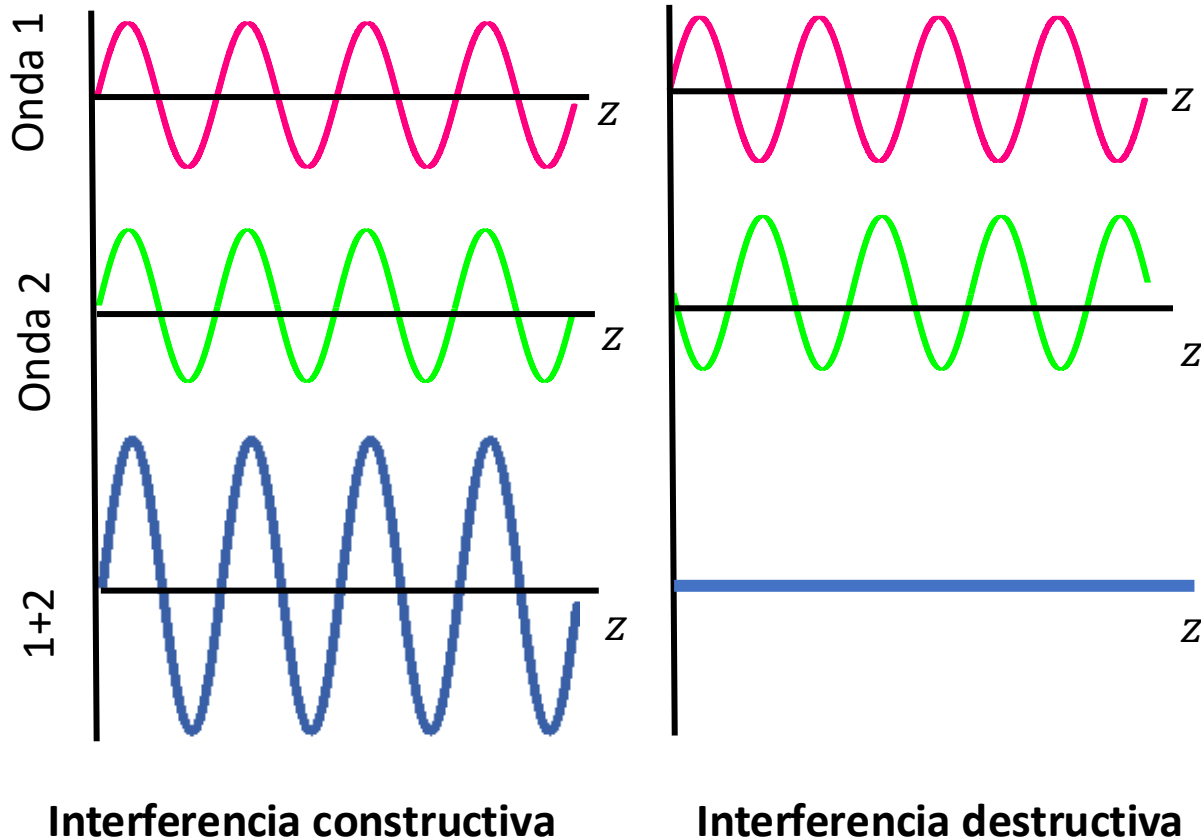
Medición de coherencia temporal (interferometría)



Onda perfectamente monocromática

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\Delta\Phi = \pi$$



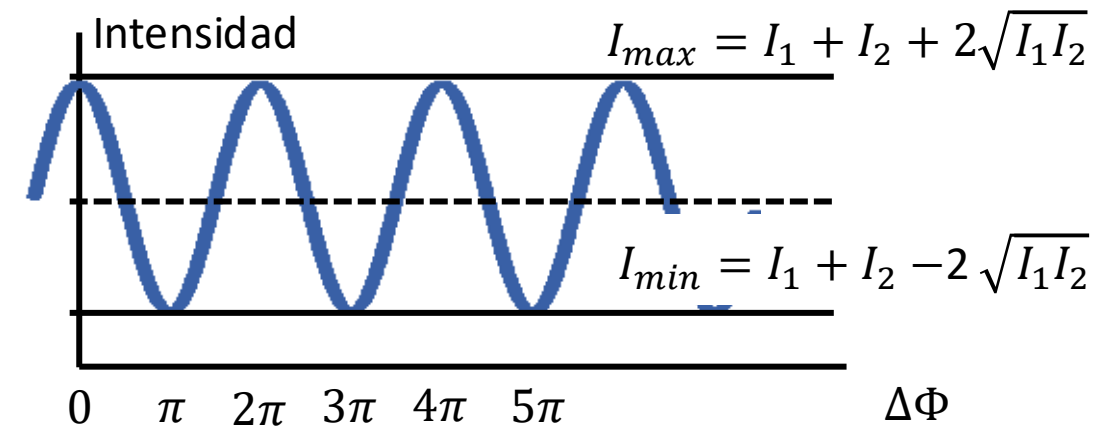
Onda 1

Onda 2

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{o1}e^{-i\Phi_1(z,t)} + \vec{E}_{o2}e^{-i\Phi_2(z,t)}$$

$$I \propto |\vec{E}(z, t)|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi)$$

$$I_1 \propto |\vec{E}_1(z, t)|^2 \quad I_2 \propto |\vec{E}_2(z, t)|^2$$



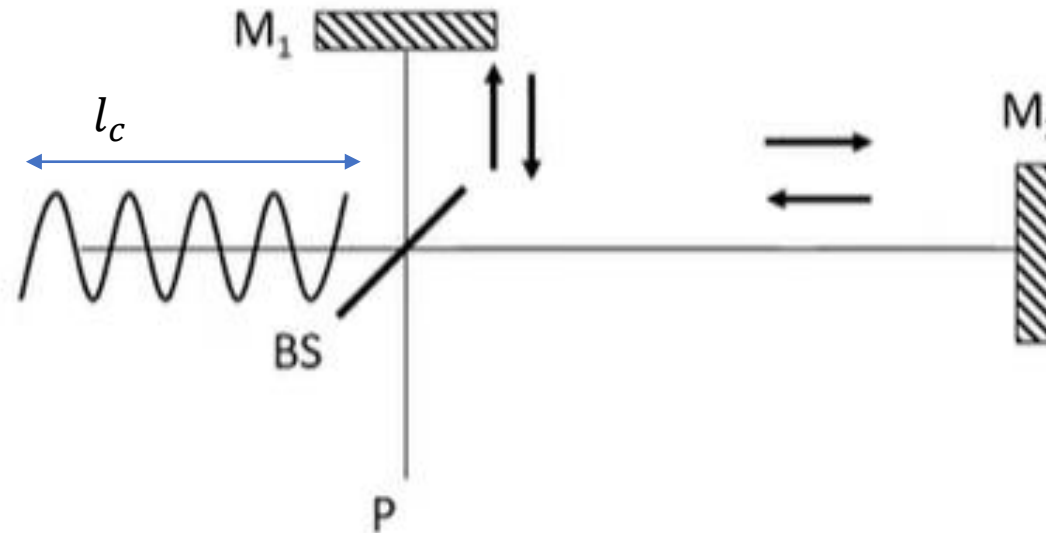
$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Medición de coherencia temporal (interferometría)



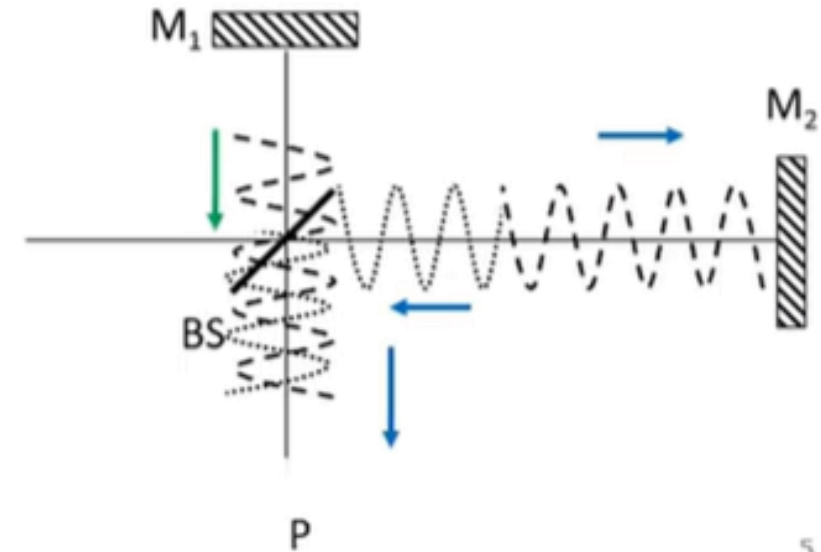
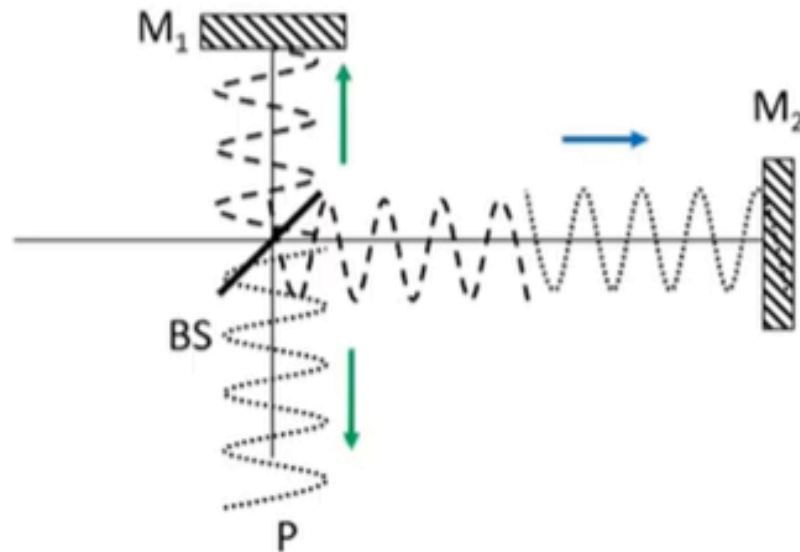
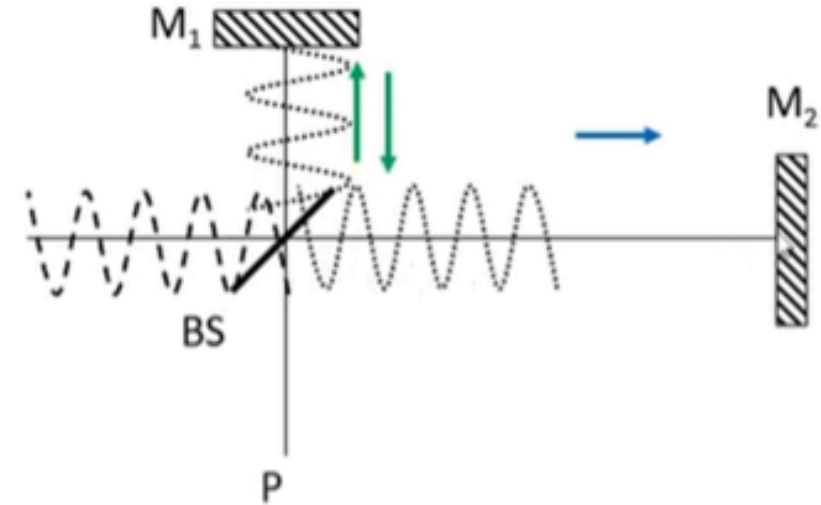
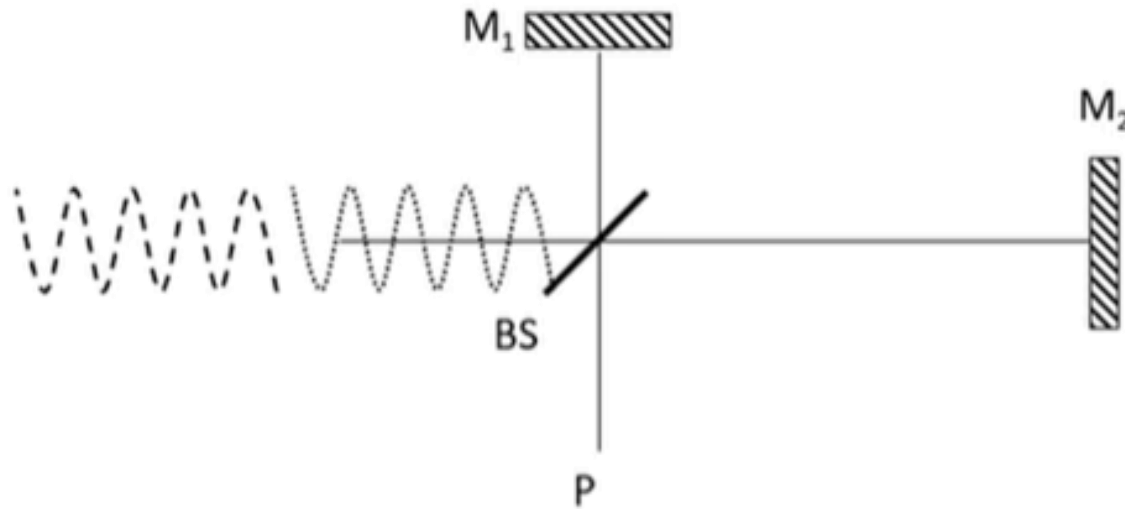
Si la diferencia de camino óptico $\Delta\Phi = k\Delta l$ es menor que la longitud del tren de ondas (longitud de coherencia), vale todo lo descrito anteriormente

¿Qué pasa si sucede lo contrario?



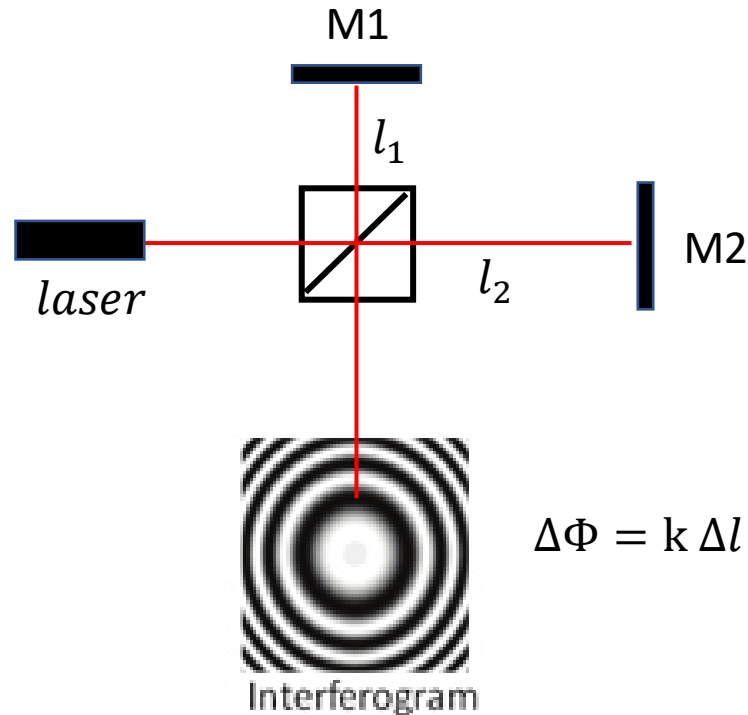
Mientras que $\Delta l < l_c$ mido la interferencia del mismo tren de ondas

Medición de coherencia temporal (interferometría)



Si se superponen trenes de ondas, que no provienen del tren inicial, las fases varían al azar y se pierde visibilidad

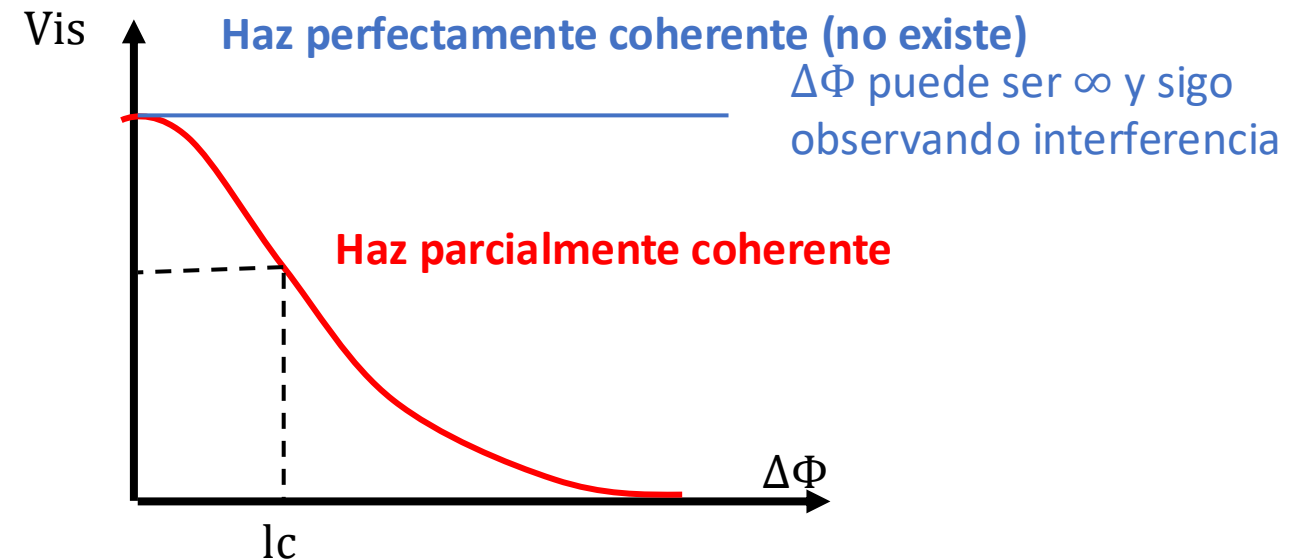
Medición de coherencia temporal (interferometría)



Mido la visibilidad en función de $\Delta\Phi = k \Delta l$

Para cada l_1 y l_2

- la figura de interferencia es la superposición de dos ondas
- Obtengo un valor de visibilidad



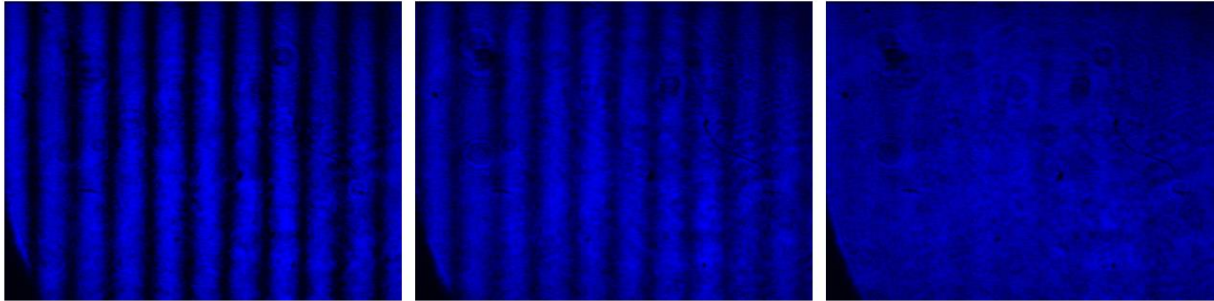
Laser DPSS 532 nm

Nota: La transformada de Fourier del interferograma medido en función del retardo óptico permite obtener el espectro de la fuente, lo que da origen a diversas técnicas de medición como FTIR

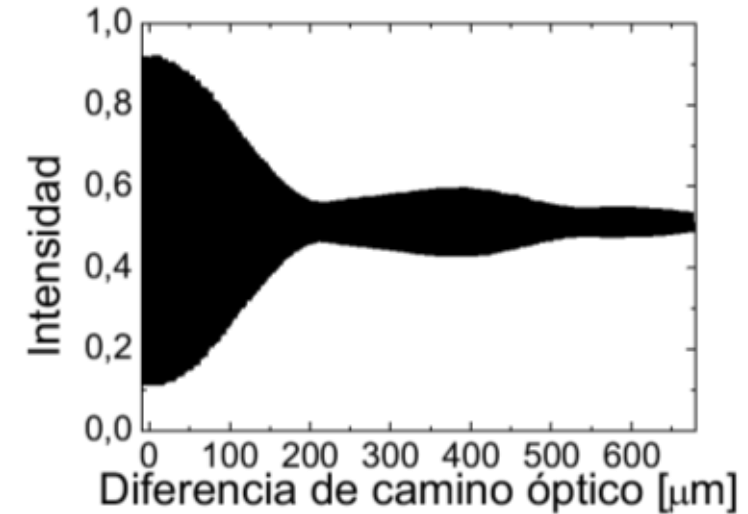
Medición de coherencia temporal (interferometría)



Laser de semiconductores 405 nm

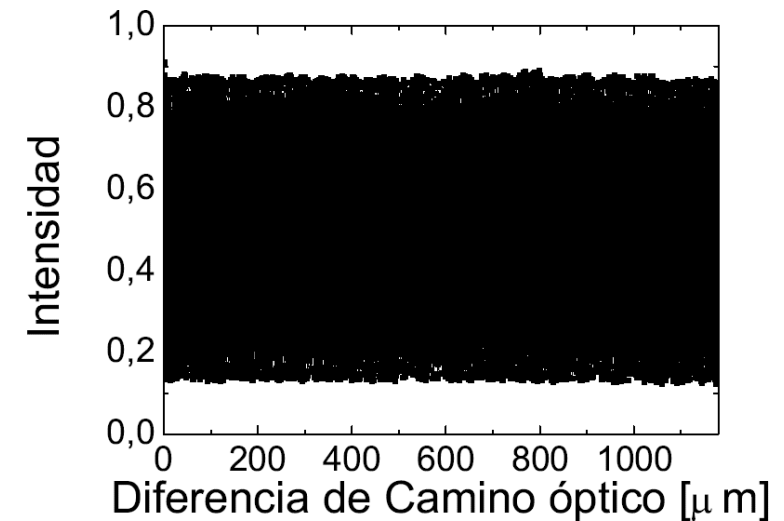


(a) $x = 0$, $C = 0,8$ (b) $x = 100\mu m$, $C = 0,5$ (c) $x = 300\mu m$, $C = 0,2$



(b)

He-Ne 633 nm

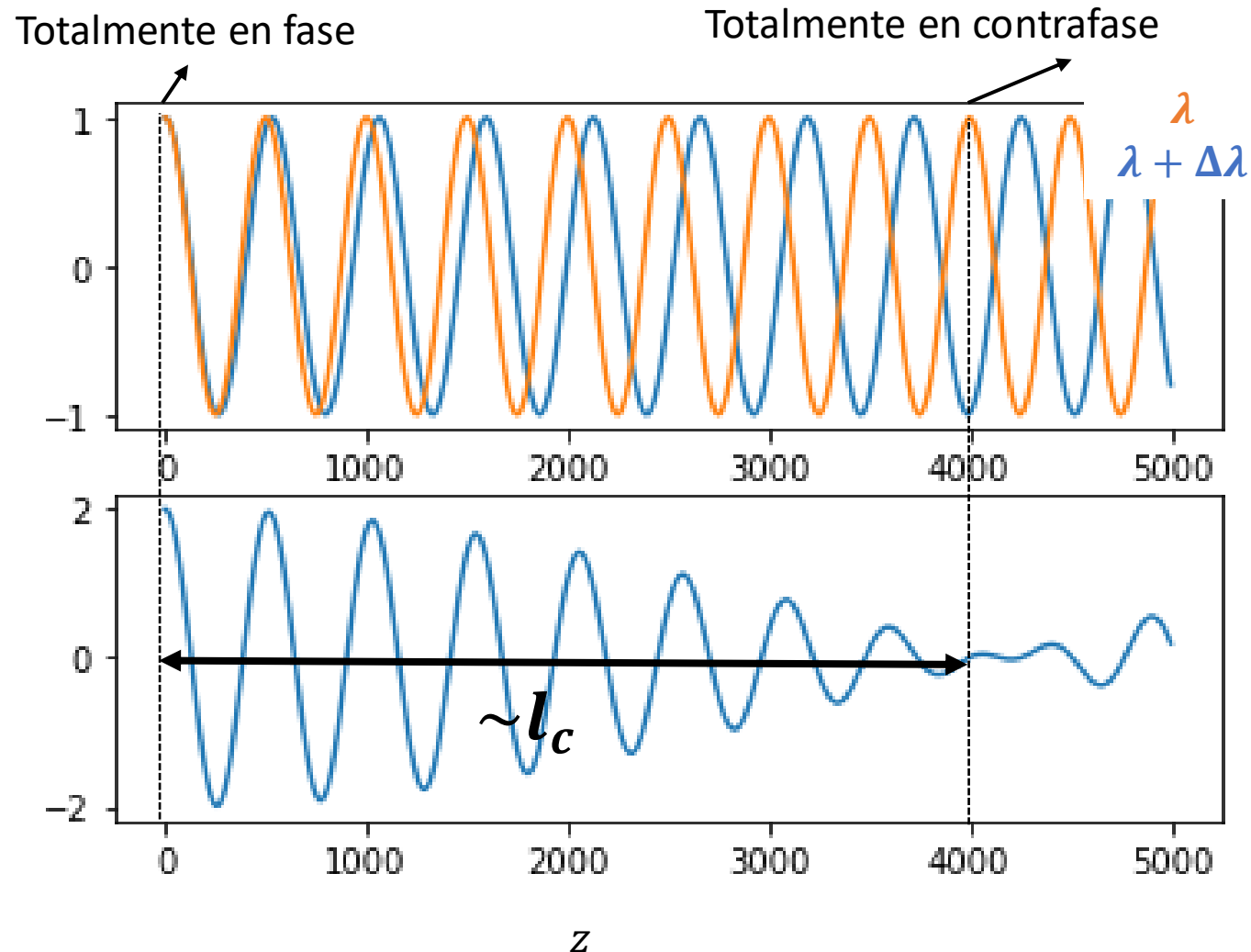


(a)

Coherencia temporal



Los láseres no son perfectamente monocromáticos



La relación de fase no se mantiene

$$\Delta\Phi(z, t) = (k_2 - k_1)z$$

Pierdo la coherencia cuando la diferencia de fase es 1 rad (60°) (arbitrario)

Longitud de coherencia

$\Delta\Phi(z, t) = (k_2 - k_1)z$ Pierdo la coherencia cuando la diferencia de fase es 1 rad (60°) (arbitrario)

$$\sim 1 = (k_2 - k_1)lc = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)lc \sim 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} lc$$

$$lc \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Tiempo de coherencia $\tau_c = \frac{lc}{c}$

$$\lambda\nu = c \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

$$lc \sim \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{c}{\Delta\omega}$$

$$\tau_c = \frac{lc}{c} \sim \frac{1}{\Delta\omega}$$

La coherencia temporal nos dice cuan monocromática es una fuente

Coherencia y principio de incerteza

Vimos que por Fourier confinamiento espacial Δy implica confinamiento espectral Δk_y

$$\begin{array}{ll} \Delta y \Delta k_y \geq 1/2 \text{ (idem x, z)} & (\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}) \\ \Delta \omega \Delta t \geq 1/2 & (\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}) \end{array}$$

Si consideramos un tren de ondas de longitud Δt su ancho espectral es aprox $\Delta \nu \sim \frac{1}{\Delta t}$

$\tau_c \sim \Delta t$ (puede interferir consigo mismo durante ese tiempo porque tiene fase definida en Δt)

$$\begin{array}{l} \lambda \nu = c \\ \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta \omega}{\omega} \\ l c = c \Delta t \sim \frac{c}{\Delta \nu} \sim \frac{\lambda c}{\nu \Delta \lambda} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \end{array}$$

$$lc \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$\tau_c = \frac{lc}{c} = \frac{1}{\Delta\omega}$$

Haz perfectamente monocromático

$$\Delta\lambda \rightarrow 0, \quad lc \rightarrow \infty$$

He-Ne

$$lc \sim O(m)$$

Na

$$\Delta\nu \sim 10^8 \frac{1}{s} \rightarrow lc \sim 3 \text{ m}$$

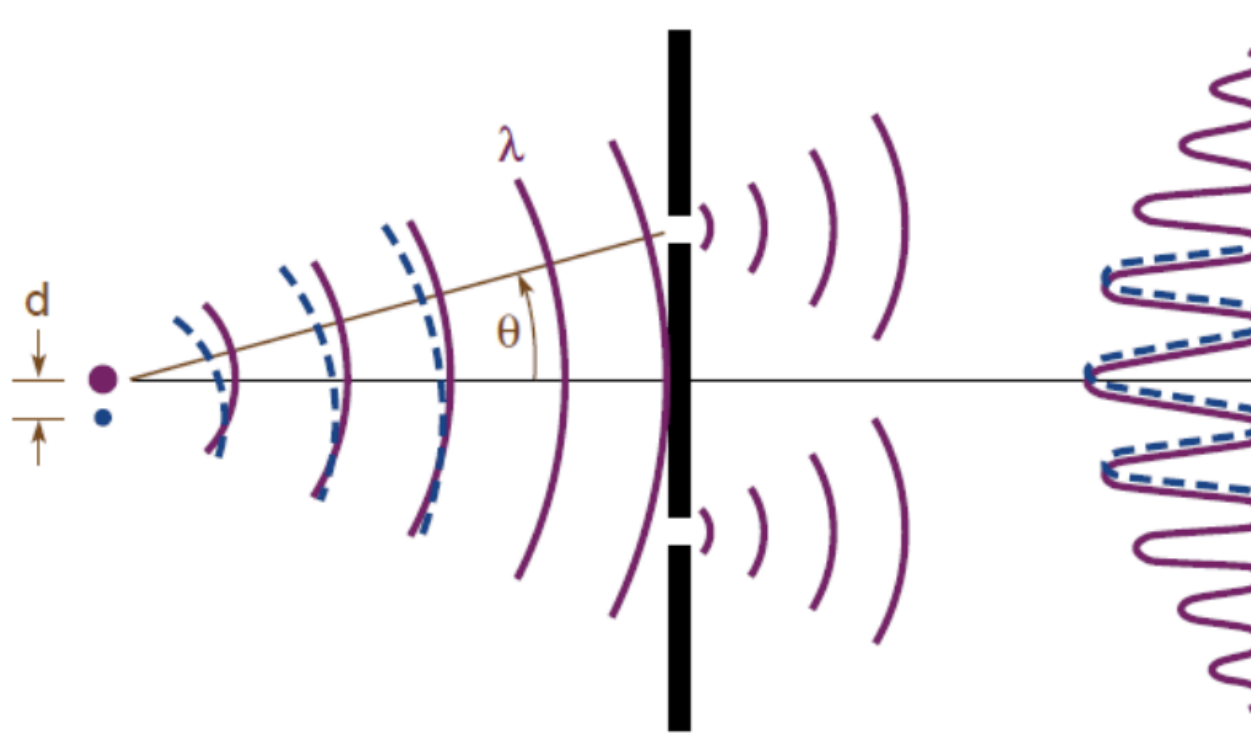
Láser muy estabilizado

$$\Delta\nu \sim 10^4 \frac{1}{s} \rightarrow lc \sim 30 \text{ km}$$

Coherencia especial o transversal



Coherencia especial es una medición de la correlación entre las fases de ondas que provienen de distintos puntos en la dirección transversal a la de propagación.

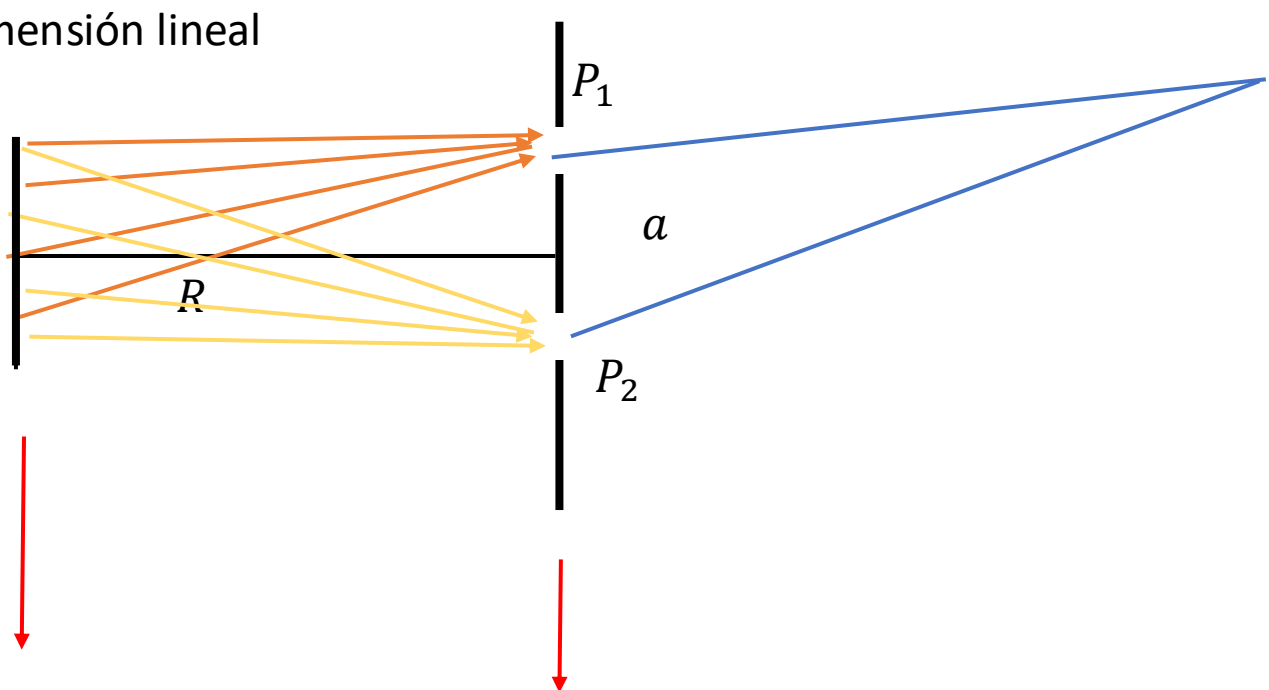


Coherencia especial o transversal



Coherencia especial es una medición de la correlación entre las fases de ondas que provienen de distintos puntos en la dirección transversal a la de propagación.

ΔS dimensión lineal
 S área



Las ondas provenientes de P_1 y P_2 producen una figura de interferencia si las superposiciones en esos puntos mantienen una relación de fase

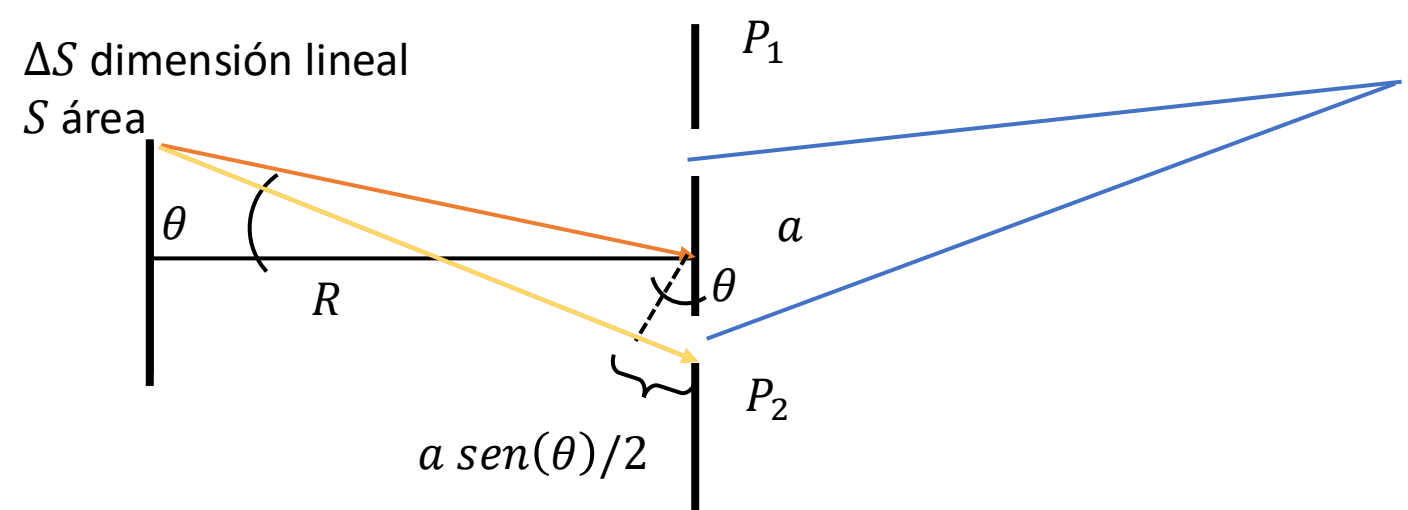
Cada punto de la fuente ΔS emite ondas no correlacionadas

En este plano: Campo E = superposición de ondas no correlacionadas provenientes de la superficie ΔS

Coherencia especial o transversal



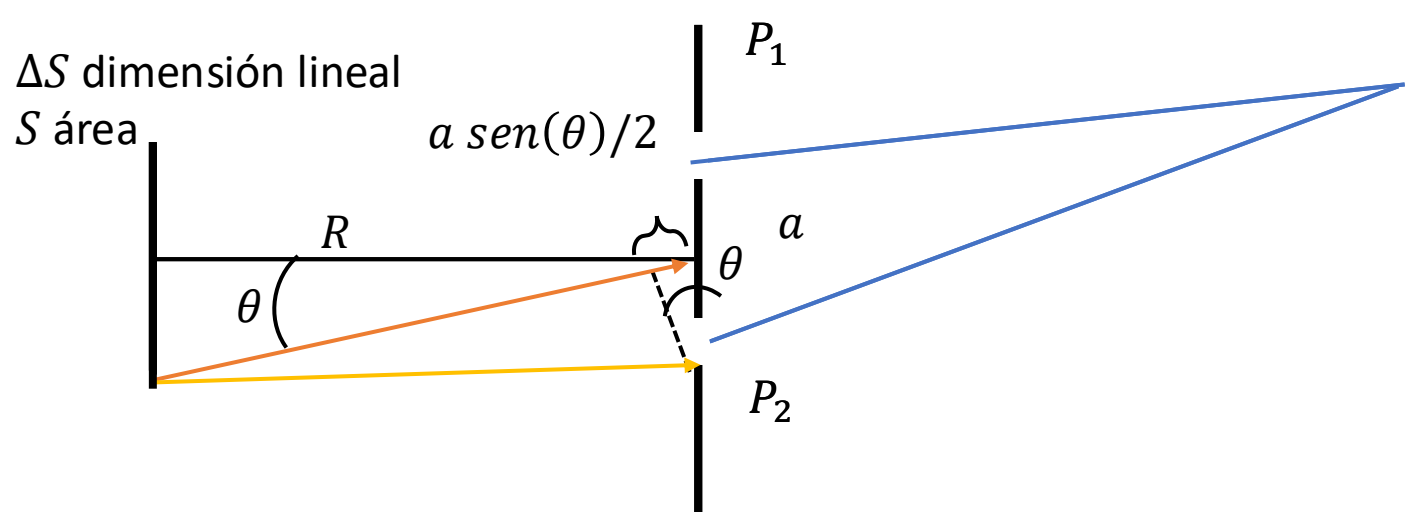
Coherencia especial es una medición de la correlación entre las fases de ondas que provienen de distintos puntos en la dirección transversal a la de propagación.



Coherencia espacial o transversal



Coherencia especial es una medición de la correlación entre las fases de ondas que provienen de distintos puntos en la dirección transversal a la de propagación.



$$\Delta\Phi_{P2} = k a \text{sen}(\theta)$$

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{P1} + \Delta\Phi_{P2} = 2k a \text{sen}(\theta) \sim \frac{4\pi a \Delta S}{\lambda 2 R}$$

$$\Delta\Phi \sim 1 \rightarrow a_c \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda R}{\Delta S}$$

Área de coherencia $Ac = \pi a_c^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^2 R^2}{\Delta S^2} = \frac{\lambda^2 R^2}{S}$

Angulo sólido de coherencia

$$\Delta\Omega \sim \frac{Ac}{R^2} \sim \frac{\lambda^2}{S}$$

Longitud de coherencia espacial $\sqrt{Ac}$

Si la fuente fuera una Estrella no conocería ΔS , desde donde mido, el ángulo sólido subtendido por fuente es $\Delta\Omega'$

$$S = R^2 \Delta\Omega'$$

$$Ac = \pi a_c^2 = \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega'}$$

Coherencia espacial o transversal



Fuente térmica (Radiación de cuerpo negro)

$$\Delta S = 1 \text{ mm}$$

Uso un filtro para seleccionar verde

$$\bar{\lambda} = 500 \text{ nm}$$

$$R = 2 \text{ m}$$

$$Ac \sim \frac{\lambda^2 R^2}{S} = 1 \text{ mm}^2$$

$$\sqrt{Ac} \sim 1 \text{ mm}$$

Luz solar

Angulo subtendido

$$\alpha = 4.65 \text{ mrad} \rightarrow \Delta\Omega' = \pi\alpha^2 = 6.81 \cdot 10^{-5} \text{ srad}$$

Uso un filtro para seleccionar verde

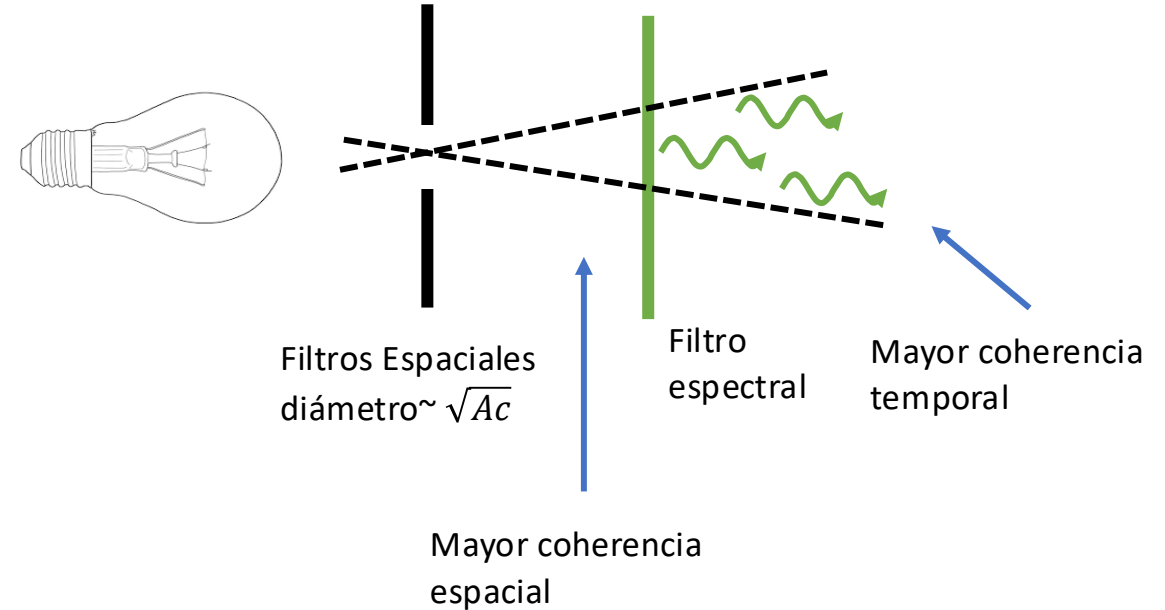
$$\bar{\lambda} = 500 \text{ nm}$$

$$Ac \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega'} \sim 3.67 \times 10^{-13} \text{ mm}^2$$

$$\sqrt{Ac} \sim 61 \mu\text{m}$$

Prof. MG Capeluto

¿Puedo hacer más coherente una Fuente incoherente?



Random laser emission from dye solutions containing nanoparticle

OPTICS LETTERS 36 (17), 2011

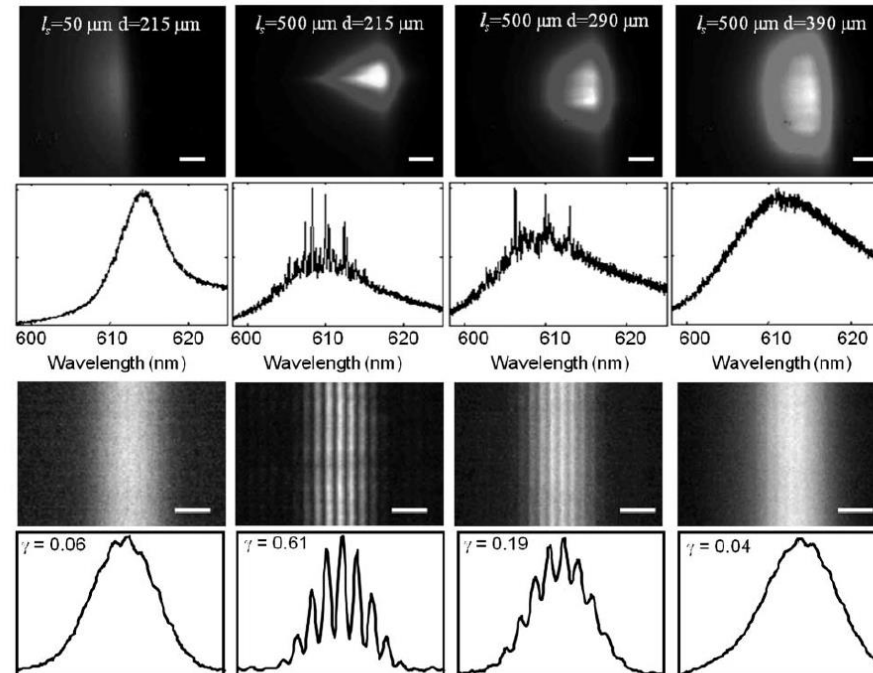
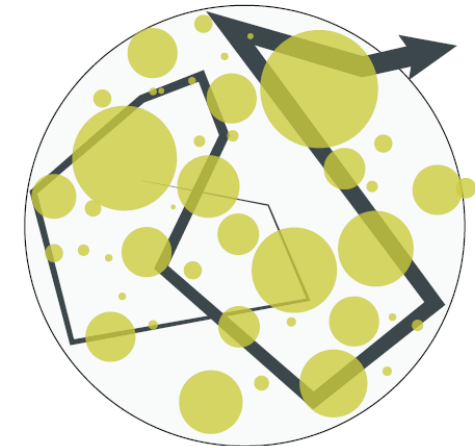


Fig. 1. Random laser characterization—each column corresponds to a sample/pump configuration defined by the scattering mean free path of the sample (l_s) and the pump spot diameter (d). Top row: Side-view images of the excitation volume (scale bar is $100 \mu\text{m}$). Second row: Normalized emission spectra for a single pulse taken at $2\times$ lasing threshold. Third row: Far-field interference fringe images (scale bar is $200 \mu\text{m}$). Fourth row: Normalized, average cross section of the interference fringes.

b Random lasing



Coherencia espacial o transversal

Láser de descarga de capilar $\lambda = 46.9 \text{ nm}$

Phys. Rev. A **63**, 033802 (2001)

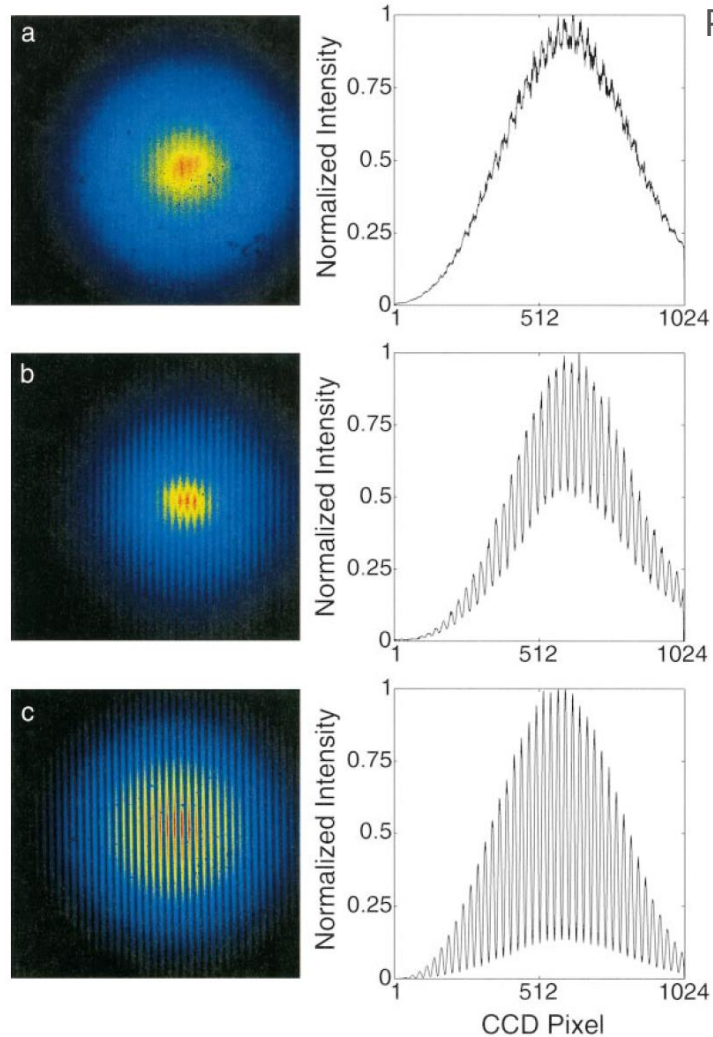


FIG. 2. (Color) Interferograms and their lineouts showing the coherence buildup of the laser beam with increasing capillary length. The capillary lengths are (a) 18, (b) 27, and (c) 36 μm . The lineouts are obtained by vertically integrating 15 pixels of the CCD images.
Prof. MG Capeluto

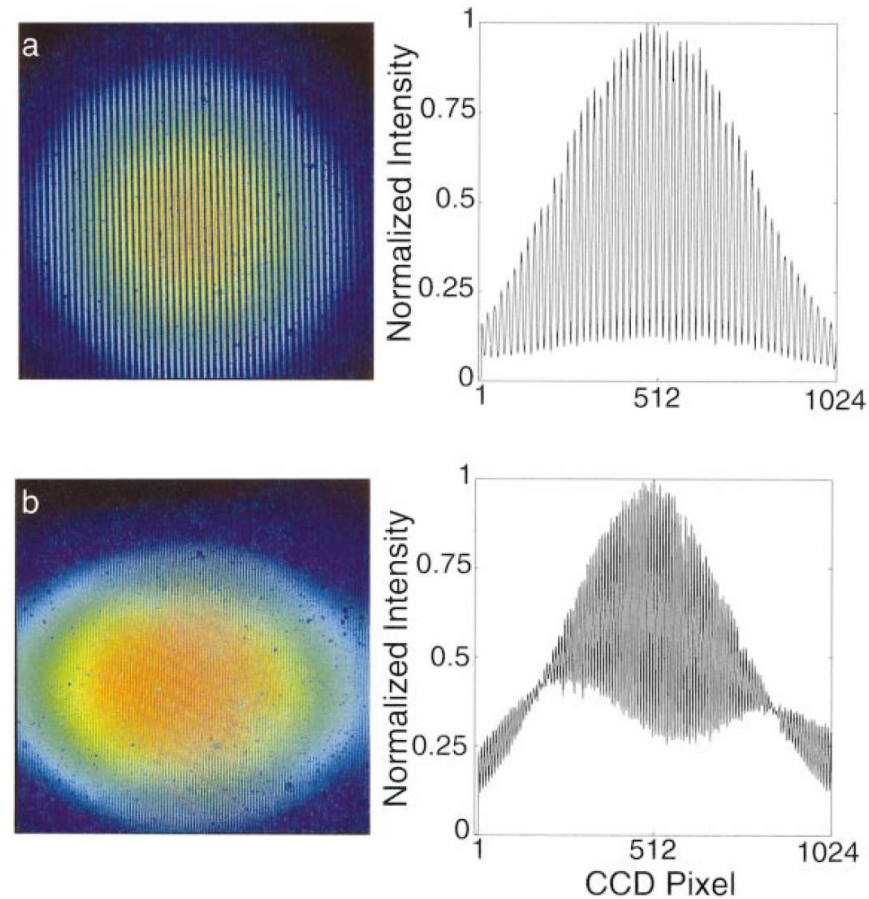
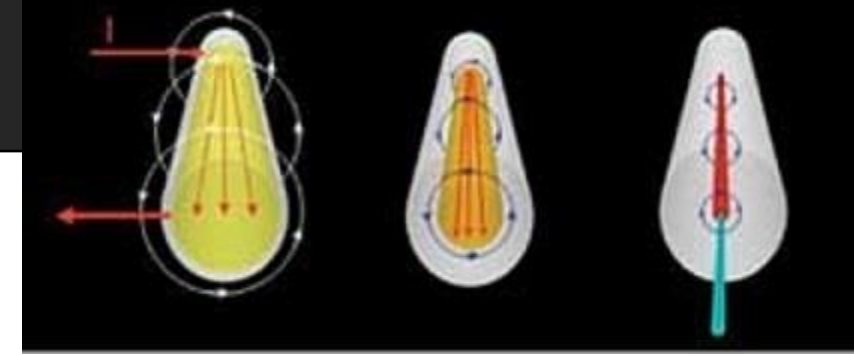
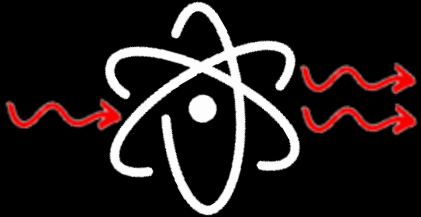


FIG. 3. (Color) Interferograms and their lineouts obtained with two pinholes located at 15.7 cm from the capillary exit. The pinhole separations are (a) 300 and (b) 680 μm .

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

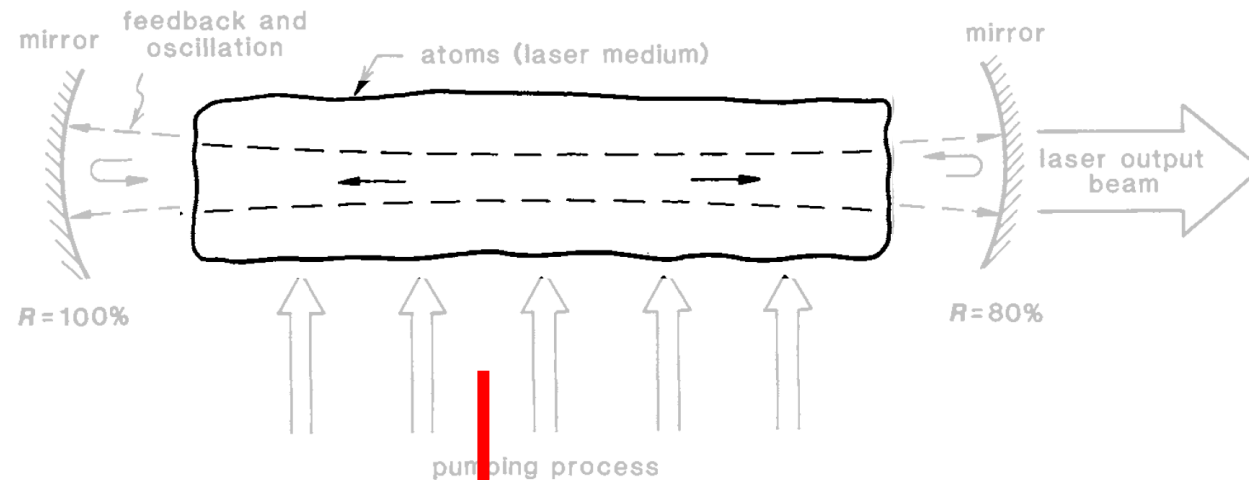
- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

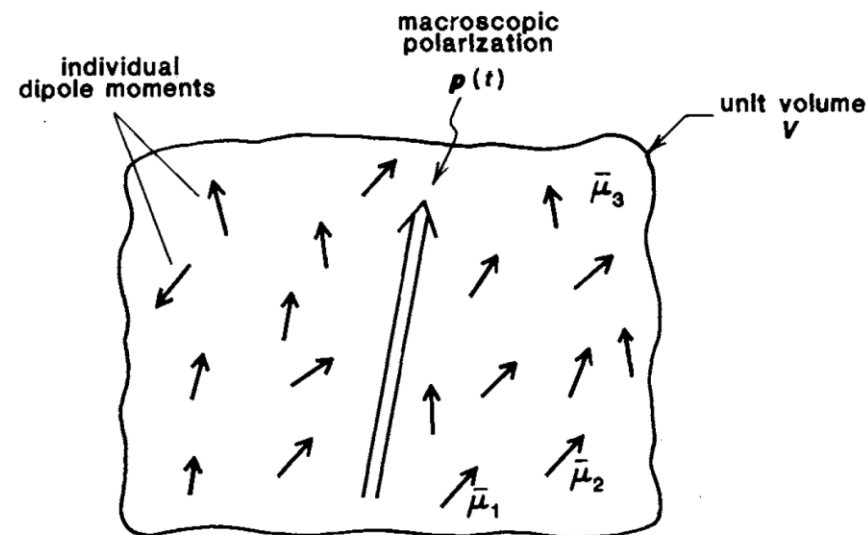
- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2026

Medios activos: Interacción de la luz con los materiales



Nos vamos a focalizar ahora en los medios activos



Consideramos interacciones dipolares en donde vamos a modelar a las transiciones por electrones oscilantes (dipolos eléctricos) clásicos

- Que le pasa a una onda que atraviesa un medio material
- Que pasa dentro del medio material cuando una onda lo atraviesa

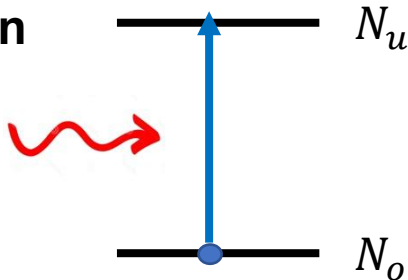
Niveles atómicos y transiciones radiativas



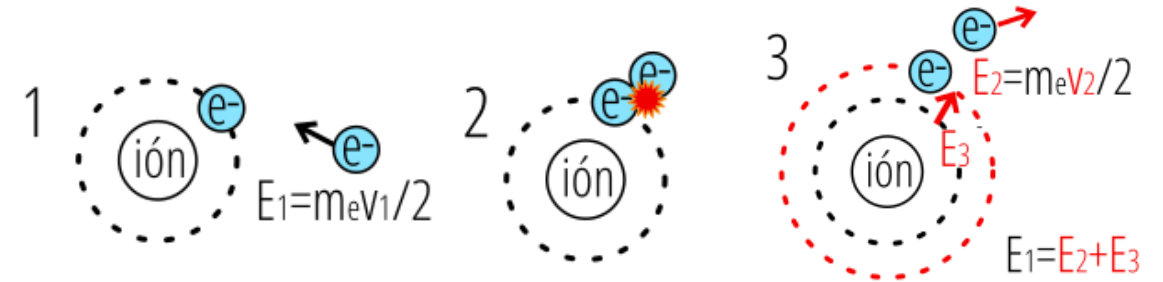
- Los niveles de energía de átomos (o iones o moléculas) están determinados por la mecánica cuántica
- Estos átomos pueden ser excitados a niveles altos de energía mediante diversos métodos. Por ejemplo:

Excitación óptica: láseres de estado sólido
(Nd:Yag, Ti:za)

absorción

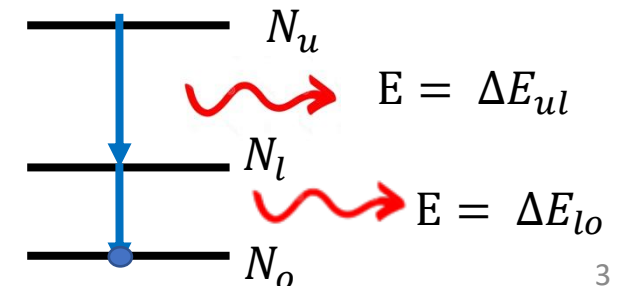
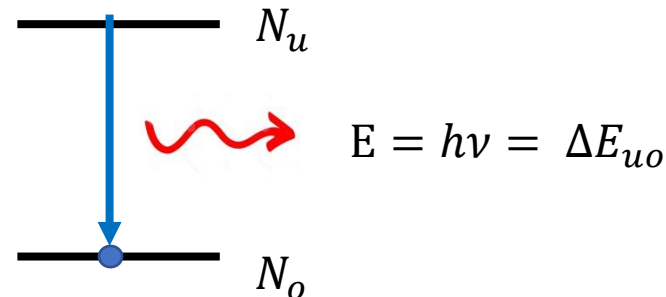


Excitación colisional con electrones:
láser de gases: He:Ne, He:Cd



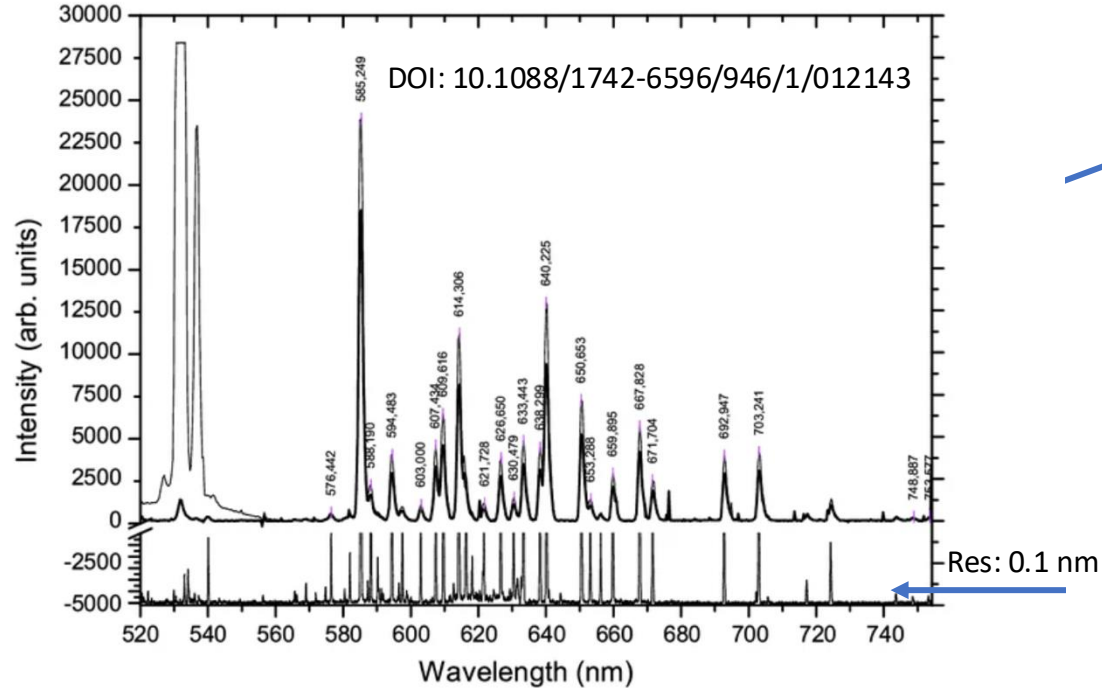
- Átomos en estados excitados decaen naturalmente al estado fundamental realizando transiciones a niveles de energía más bajos emitiendo radiación en frecuencias características relacionadas con la transición

Emisión espontánea



- Medios activos gaseosos: He: Ne (Ne es medio activo)
- Medios activos de estado sólido
 - Rubí: $\text{Cr: Al}_2\text{O}_3 \rightarrow$ Zafiro dopado con Cr^{3+}
 - Tierras raras: $\text{Nd: YAG} \rightarrow$ YAG dopado con Nd^{3+}

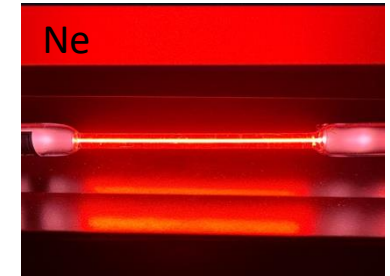
Ej. 1: Átomos de Helio



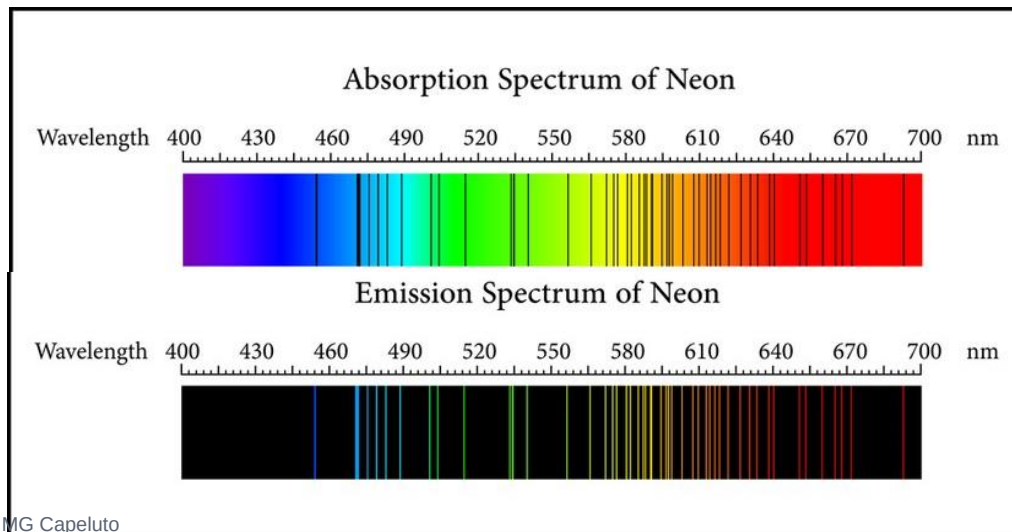
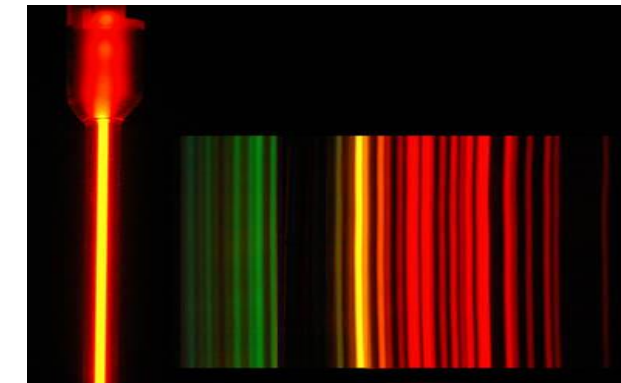
Espectro de emisión:

emisión espontánea o fluorescencia emitida durante el decaimiento de átomos excitados a niveles energéticos más bajos

Lámparas a ojo desnudo

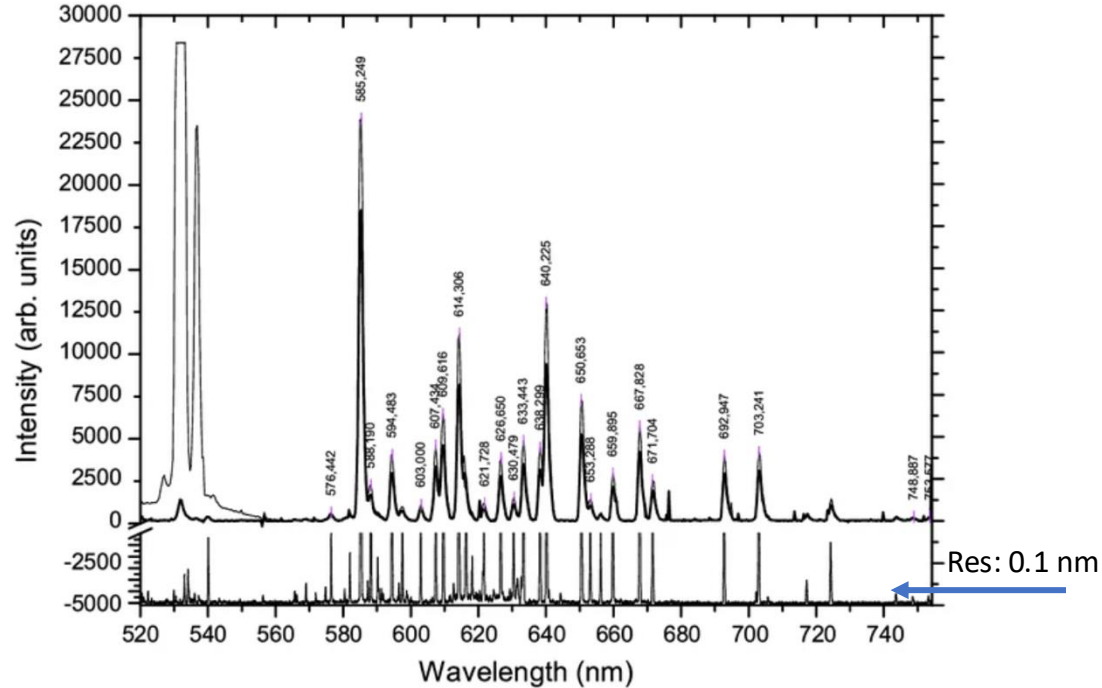


a través de una red de difracción



<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/atspect2.html>

Ej 1: Átomos de Helio



Medios láser gaseosos (Gases puros o mezclas)

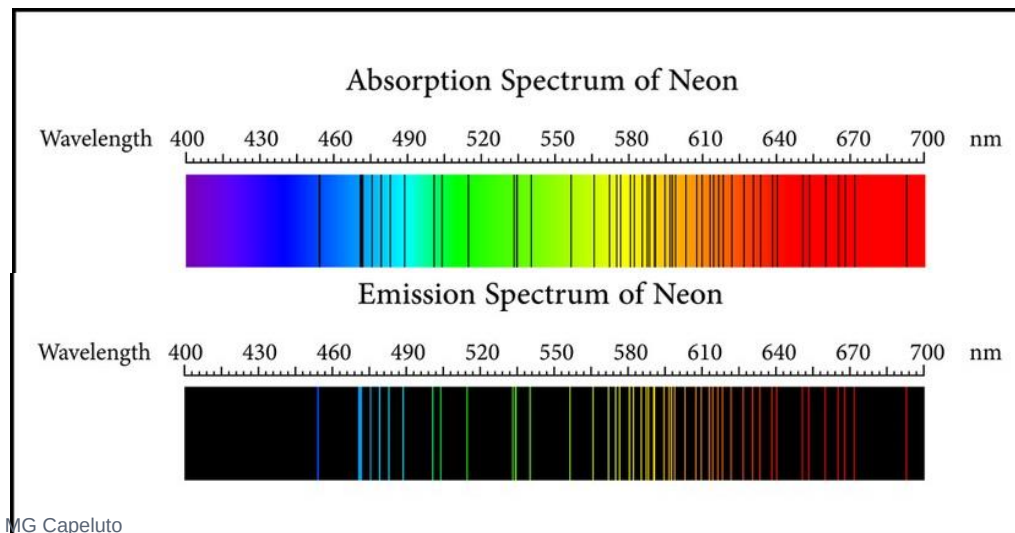
Presiones parciales de las especies

Neón: especie activa, Helio: Host

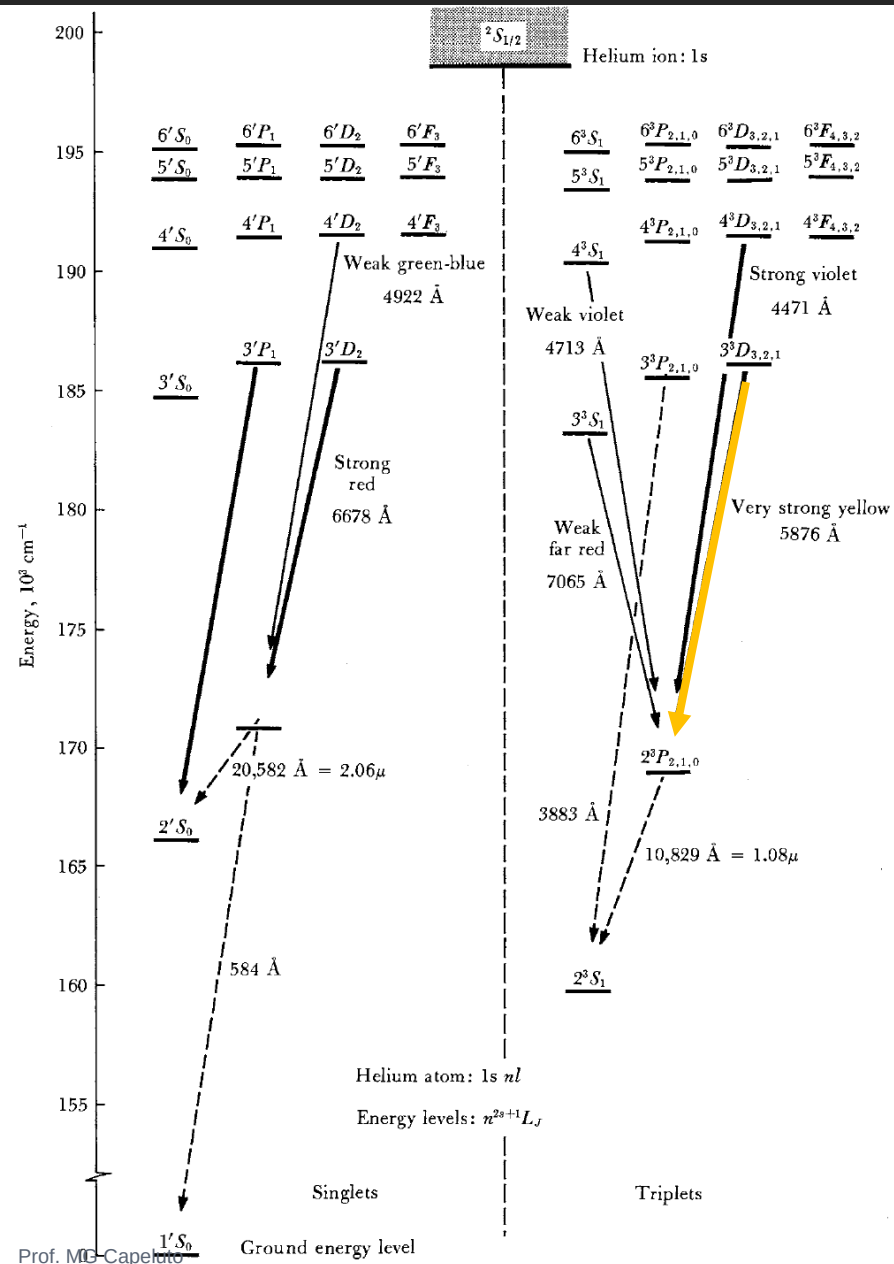
$$P_{Ne} = \frac{1}{6} P_{total}$$

Si la presión total es baja-> desprecio variación de índice de refracción con la longitud de onda

No puedo hacer esto para láseres de alta presión



Ej. 1: Átomos de Helio



Arduo trabajo de los espectroscopistas

- Encontrar todas las transiciones posibles (radiativas y no radiativas) en sistemas atómicos, moleculares y sólidos
- Clasificarlas

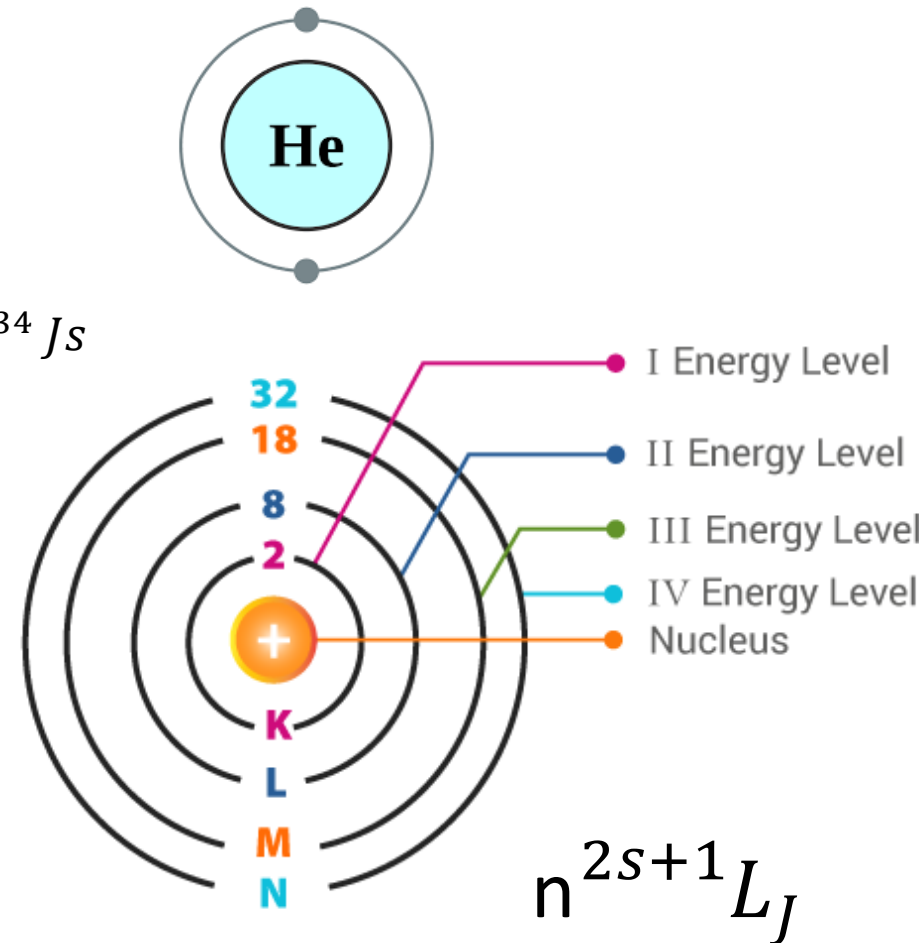
$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\lambda = 587.6 \text{ nm}$$

$$\Delta E = \frac{1240 \text{ eV}}{\lambda(\text{nm})} = 2.11 \text{ eV}$$

$$\nu_{21} = \omega_{21}/2\pi = 510 \text{ THz}$$



Ej. 2: Niveles de energía en sólidos: Rubí o zafiro rosa



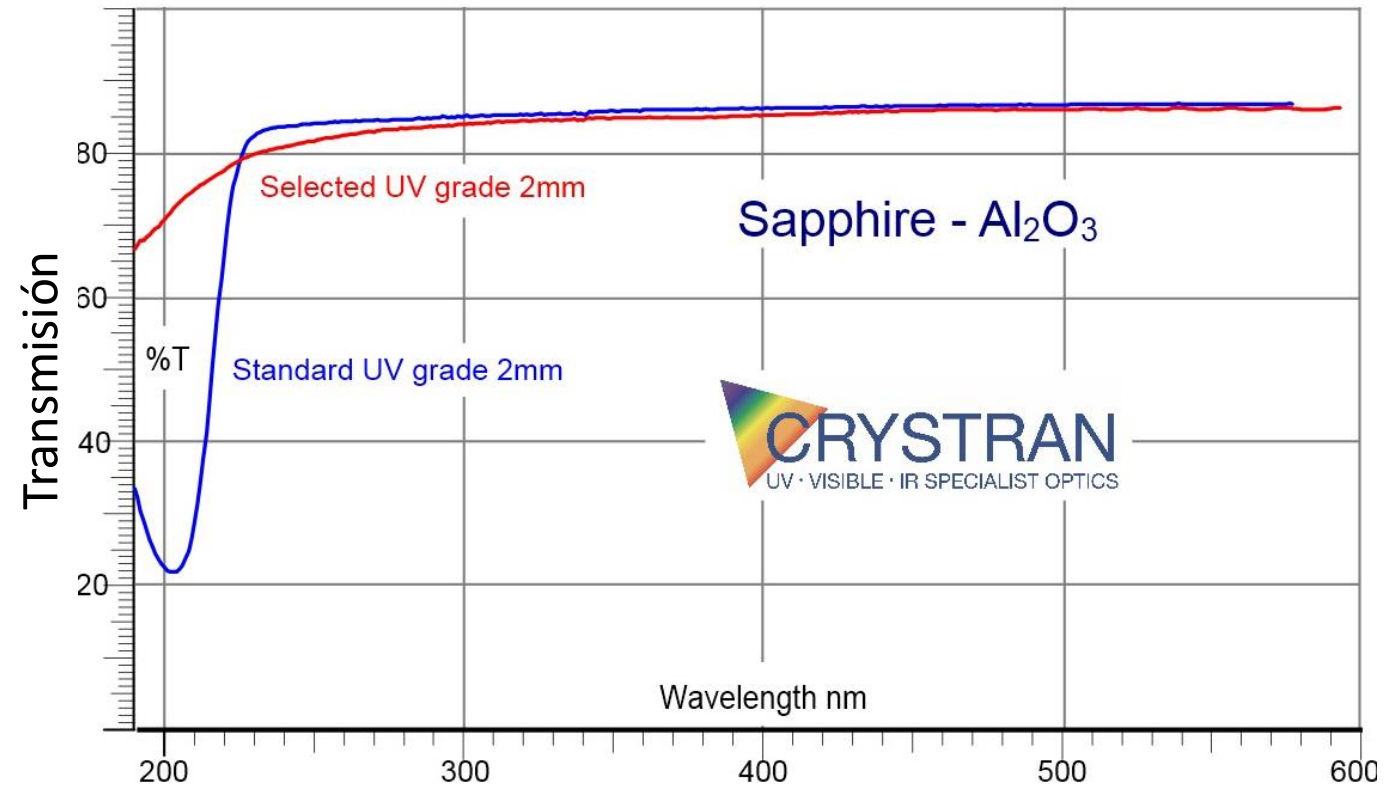
Host

Zafiro puro (Transparente)



Componente activa Cr^{3+}

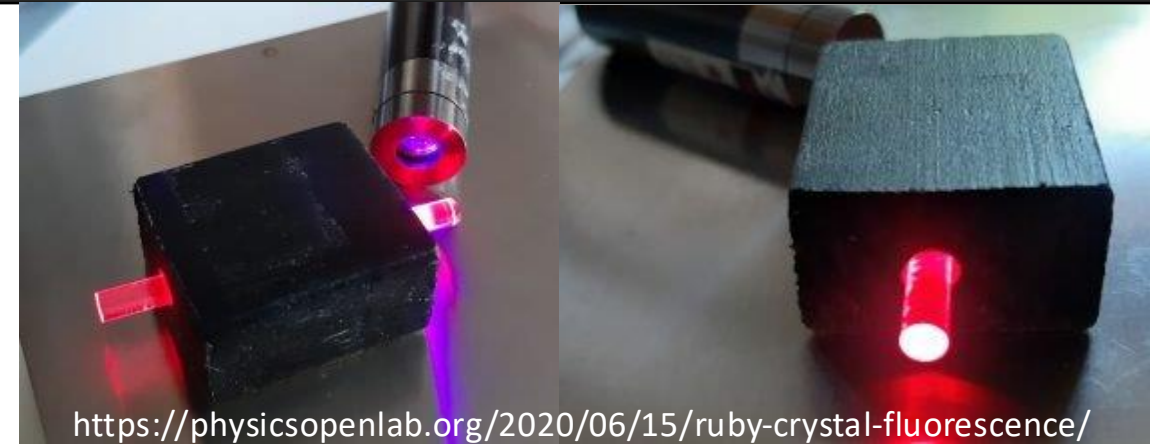
Rubi: Una pequeña porción de Al_2^{3+} es reemplazada por Cr^{3+}



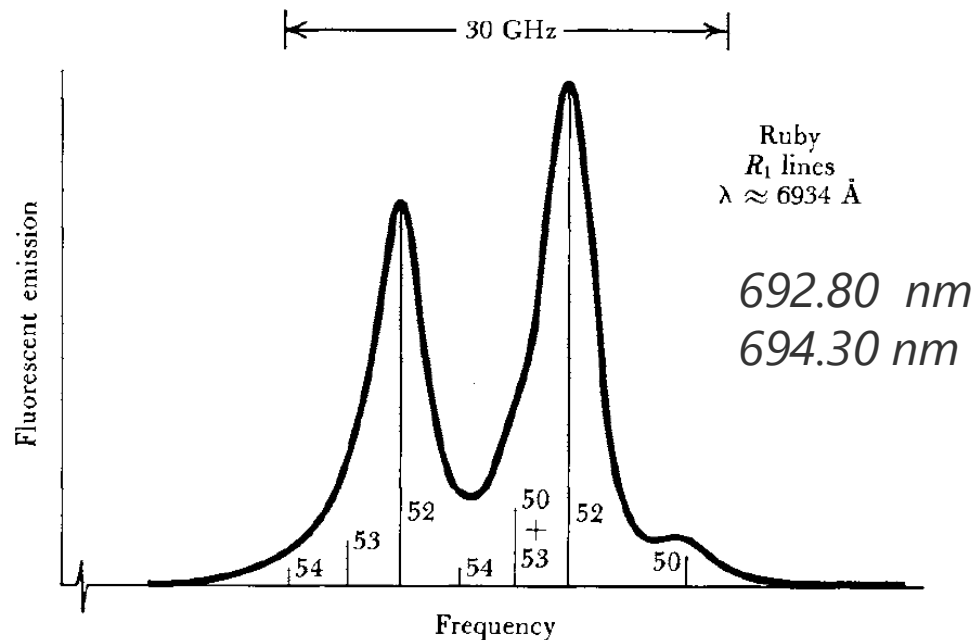
Ej. 2: Niveles de energía en sólidos: Rubí o zafiro rosa



Ilumino en el violeta/azul y mido en el espectro el doblete



Medición a $T=0K$ (sino ensanchamiento vibracional superpone las líneas)



energy (10^3 cm^{-1})

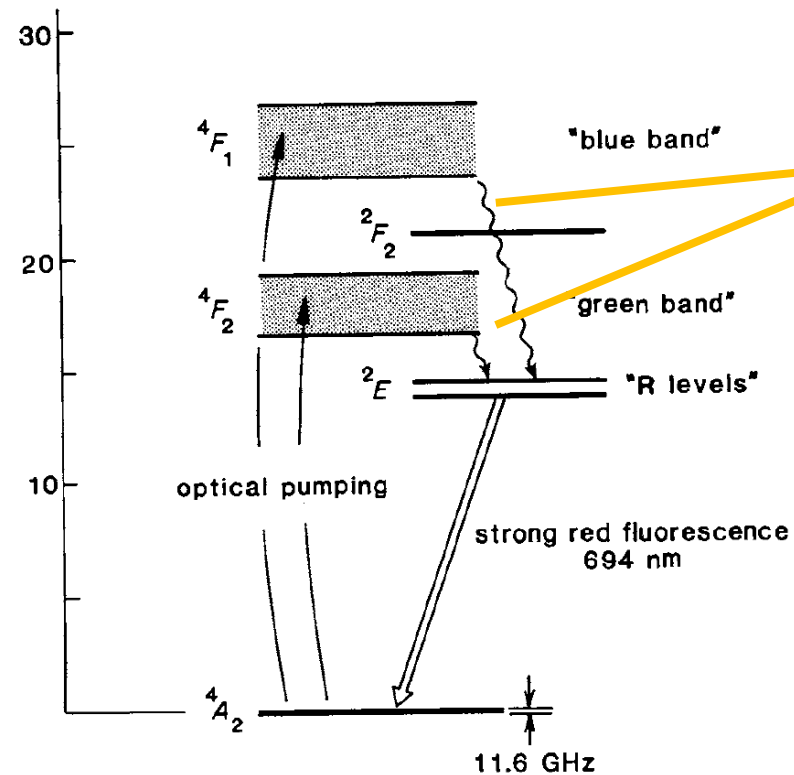


FIGURE 1.10
Quantum-mechanical energy levels of the Cr^{3+} ions in a ruby crystal.

Ej. 3: Niveles de energía en sólidos: Tierras raras



Period	Group	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1 H 1.008																	2 He 4.003
2		3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.81	6 C 12.01	7 N 14.01	8 O 16	9 F 19	10 Ne 20.18
3		11 Na 22.99	12 Mg 24.31											13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.07	17 Cl 35.45	18 Ar 39.95
4		19 K 39.10	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.88	23 V 50.94	24 Cr 52	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.47	28 Ni 58.69	29 Cu 63.55	30 Zn 65.39	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.9	36 Kr 83.8
5		37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc (98)	44 Ru 101.1	45 Rh 102.9	46 Pd 106.4	47 Ag 107.9	48 Cd 112.4	49 In 114.8	50 Sn 118.7	51 Sb 121.8	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.3
6		55 Cs 132.9	56 Ba 137.3	57 La 138.9	72 Hf 178.5	73 Ta 180.9	74 W 183.9	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.1	79 Au 197	80 Hg 200.5	81 Tl 204.4	82 Pb 207.2	83 Bi 209	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
7		87 Fr (223)	88 Ra (226)	89 Ac (227)	104 Rf (257)	105 Db (260)	106 Sg (263)	107 Bh (262)	108 Hs (265)	109 Mt (266)	110 Ds (271)	111 Rg (272)	112 Uub (285)	113 Uut (284)	114 Uuq (289)	115 Uup (288)	116 Uuh (292)	117 Uus 0	118 Uuo 0
	6			58 Ce 140.1	59 Pr 140.9	60 Nd 144.2	61 Pm (147)	62 Sm 150.4	63 Eu 152	64 Gd 157.3	65 Tb 158.9	66 Dy 162.5	67 Ho 164.9	68 Er 167.3	69 Tm 168.9	70 Yb 173	71 Lu 175		
	7			90 Th 232	91 Pa (231)	92 U (238)	93 Np (237)	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (249)	99 Es (254)	100 Fm (253)	101 Md (256)	102 No (254)	103 Lr (257)		

Element		Z	A	Electron Config
Scandium	Sc	21	45	$(3d4s)^3$
Yttrium	Y	39	89	$(4d5s)^3$
Lanthanum	La	57	139	$4f^0 (5d6s)^3$
Cerium	Ce	58	140	$4f^1 (5d6s)^3$
Praseodymium	Pr	59	141	$4f^2 (5d6s)^3$
Neodymium	Nd	60	144	$4f^3 (5d6s)^3$
Promethium	Pm	61	145	$4f^4 (5d6s)^3$
Samarium	Sm	62	150	$4f^5 (5d6s)^3$
Europium	Eu	63	152	$4f^7 (5d6s)^2$
Gadolinium	Gd	64	157	$4f^7 (5d6s)^3$
Terbium	Tb	65	159	$4f^8 (5d6s)^3$
Dysprosium	Dy	66	163	$4f^9 (5d6s)^3$
Holmium	Ho	67	165	$4f^{10} (5d6s)^3$
Erbium	Er	68	167	$4f^{11} (5d6s)^3$
Thulium	Tm	69	169	$4f^{12} (5d6s)^3$
Ytterbium	Yb	70	173	$4f^{14} (5d6s)^2$
Lutetium	Lu	71	175	$4f^{14} (5d6s)^3$

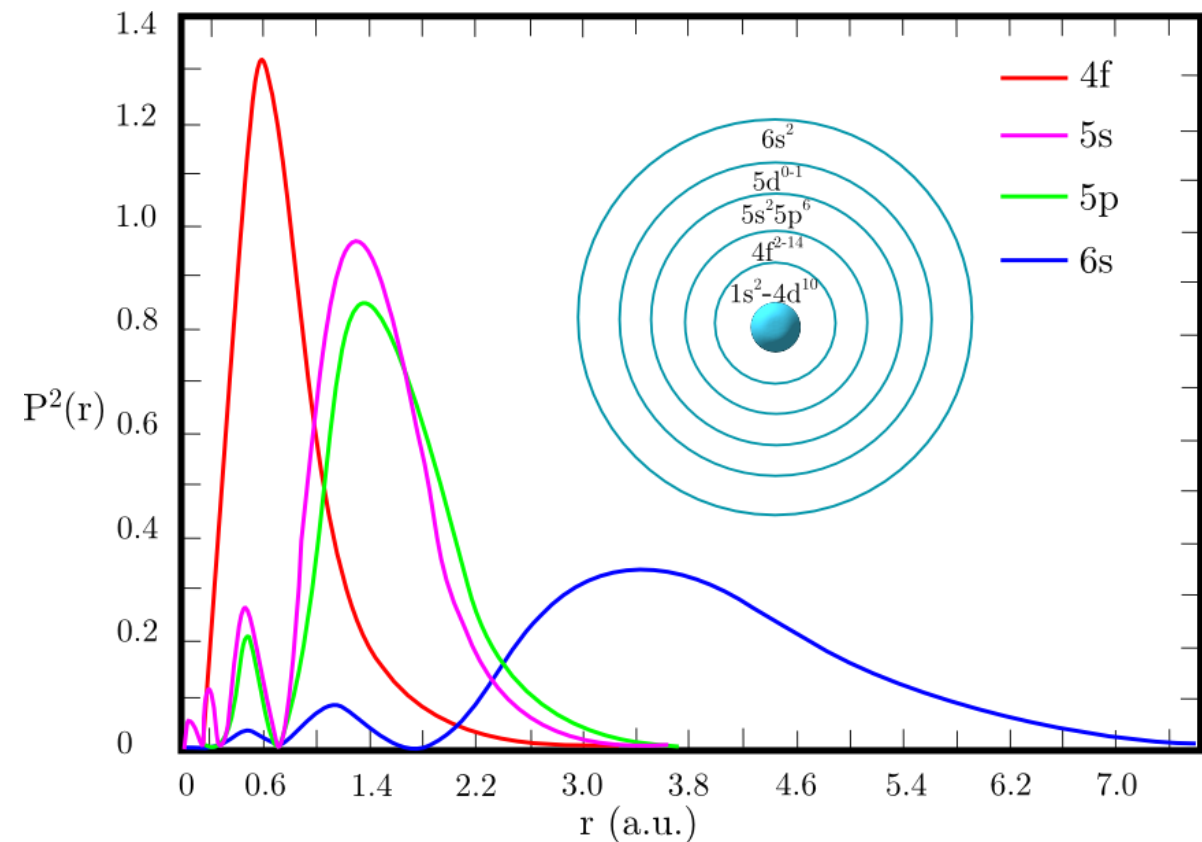
Ej. 3: Niveles de energía en sólidos: Tierras raras



- Electrones internos son apantallados por los electrones de las capas externas
- Las transiciones 4f están relativamente poco afectadas por el material host



Distribución de probabilidad radial para el ion Gd⁺



Ej. 3: Niveles de energía en sólidos: Tierras raras

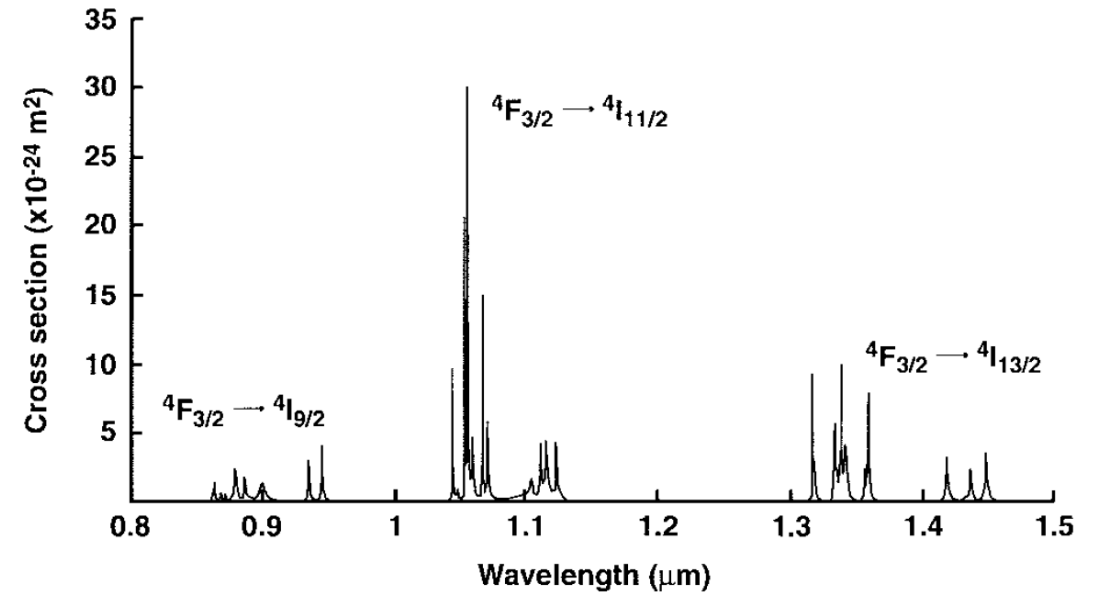
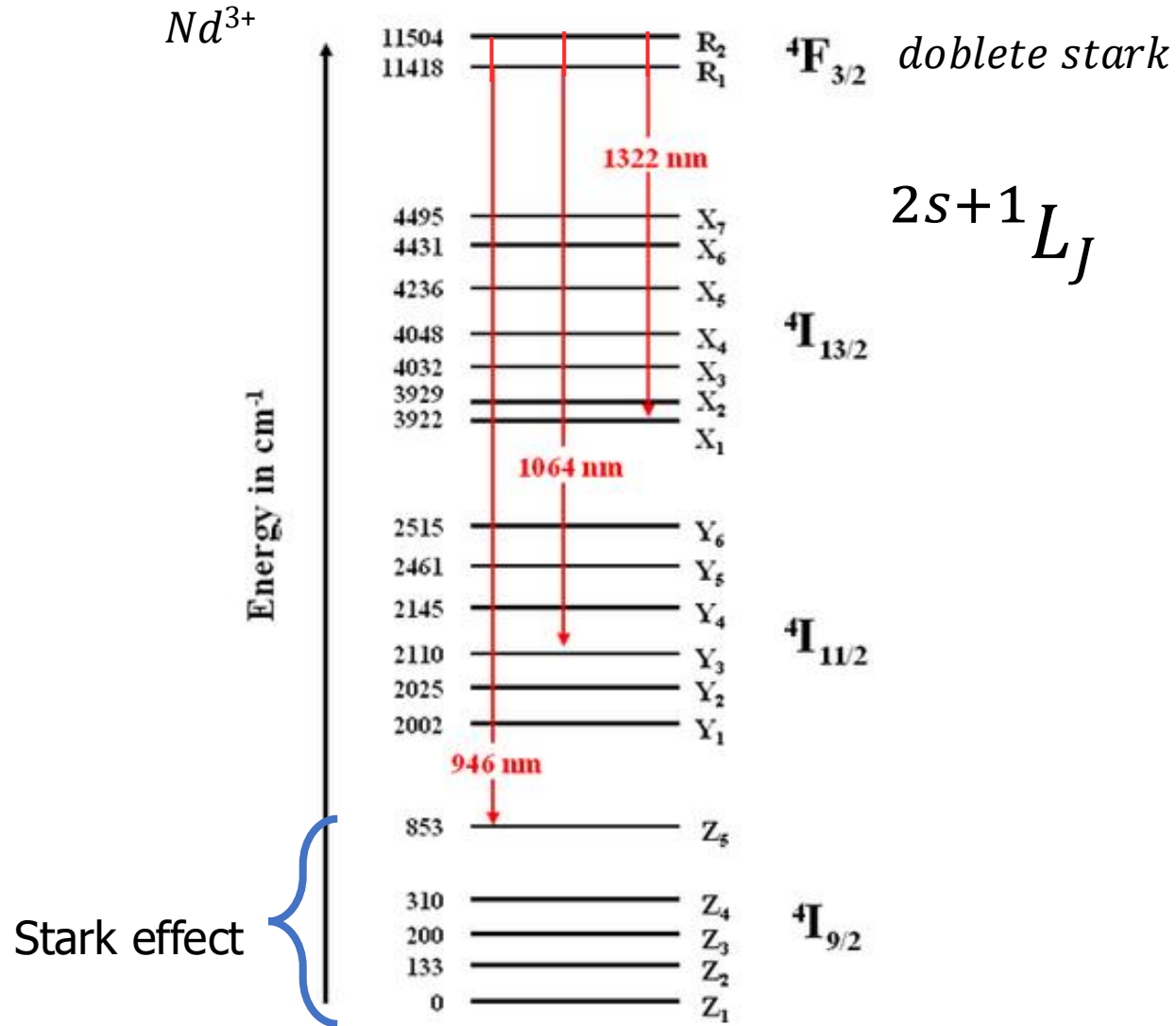


Fig. 2. Nd:YAG fluorescence spectrum.

IEEE JOURNAL OF QUANTUM ELECTRONICS, VOL. 35, NO. 1, JANUARY 1999

¿Qué tipos de transiciones pueden aparecer en sistemas atómicos, moleculares y en medios condensados como sólidos, líquidos y gases?

¿Qué determina el ancho de una línea espectral? ¿Por qué distintas líneas espectrales pueden tener anchos diferentes?

¿Cualquier transición óptica puede dar lugar a acción láser, o hay condiciones adicionales que deben cumplirse?

Vemos un patrón de posibles transiciones

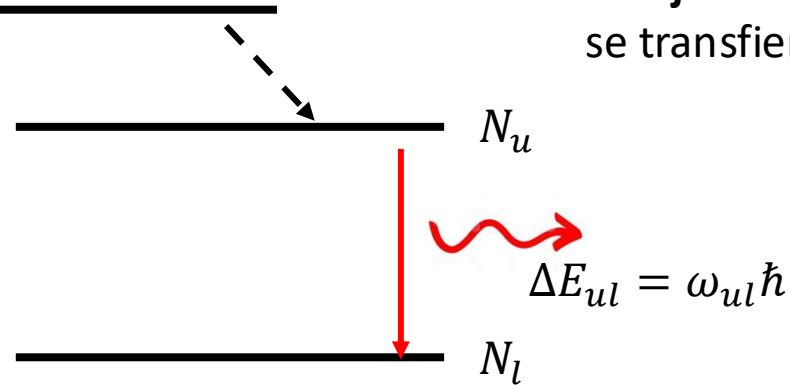


absorción



Bombeo óptico:

El material debe absorber fotones para lograr excitar a los átomos a niveles de energía suficientemente altos



Relajación no radiativa: La energía de la transición se transfiere a la red cristalina (fonones o calor)

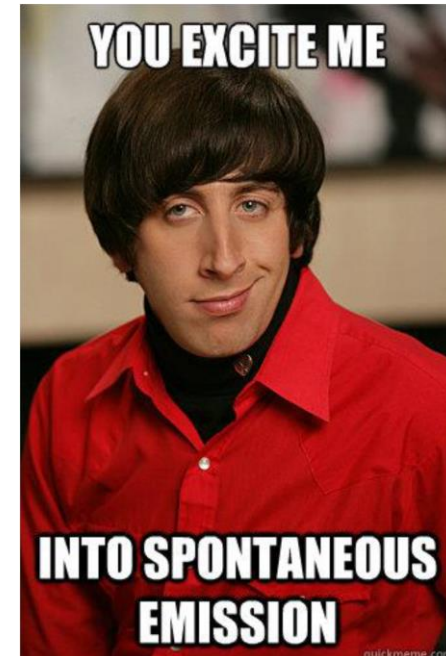
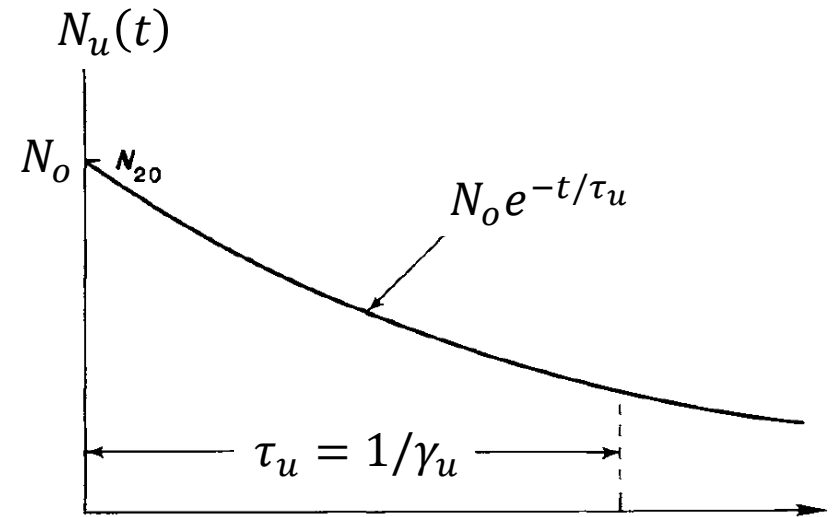
Relajación radiativa

Relajación atómica emitiendo fluorescencia (emisión espontánea)

Al apagar el bombeo:

$$\frac{dN_u(t)}{dt} = -\gamma_u N_u(t) = -\frac{1}{\tau_u} N_u(t)$$

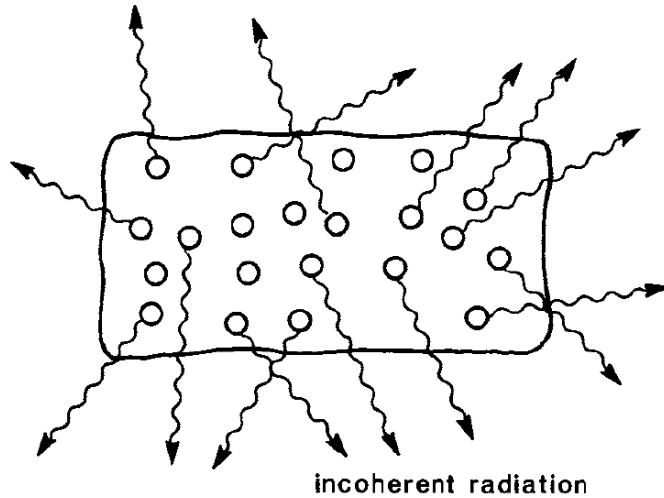
$$N_u(t) = N_o e^{-t/\tau_u}$$



Transiciones espontáneas y transiciones estimuladas

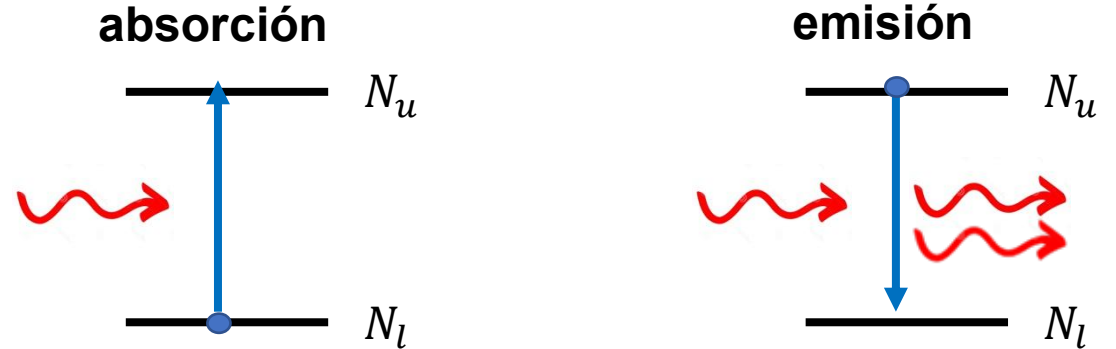


Emisión espontánea (o fluorescencia) causada por relajación espontánea



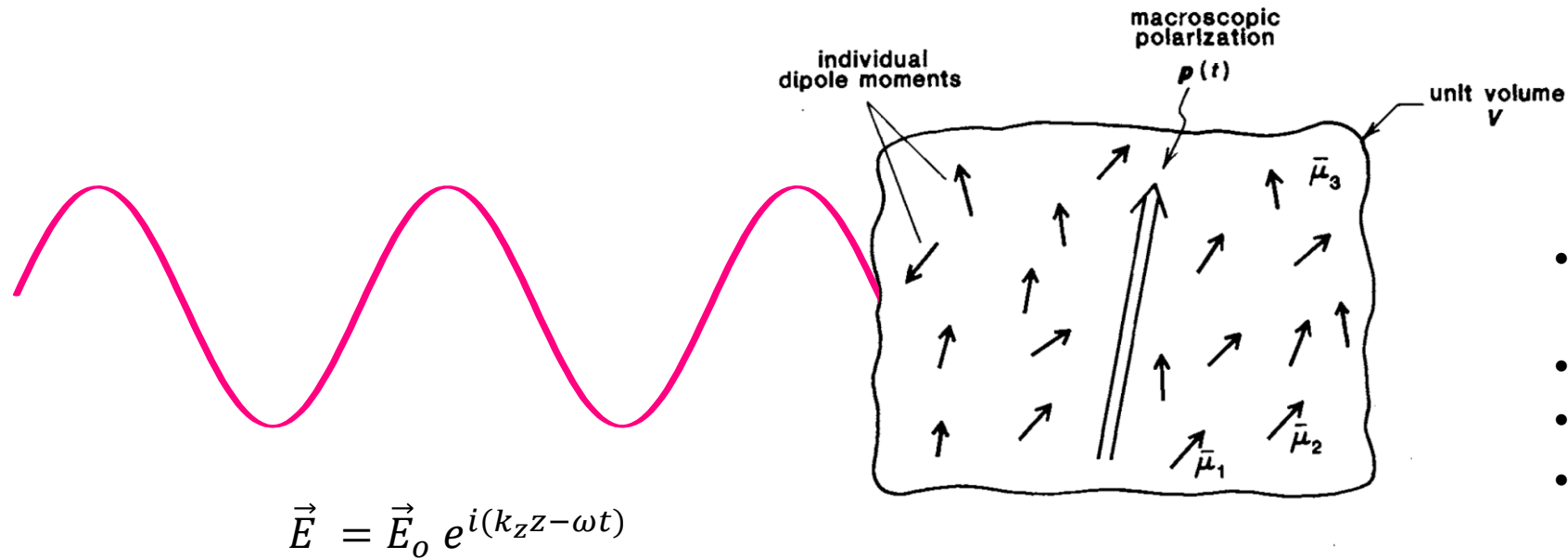
- Cada átomo emite como una antena dipolar eléctrica
- Cada átomo es independiente de los otros (con fases y direcciones aleatorias)
- Limitado espectralmente al ancho de línea de la transición atómica

Transiciones estimuladas (absorción y emisión)



- Un campo externo controla la transición
- Cada átomo actúa como una antena (dipolar eléctrica) pasiva resonante, que se pone a oscilar por la señal aplicada
- El movimiento interno del átomo no es aleatorio, sino que está controlado por el campo externo (y por lo tanto coherente)

Ondas propagándose en un medio láser



- Niveles atómicos definidos por la mecánica cuántica
- Campos clásicos
- Átomos se comportan como dipolos
- Interacción dipolar $U_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{E}$

Ondas electromagnéticas en medios materiales



Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{M}$$

$\nabla \times (4)$ y eliminando H

$\vec{M} = 0$ en todos los medios ópticos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_o \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Como varían las Corrientes inducidas

En metales explica

- Gran absorción y reflectividad

Como varia la polarización local del material, producida por dipolos inducidos o permanentes en materiales dieléctricos

Explica fenómenos ópticos como

- Dispersión
- Absorción
- Refracción
- Actividad óptica

Nota: En ausencia de cargas $\nabla \cdot \vec{D} = 0 = \epsilon_o \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}$
En medio LIH $\nabla \cdot \vec{P} = 0$ entonces $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

Medio activo o de ganancia laser



Caso más sencillo: Medio LIH
(vidrios amorfos o gases)

- Sólidos cristalinos o amorfos dopados
- Soluciones de moléculas de colorante disueltas en solventes
- Gases (puros o mezclas)

En condiciones normales (campos eléctricos moderados no ionizantes) los materiales no son conductores por lo que $\vec{j} = 0$

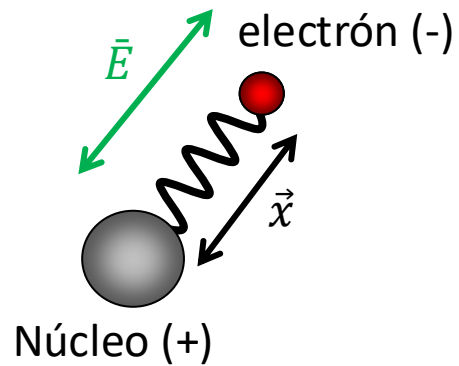
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Recordar que en LIH

$$v = \left(\frac{1}{\mu\epsilon} \right)^{1/2} \\ = \frac{c}{n}$$

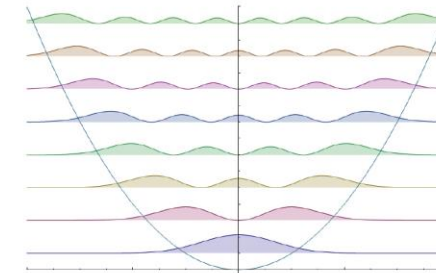
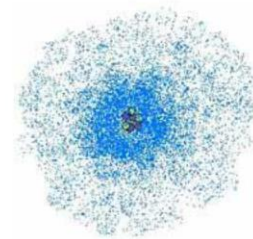
Buscamos encontrar la respuesta de estos materiales a las ondas electromagnéticas, buscando la dependencia en frecuencia de las propiedades de absorción y refracción (y más adelante la ganancia)

Modelo del electrón oscilante clásico (CEO-Classical electron oscillator) o de Lorentz



- Núcleo mucho más pesado que electrones, entonces se los considera fijos en el espacio y los electrones ligados al núcleo mediante fuerzas elásticas

Sabemos que...fuerzas elásticas producen resonancias... ¿Que significan?

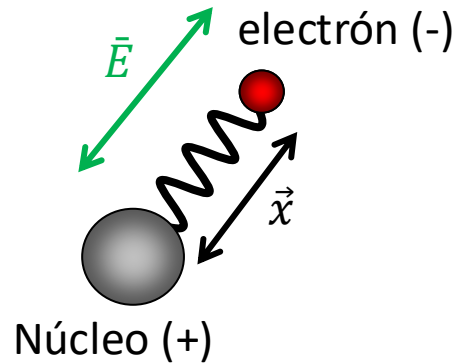


$$\omega_a^2 \equiv K/m.$$

$$\omega_{21} \equiv (E_2 - E_1)/\hbar \quad \text{Real atoms}$$

Las transiciones producidas por interacción con la luz son dipolares eléctricas:
Transiciones entre dos niveles energía $\rightarrow$ la energía de interacción es $-\vec{p} \cdot \vec{E}$

Modelo del electrón oscilante clásico



En presencia de campo eléctrico, los electrones se desplazan induciéndose un momento dipolar eléctrico

$\vec{x}$ desplazamiento de la posición de equilibrio

$$\vec{\mu}_d = -e\vec{x}$$



$$\vec{P} = N\vec{\mu}_d$$

Si conozco la polarización, puedo hallar como se comporta un campo externo en un material

Campo eléctrico estático, en equilibrio, la fuerza eléctrica se compensa con la fuerza restitutiva

$$m\ddot{x} = -e\vec{E} - k\vec{x} = 0$$

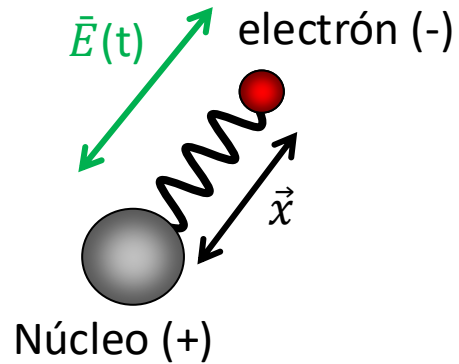
$$-e\vec{E} = k\vec{x} \qquad \vec{\mu}_d = (-e) \left(-\frac{e\vec{E}}{k} \right) = \frac{e^2\vec{E}}{k}$$

$$\text{La polarización macroscópica } \vec{P} = N\vec{\mu}_d = \frac{Ne^2}{k} \vec{E}$$

Modelo del electrón oscilante clásico



Campo eléctrico variable en el tiempo



$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + k\vec{x} = -e\vec{E}$$

Inercia

Fuerza eléctrica

Amortiguamiento

Fuerza restitutiva

- Una vez apagado el campo, la polarización decae a una tasa dada por γ

$\tau \sim \frac{1}{\gamma}$ tiempo de decaimiento

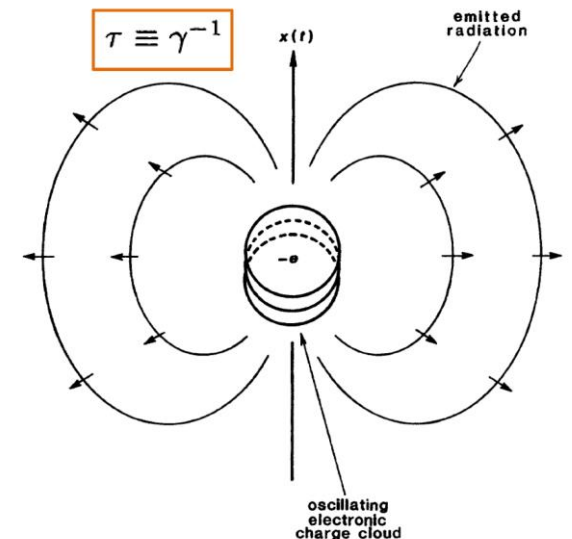
¿Por qué decae? (pierde energía)

Procesos radiativos (γ_{rad})

- radiación emitida por una carga acelerada,

Procesos no radiativos (γ_{norad})

- colisiones,
- acoplamiento con vibraciones de la red,
- otros mecanismos disipativos fenomenológicos.



$$\gamma = \gamma_{rad} + \gamma_{norad}$$

Modelo del electrón oscilante clásico



Campo eléctrico variable en el tiempo

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + k\vec{x} = -e\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + k)\vec{x} = -e\vec{E}$$

$$\vec{P} = N\vec{p} = -eN\vec{x} = \left(\frac{e^2 N}{(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + k)} \right) \vec{E} = \left(\frac{\frac{Ne^2}{m}}{(-\omega^2 - i\omega \gamma + \omega_o^2)} \right) \vec{E} = N \alpha(\omega) \vec{E} = \epsilon_o \chi(\omega) \vec{E}$$

Polarizabilidad atómica $\alpha(\omega)$

$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

$\chi(\omega) = \frac{N\alpha(\omega)}{\epsilon_o}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}(\omega = 0) = \frac{e^2 N}{k} \vec{E} \quad (\text{caso campo estático}) \\ \omega_o, \gamma \text{ son parámetros del modelo que caracterizan la respuesta del material} \end{array} \right.$$

Modelo del electrón oscilante clásico



$$\vec{P} = \left(\frac{e^2 N / m}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \gamma)} \right) \vec{E} = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} \longrightarrow \chi(\omega) = \frac{e^2 N}{m \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \gamma)} \quad \omega_p^2 = \frac{e^2 N}{m \epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \chi(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (1 + \chi(\omega)) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} (1 + \chi(\omega)) = \frac{\bar{n}^2}{c^2}$$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\tilde{K}_z z - \omega t)}$ es solución de la ecuación de ondas si

$$\tilde{K}_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

toman valores complejos

$\bar{n} = n + i\kappa$ índice de refracción complejo

Modelo del electrón oscilante clásico



$$\tilde{K}_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2 \frac{\bar{n}^2}{c^2}$$

$$\tilde{K}_z = k_z + i\alpha_E = \frac{\omega}{c} \bar{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa)$$

Dado que $\tilde{K}_z = \tilde{K}_z(\omega)$, las constantes ópticas n y κ (que se reportan experimentalmente) dependen de ω

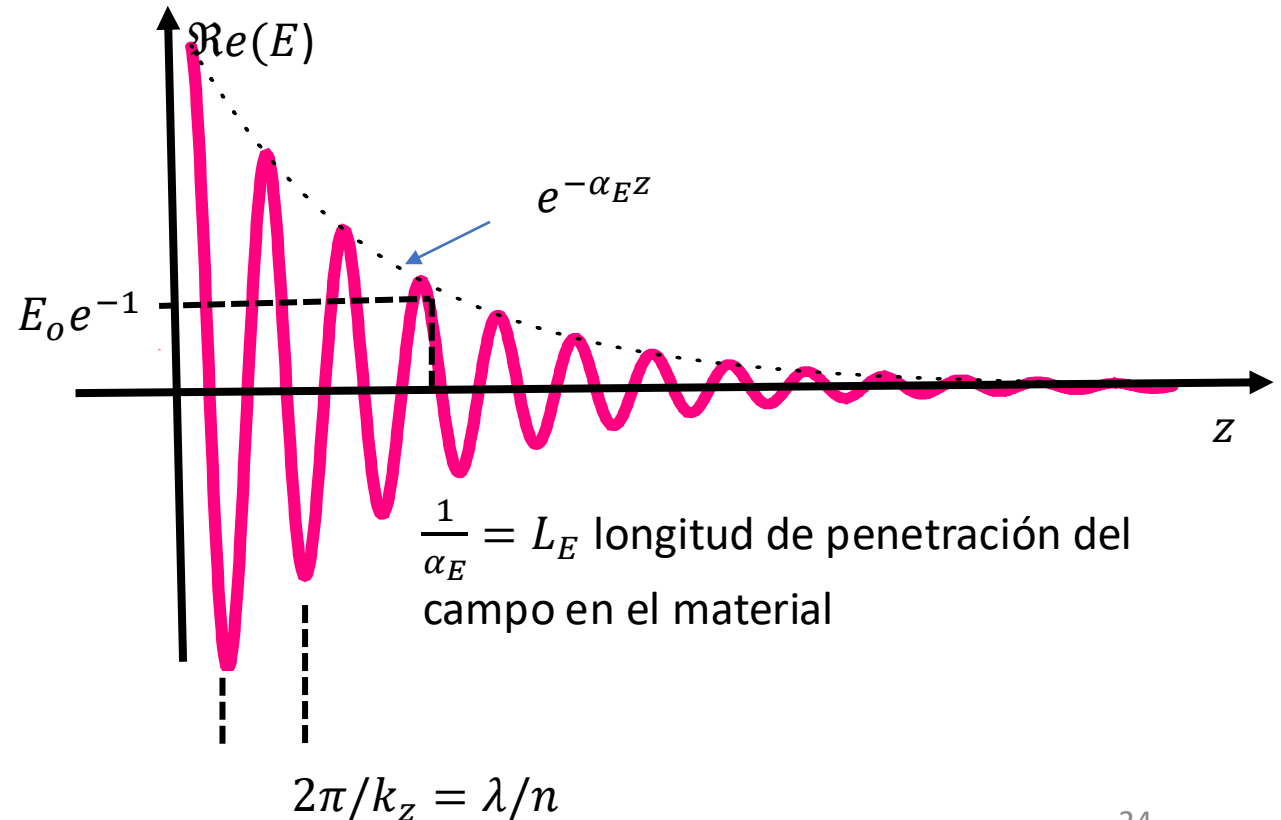
$$k_z = \frac{\omega}{c} n = n k_z^o, \quad \alpha_E = \frac{\omega}{c} \kappa$$

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\tilde{K}_z z - \omega t)} = \vec{E}_o e^{-\alpha_E z} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

α_E extinción del campo eléctrico
 k_z número de onda en el medio

$$\Phi(z, t) = k_z z - \omega t \rightarrow \text{fase}$$

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow v_{fase} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{n}$$



Modelo del electrón oscilante clásico

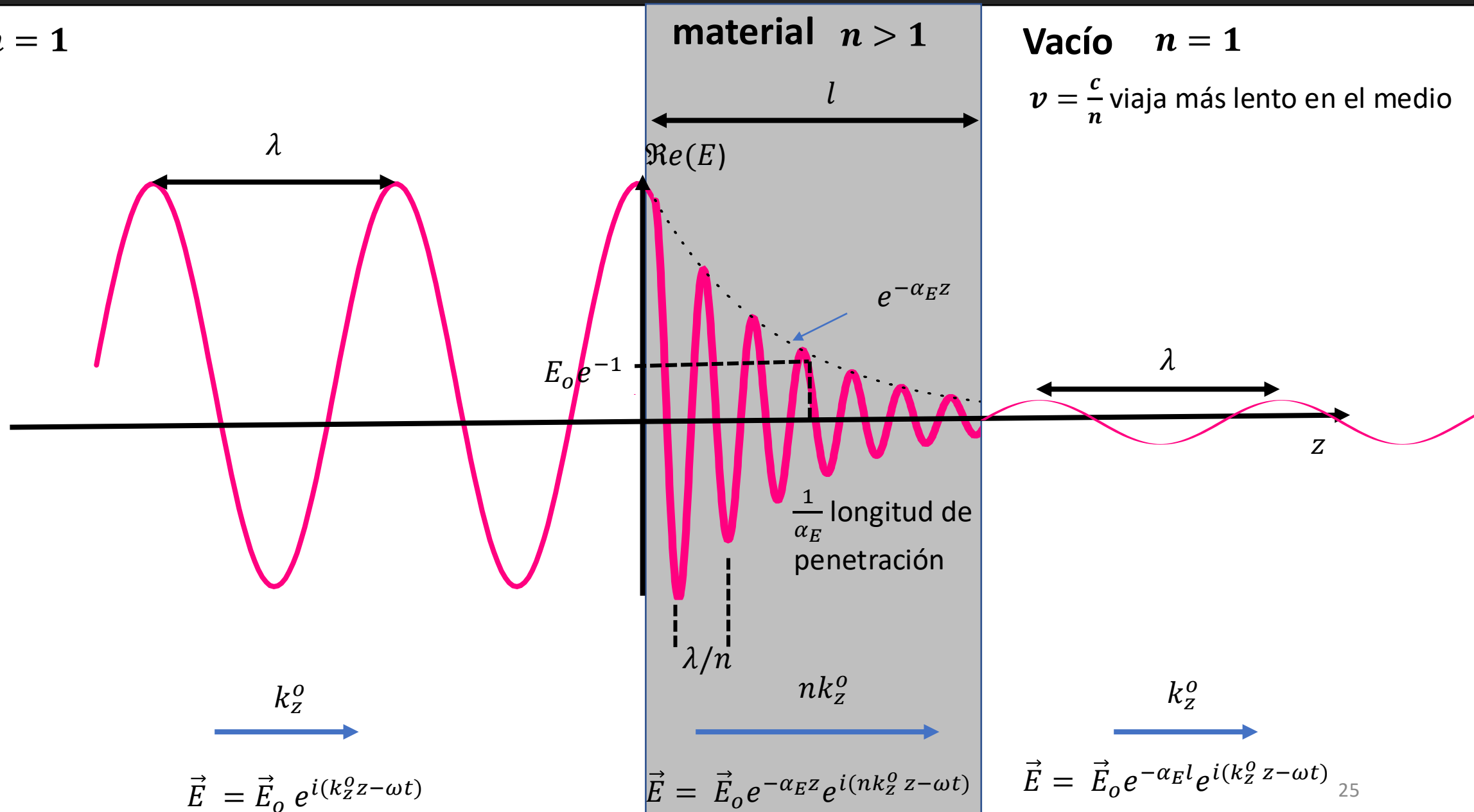


Vacío $n = 1$

material $n > 1$

Vacío $n = 1$

$v = \frac{c}{n}$ viaja más lento en el medio



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\tilde{K}_z z - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-\alpha_E z} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$I \propto \vec{E} \vec{E}^* = |\vec{E}_0|^2 e^{-2\alpha_E z} \quad (\text{ley Beer})$$

$\alpha = 2\alpha_E$ coeficiente de absorción (para energía)

$L = 1/\alpha$ longitud de penetración

El modelo nos da dos propiedades ópticas de los materiales:

- Dispersión $\rightarrow n$
- Absorción $\rightarrow \alpha_E = \frac{\omega}{c} \kappa$

Ambas pueden medirse experimentalmente en función de la frecuencia ω

Modelo del electrón oscilante clásico



Dependencia funcional de las constantes ópticas n y k (las que se reportan experimentalmente) con la ω

$$\tilde{K}_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{n}^2 = \omega^2 (1 + \chi(\omega)) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \omega_p^2 \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega \gamma)} \right) \quad \omega_p^2 = \frac{e^2 N}{m \epsilon_o}$$

$$\bar{n}^2 = (n + i\kappa)^2 = (\textcolor{brown}{n}^2 - \textcolor{brown}{\kappa}^2) + \textcolor{blue}{2in}\kappa = \frac{c^2}{\omega^2} \tilde{K}_z^2$$

$$\textcolor{brown}{n}^2 - \textcolor{brown}{\kappa}^2 = 1 + \omega_p^2 \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2}$$

$$\textcolor{blue}{2n}\kappa = \omega_p^2 \frac{\omega \gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2}$$

Cerca de la resonancia

$$\omega \sim \omega_o \quad \omega_o^2 - \omega^2 = (\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) \sim (\omega - \omega_o)(2\omega_o)$$

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_o} \frac{(\omega - \omega_o)}{(\omega - \omega_o)^2 + (\gamma/2)^2}$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2}{8\omega_o} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_o)^2 + (\gamma/2)^2}$$

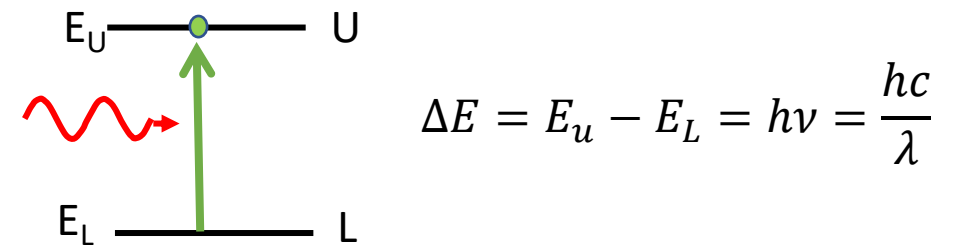
Modelo del electrón oscilante clásico



κ relacionado con la absorción

$$\alpha = 2\alpha_E = 2\frac{\omega}{c}\kappa = \frac{4\pi}{\lambda}\kappa$$

$\omega = \omega_o$ la absorción resonante es un proceso estimulado

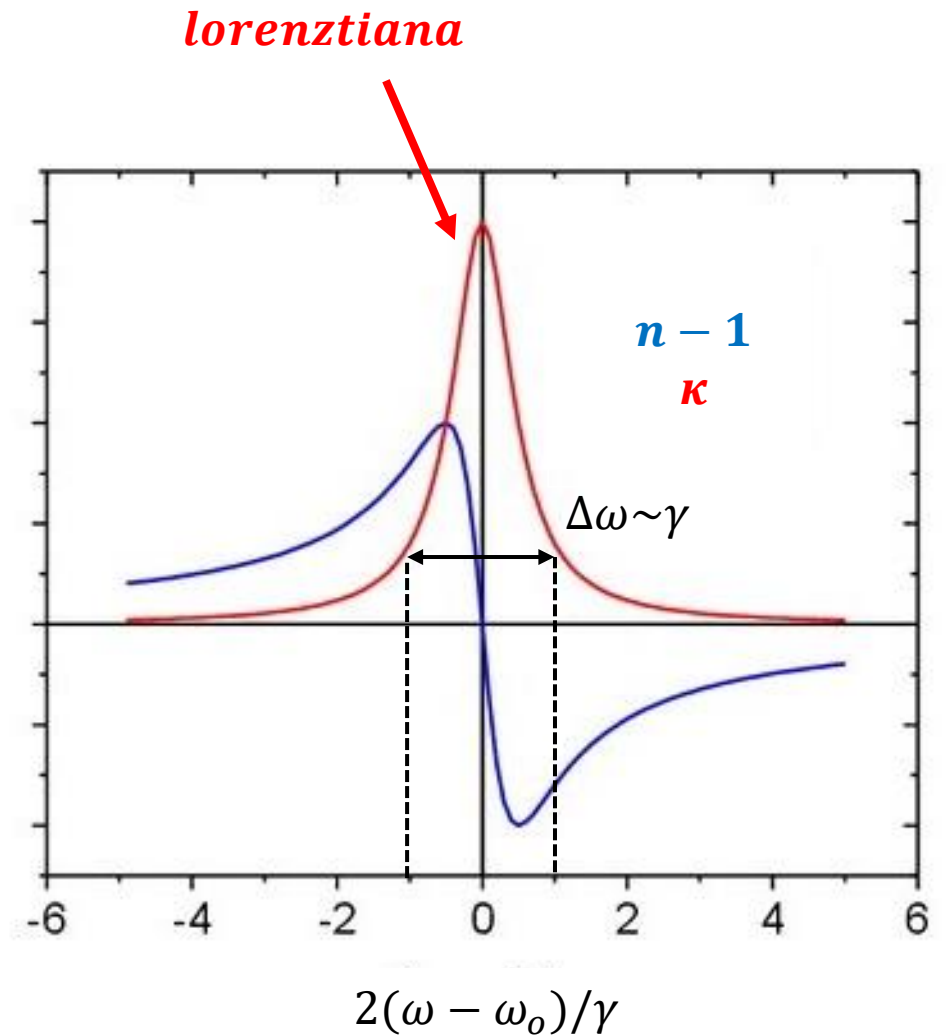


Ancho de línea natural de la transición

$$\Delta\omega \sim \gamma \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \sim \frac{\gamma}{\omega_o}$$

$$\text{Si } \omega \sim \omega_o \text{ y } \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \ll 1$$

La absorbancia $\alpha \propto \kappa$ (ambos tienen el máximo en el mismo lugar)



$n(\omega)$ curva de dispersión

$$\frac{dn(\omega)}{d\omega} > 0$$

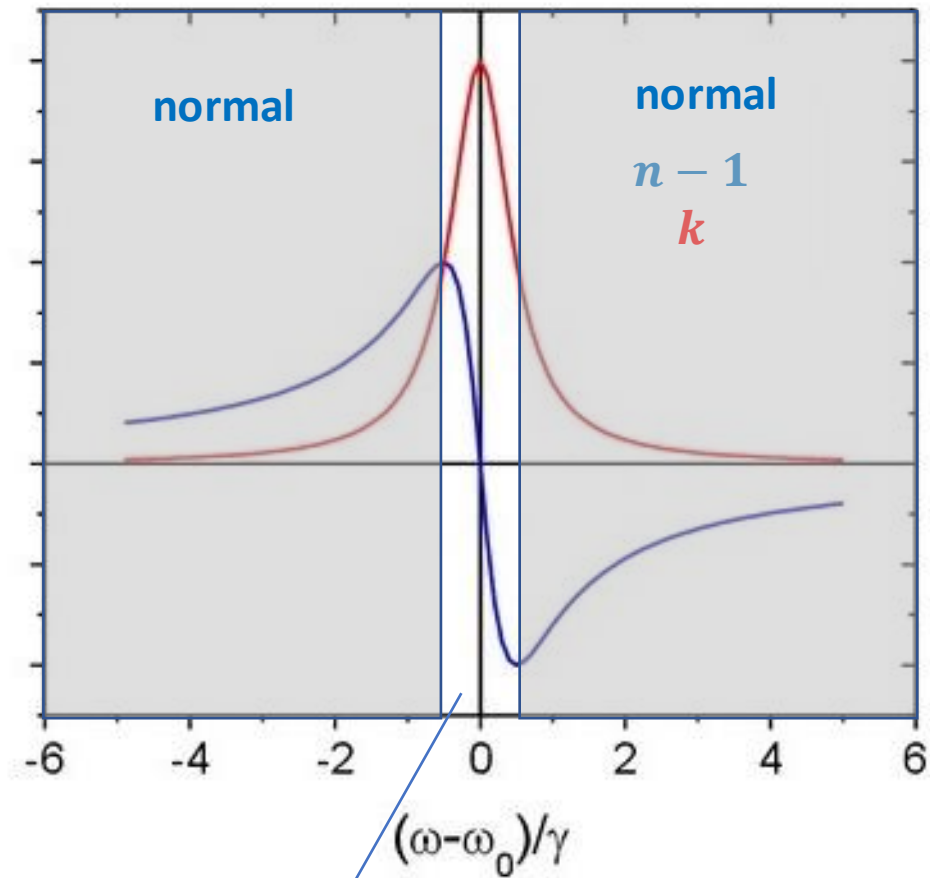
Dispersión normal

(típicamente en rangos espectrales IR, vis, UV en medios transparentes, n en regiones transparentes y lejos de resonancias fuertes)

$$\frac{dn(\omega)}{d\omega} < 0$$

Dispersión anómala

(ocurre en regiones muy pequeñas del espectro)

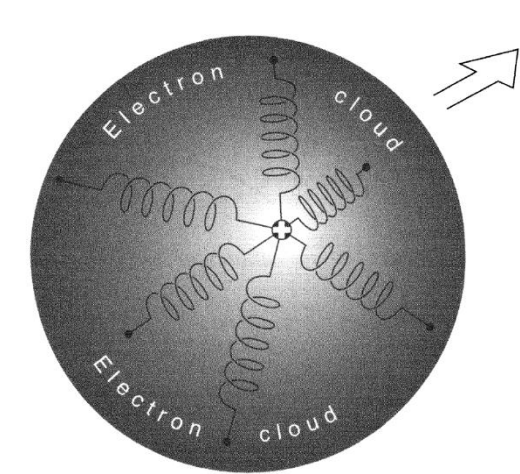


Anómala: Absorción muy grande, la luz se extingue rápidamente al entrar al medio

Modelo del electrón oscilante clásico



En una version más realista pueden existir varias resonancias en un mismo material



La respuesta del material se modela como una suma de osciladores resonantes clásicos, cada uno con frecuencia ω_j y amortiguamiento γ_j .

$$\mathcal{N}^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega \gamma_j)}$$

f_j (oscillation strength) es la fuerza de oscilación: un peso adimensional que mide la intensidad relativa de cada resonancia.

$$0 < f_j < 1; \quad \sum_j f_j = 1$$

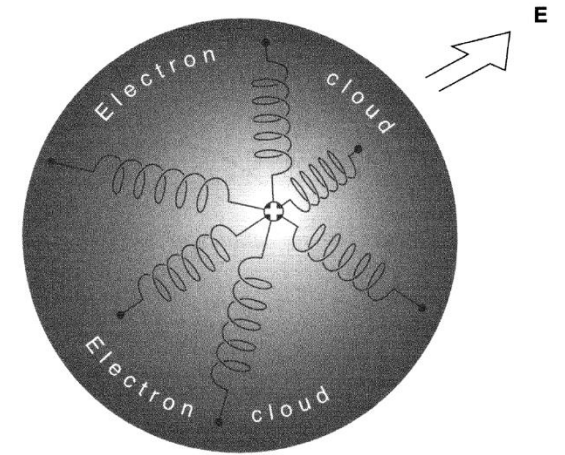
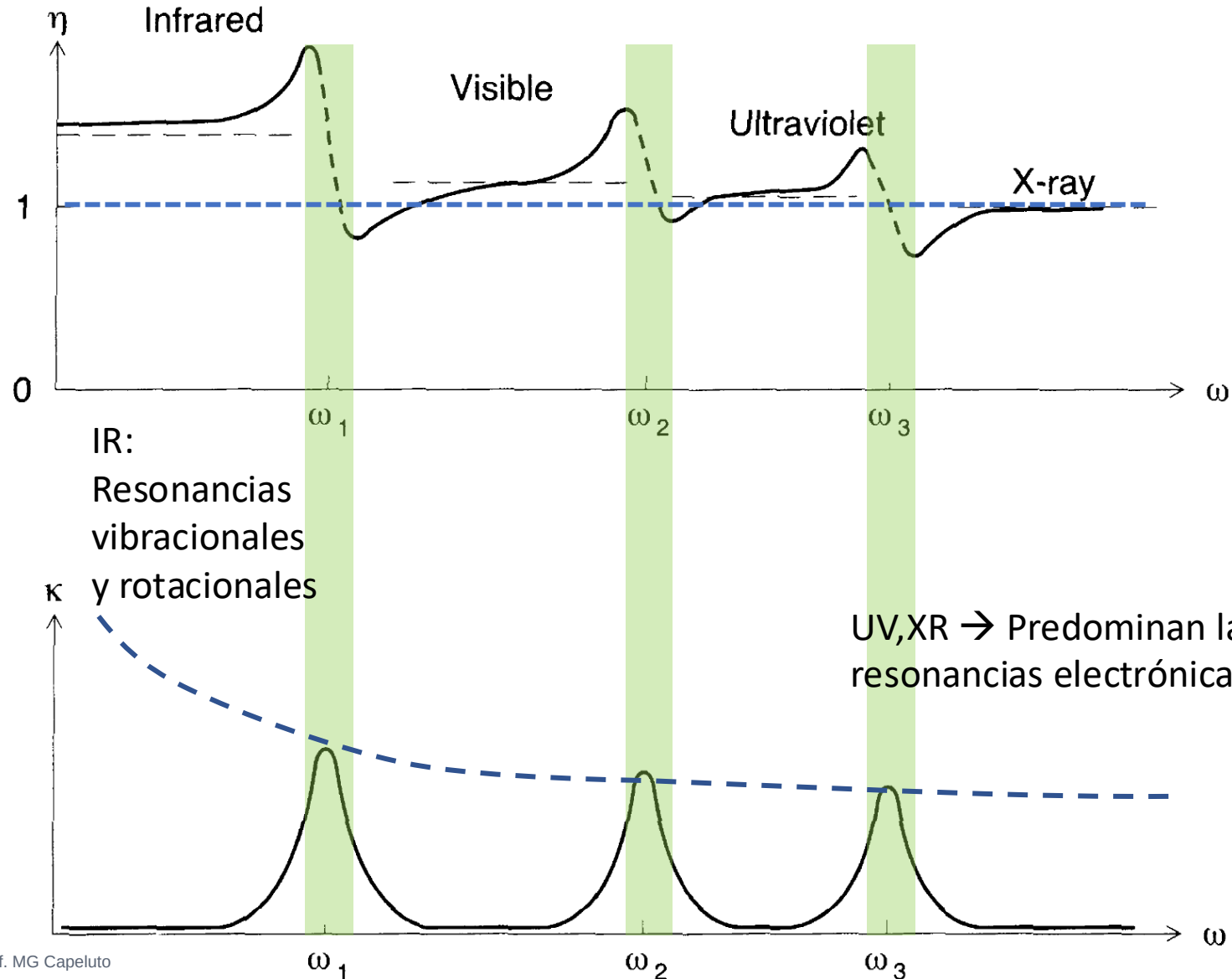
Formula de Sellmeier:

- En regiones fuera de las resonancias $\Delta\omega = \omega - \omega_o \gg \gamma_j$ (*materiales transparentes*) $\rightarrow$ desprecio γ_j en $\mathcal{N}$
- Se expresa en función de λ
- f_j medidas espectrales en resonancia

Modelo del electrón oscilante clásico



En una versión más realista pueden existir varias resonancias en un mismo material

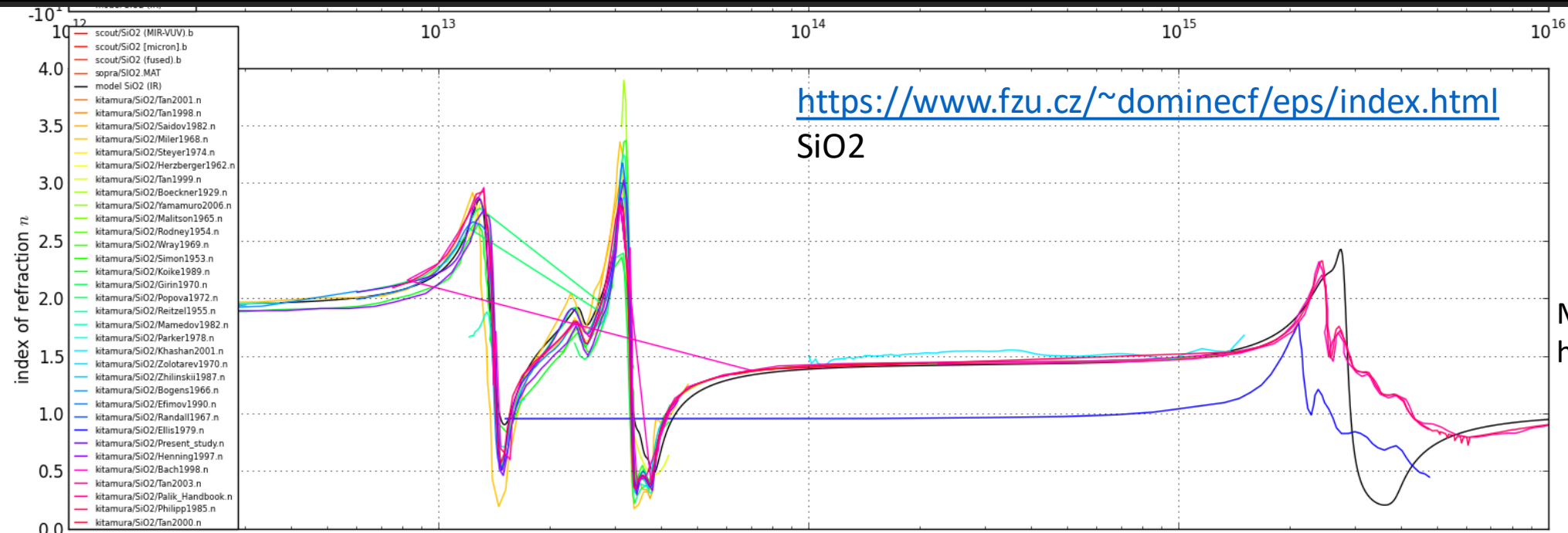


Tendencias generales cuando ω se acerca Rayos x

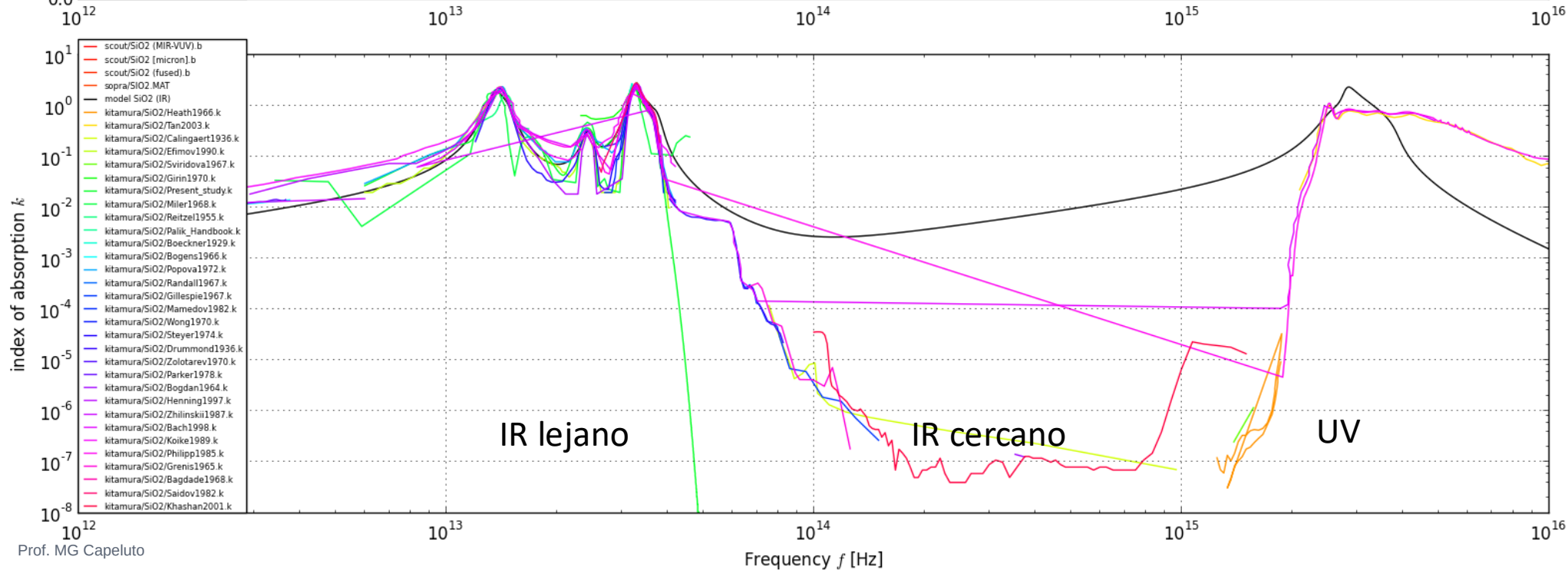
$n(\omega) \rightarrow 1$ (vacío)

$n(\omega)$, $k(\omega)$ decrecen

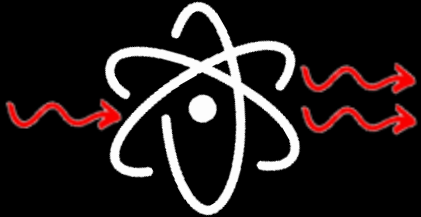
$n(\omega)$ creciente a tramos



Más datos experimentales
<https://refractiveindex.info>



Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

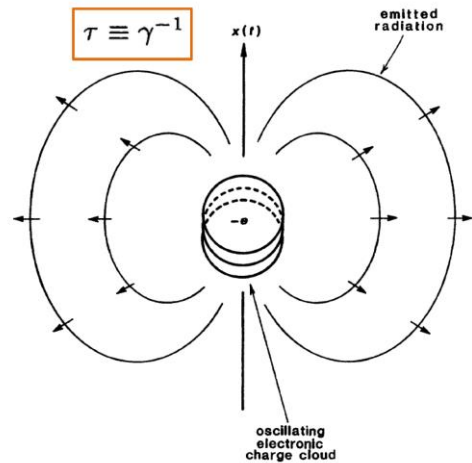
Interacción de la luz con materiales: absorción



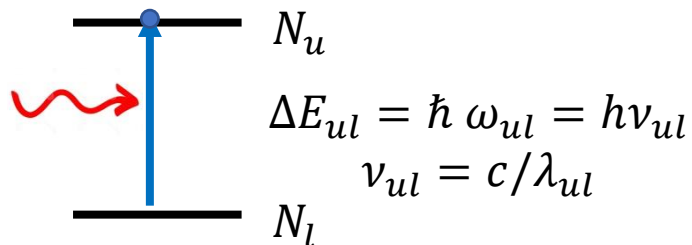
Un mini-resumen

El campo de un laser se propaga por el medio material. Al propagarse cambia la velocidad de propagación y se atenúa

Átomos como dipolos



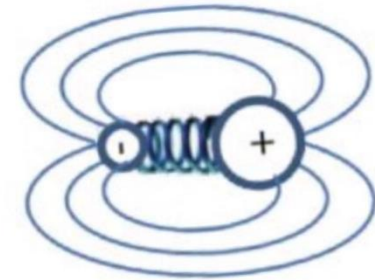
Absorción estimulada



$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\mathcal{K}_z z - \omega t)} = \vec{E}_o e^{-\alpha_E z} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Obtuvimos así las constantes ópticas:

absorbancia $\alpha(\omega) = 2 \alpha_E$
índice de refracción $n(\omega)$



CEO



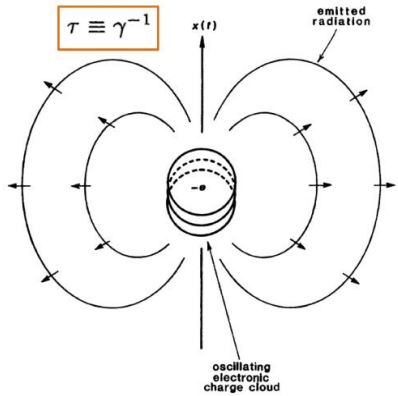
not a CEO

Respuesta de los átomos: ¿que sabemos?



Electromagnetismo clásico:

Una carga oscilante emite radiación electromagnética

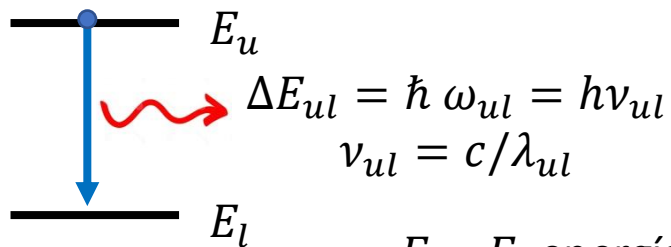


Interacción dipolar eléctrica

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}$$

Cuántica:

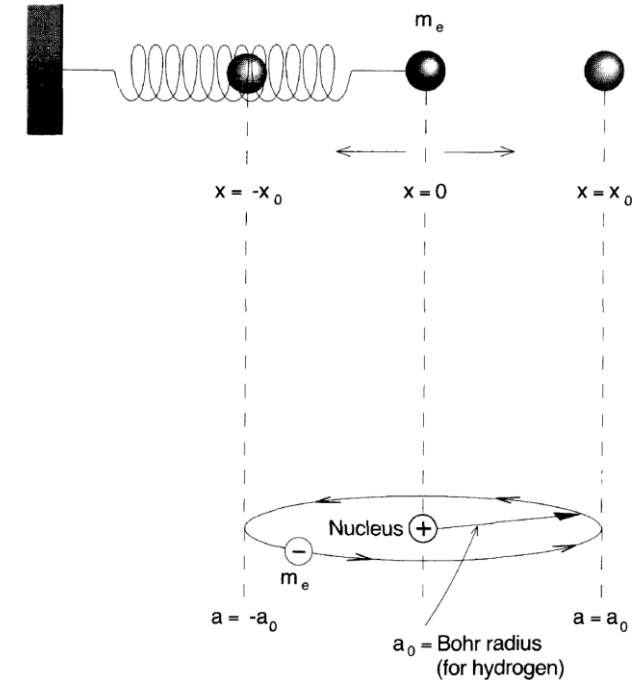
Las frecuencias de emisión y absorción están determinadas por las diferencias de energía entre niveles, y probabilidades de transición



E_u, E_l energías de los niveles atómicos

Modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

El electrón se modela como una carga ligada al núcleo por una fuerza restauradora elástica



Respuesta de los átomos aislados: emisión espontánea

Supongamos que, luego de que el material absorbe luz, se apaga el láser y el sistema evoluciona libremente emitiendo radiación.

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m \gamma_o \frac{d\vec{x}}{dt} + m \omega_o^2 \vec{x} = 0$$

$$\vec{x} = \vec{x}_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t}$$

$$\vec{\mu}(t) = -e \vec{x} = -e \vec{x}_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t}$$

Proponemos la misma dependencia temporal para el campo irradiado

$t > 0$ (en $t < 0$ el campo es nulo)

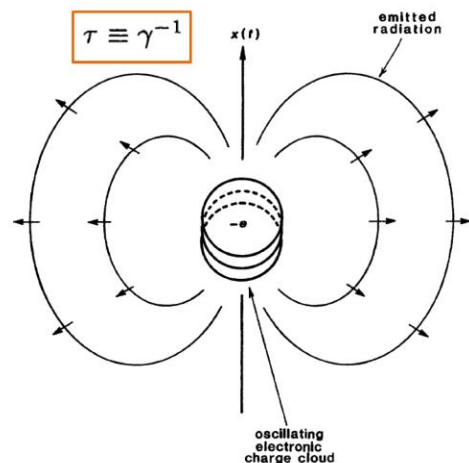
$$\vec{E}(t) = \vec{E}_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t}$$

$$I(t) \sim |\vec{E}_o|^2 e^{-\gamma_o t}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma_o I(t)$$

$$I(t) \sim \frac{\text{Energía}}{\text{Area} \times \text{tiempo}} = \frac{\hbar \omega_o}{A} \frac{N_\gamma}{\Delta t}$$

N_γ : número medio de fotones emitidos en Δt



Si cada transición radiativa del nivel u al nivel l emite un fotón, entonces la tasa de decaimiento del nivel superior coincide con la tasa de emisión de fotones.

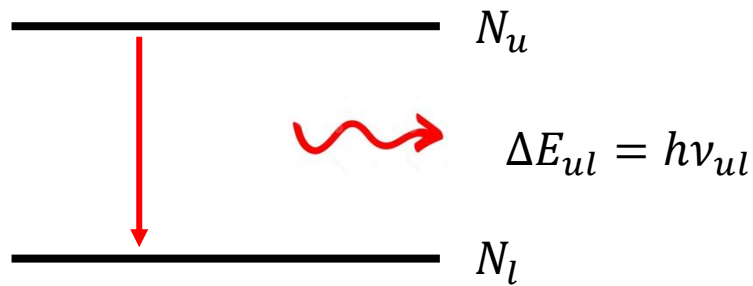
Emisión espontánea de átomos aislados



Poblamos al nivel superior excitando a los átomos por bombeo óptico o descargas eléctricas

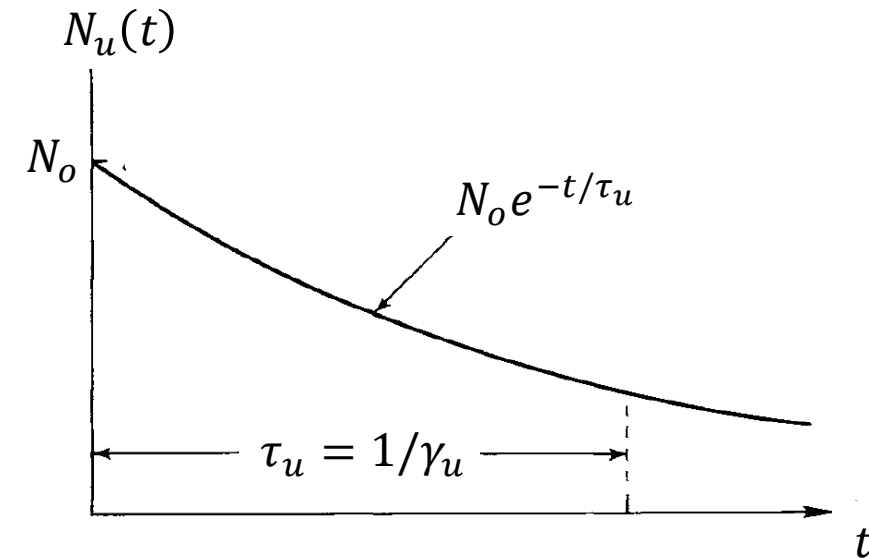
El número de decaimientos radiativos es igual al número de fotones emitido

Relajación radiativa del átomo con emisión espontánea (fluorescencia).



$$\frac{dN_u(t)}{dt} = -\gamma_u N_u(t) = -\frac{1}{\tau_u} N_u(t)$$

$$N_u(t) = N_o e^{-t/\tau_u}$$



En vacío $\lambda_{ul} = c/\nu_{ul}$

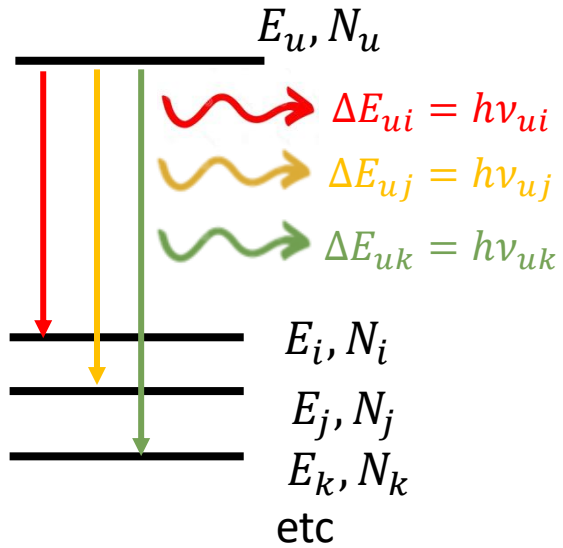
En un medio material $\lambda_{ul} = v/\nu_{ul}$ con $v = c/n(\omega)$

Si el único proceso por el cual el átomo pierde energía es la radiación dipolar

$\gamma_u = A_{ul}$ probabilidad de transición radiativa por unidad de tiempo, o tasa de transición radiativa

τ_u tiempo de vida del nivel excitado u

Emisión espontánea de átomos aislados



$$\frac{dN_u(t)}{dt} = -(A_{ui} + A_{uj} + A_{uk} + \dots)N_u(t) = -\left(\sum_i A_{ui}\right)N_u = -\frac{1}{\tau_u} N_u(t)$$

$$\tau_u = \frac{1}{(\sum_i A_{ui})}$$

El tiempo de vida del nivel u está determinado por la suma de todas las probabilidades de decaimiento radiativo hacia niveles de energía más bajos.

$$\gamma_u^{rad} = \left(\sum_i A_{ui}\right) = \frac{1}{\tau_u}$$

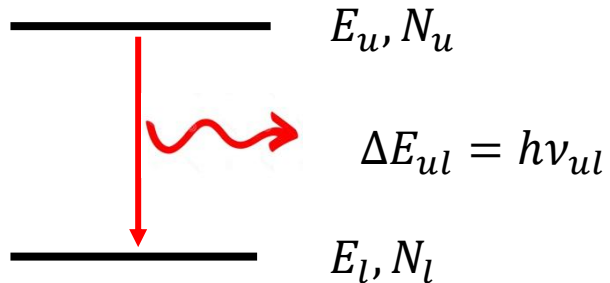
$$N_u(t) = N_{uo}e^{-t/\tau_u}$$



Ancho de línea Natural

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m \gamma_o \frac{d\vec{x}}{dt} + m \omega_o^2 \vec{x} = 0$$

$$\vec{\mu}(t) = -e \vec{x} = -e \vec{x}_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t}$$



$$\vec{E}(t) = \vec{E}_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t}$$

La emisión no es perfectamente monocromática, su ancho está relacionado con el tiempo característico de decaimiento

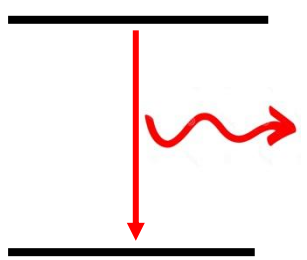
$$E(\omega) = \mathcal{F}\{E(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} E_o e^{-\frac{\gamma_o}{2}t} e^{-i\omega_o t} e^{i\omega t} dt = -E_o \frac{1}{i \left[(\omega - \omega_o) + \frac{i\gamma_o}{2} \right]}$$

$$I(\omega) \propto |E(\omega)|^2 = I_o \frac{\gamma_o}{\left[(\omega - \omega_o)^2 + \frac{\gamma_o^2}{4} \right]} \quad (\gamma_o \ll \omega_o)$$

$$\Delta\omega_{NAT} = \gamma_o$$

$$I_o = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega$$

Ancho de línea de emisión y ensanchamiento de línea en decaimientos radiativos



E_u, N_u

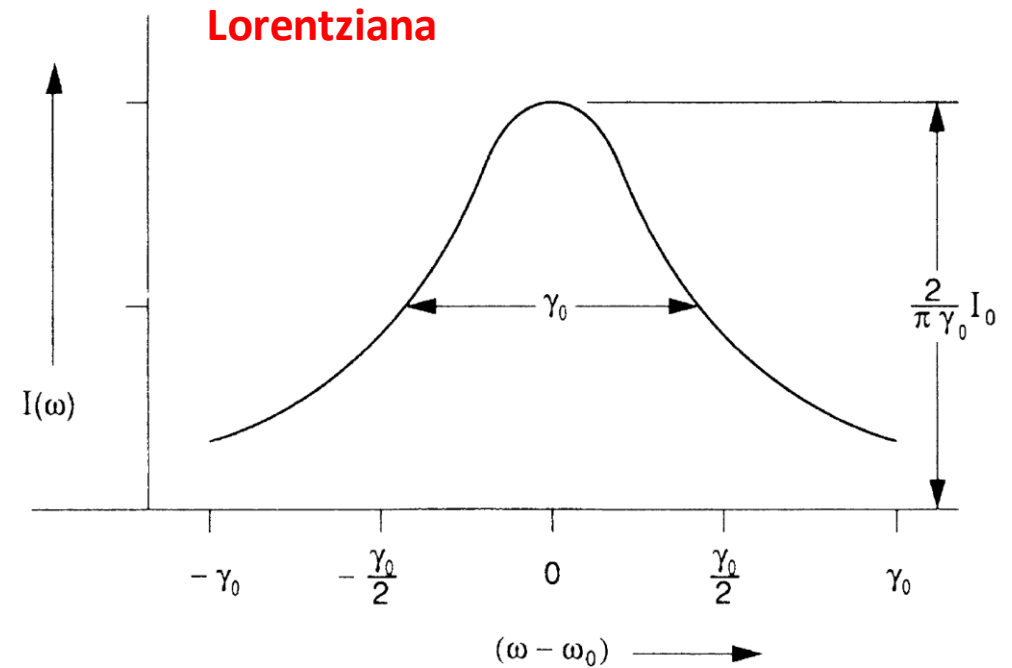
$$\Delta E_{ul} = h\nu_{ul}$$

E_l, N_l

La emisión no es perfectamente monocromática, su ancho está relacionado con el tiempo característico de decaimiento

$$I(\omega) \propto |E(\omega)|^2 = I_0 \frac{\gamma_0}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma_0^2}{4} \right]}$$

$$\Delta\omega_{FWHM} = \gamma_0 = \frac{1}{\tau_u} = 2\pi\Delta\nu_{FWHM}$$

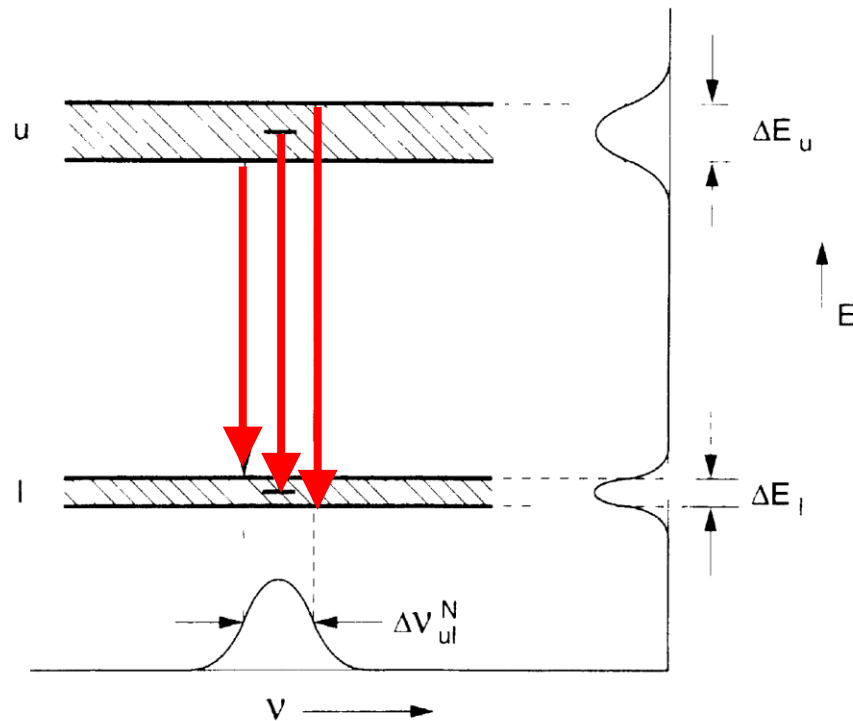


Ancho de línea natural esperado (clásicamente)

- Un conjunto de átomos que realiza la misma transición, aunque con fases distintas, presenta el mismo ancho de línea natural.
- El ancho de línea natural es un ensanchamiento homogéneo: todos los átomos contribuyen de la misma manera al ancho de línea.

Ancho de línea de emisión y ensanchamiento de línea en decaimientos radiativos

Ancho de línea Natural, consideraciones cuánticas



Principio de incerteza

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

ΔE incerteza en determinar la energía del nivel

Δt incerteza mínima en determinar el tiempo de vida

$$E_u \pm \frac{\Delta E_u}{2} \rightarrow E_l$$

$$E_u \rightarrow E_l \pm \frac{\Delta E_l}{2}$$

$$\Delta E_u \sim \frac{\hbar}{\tau_u} = \hbar \gamma_u = \hbar \sum_i A_{ui}$$

$$\Delta E_l \sim \frac{\hbar}{\tau_l} = \hbar \gamma_l = \hbar \sum_i A_{li}$$

$$\Delta E_T = \Delta E_u + \Delta E_l = \hbar(\gamma_u + \gamma_l) = \hbar \gamma_{ul}^{tot} = \hbar \sum_i A_{ui} + \hbar \sum_i A_{li} = h \Delta \nu_{ul}^N$$

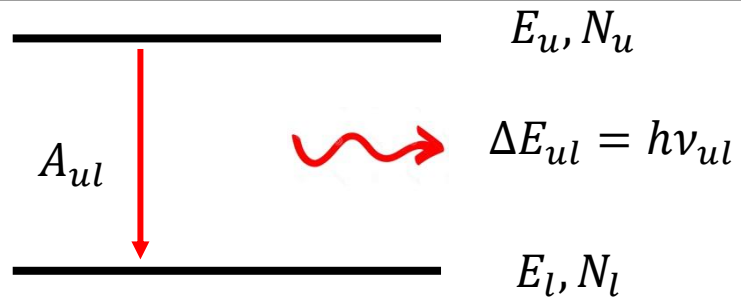
$$\Delta \nu_{ul}^N = \frac{(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li})}{2\pi} = \frac{\gamma_{ul}^{tot}}{2\pi}$$

**Ancho de línea natural
(el mínimo)**

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma_{ul}^{tot}}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{(\gamma_{ul}^{tot})^2}{4} \right]}$$

Lorentziana

Ancho de línea de emisión y ensanchamiento de línea en decaimientos radiativos



$$I(\omega) = I_o \frac{\gamma_{ul}^{tot}}{\left[(\omega - \omega_o)^2 + \frac{(\gamma_{ul}^{tot})^2}{4} \right]} \longrightarrow I(\nu) = I_o \frac{\gamma_{ul}^{tot} / 4\pi^2}{\left[(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^{tot}}{4\pi} \right)^2 \right]}$$

N_u : número de especies por unidad de volumen en el nivel E_u

A_{ul} : tasa de transición radiativa, o probabilidad de transición por unidad de tiempo

$N_u A_{ul}$: número de transiciones por unidad de volumen y por unidad de tiempo

Todos los átomos en el nivel u tienen la misma frecuencia central ν_o . Sin embargo, debido al ancho natural, la emisión se distribuye alrededor de ν_o , por lo que $I = I(\nu)$.

Probabilidad de transición radiativa (distribución en frecuencia)

$$A_{ul}(\nu) = g(\nu) A_{ul}$$

$$g(\nu) = \frac{\gamma_{ul}^{tot} / 4\pi^2}{\left[(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^{tot}}{4\pi} \right)^2 \right]}$$

$$A_{ul} = \int_0^\infty A_{ul}(\nu) d\nu$$

A_{ul} probabilidad de transición total

$$\Delta\nu_{ul} = \frac{\gamma_{ul}^{tot}}{2\pi}$$

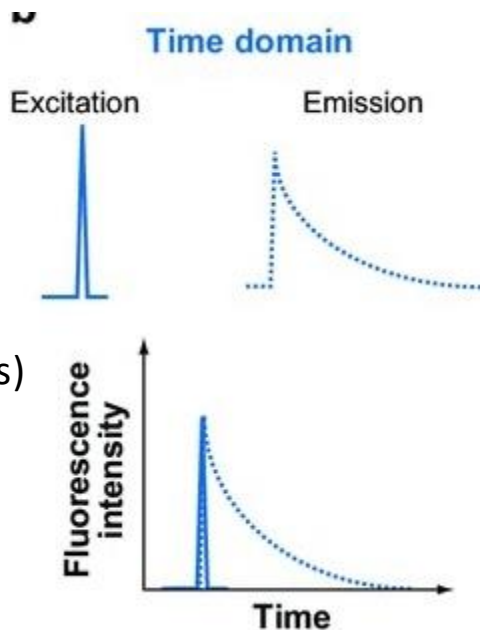
$N_u A_{ul}(\nu)$: número de transiciones por unidad de volumen, tiempo y frecuencia

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

Las transiciones reales atómicas tienen tasas de decaimiento determinadas por consideraciones cuánticas

$\gamma_{rad,ji}$ transición $j \rightarrow i$ (puramente cuántico)

$\gamma_{rad,CEO}$



Excitación (ejemplos)
Laser TiZa (pulsos fs)
Descarga eléctrica (gases)

Antena dipolar o carga oscilante $\mu_x(t) = \mu_o \cos(\omega_o t)$
 $\mu_o = -ex_o$

Energía

$$E_T = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 x_o^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 \mu_o^2 / e^2$$

La potencia media radiada al campo lejano es igual a la pérdida de energía del oscilador

$$P_{av} = \frac{\omega_o^4 \mu_o^2}{12\pi \epsilon_o c^3} = -\frac{dE_T}{dt} = \gamma_{rad,CEO} E_T$$

$$\gamma_{rad,CEO} = \frac{e^2 \omega_o^2}{6\pi m_e \epsilon_o c^3}$$

En visible

$$\gamma_{rad,CEO} \sim 10^8 s^{-1} \ll \omega_o \sim 4 \times 10^{15} s^{-1}$$

¡¡Anchos naturales muy pequeños!!

Consideraciones cuánticas I: matiz de transiciones y reglas de selección

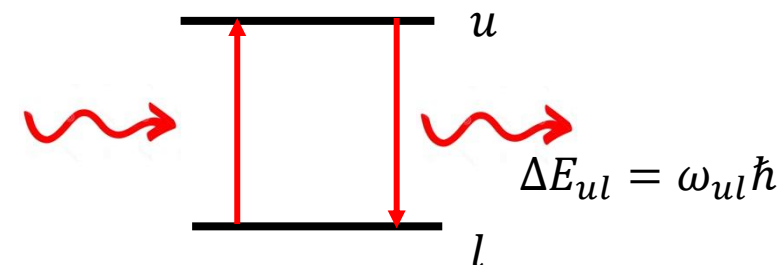
Comentarios introductorios para interpretar el elemento de matriz M_{ul} del libro (Excede el alcance de Física 4)

Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

$\Psi(\vec{r}, t)$ función de onda



➤ $\hat{H}_0$ Hamiltoniano del átomo no perturbado. Es independiente del tiempo, válido antes o después de la interacción

$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$. Conocemos funciones de onda (autoestados) y energías $\psi_i^0(\vec{r}) e^{-iE_i^0 t/\hbar}$

➤ $\hat{H}_1(t)$ Hamiltoniano de la perturbación débil (en nuestro caso interacción dipolar con campo externo)

$\hat{H}_1(t) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = -p_x E_{ox} \cos(\omega t)$ luz polarizada en x

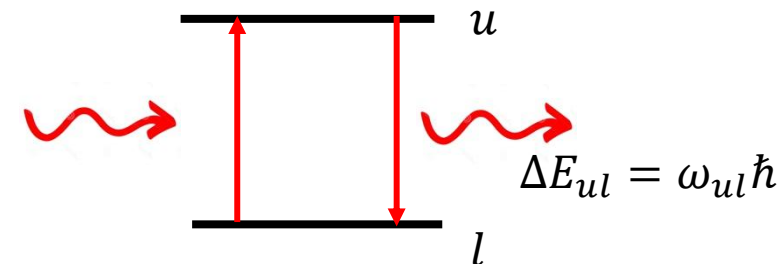
➤ Tratamiento semiclásico: átomos cuánticos, campos externos (radiación em) clásicos.

$$p_x = \sum_k q_k x_k$$

Consideraciones cuánticas I: matiz de transiciones y reglas de selección

$t < 0$ Estado inicial del sistema es autoestado del Hamiltoniano sin perturbar $\hat{H}_0$ con energía E_i^0

$$\Psi_i(\vec{r}, t < 0) = \psi_i^0(\vec{r})e^{-iE_i^0 t/\hbar}$$



$t > 0$ Durante la acción de la perturbación, el estado del sistema puede escribirse como

$$\Psi_f(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n^o(\vec{r}, t) \quad \Psi_n^o(\vec{r}, t) = \psi_n^o(\vec{r})e^{-iE_n^0 t/\hbar} \text{ autoestados de } \hat{H}_0 \text{ con energías } E_n^0$$

La probabilidad de encontrar al sistema en el estado de energía E_n^0 (o sea de realizar una transición del estado $i \rightarrow n$)

$$P(t \geq t_f) = |a_n(t_f)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^{t_f} H_{ni}^1(t) e^{i\omega_{ni}t} dt \right|^2$$

$$\text{Con } \omega_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar}$$

$$H_{ni}^1 = \int \psi_n^{o*}(\vec{r}) \hat{H}_1(t) \psi_i^o(\vec{r}) dV$$

Reglas de selección:

Si $H_{ni}^1 = 0 \rightarrow P(t \geq t_f) = 0$

La transición es prohibida

Consideraciones cuánticas I: matiz de transiciones y reglas de selección

Estado inicial: u

$$\Psi_u(\vec{r}, t < 0) = \psi_u^o(\vec{r}) e^{-iE_u t/\hbar}, \text{ energía } E_u$$

Estado final: l

$$\Psi_l(\vec{r}, t > t_f) = \psi_l^o(\vec{r}) e^{-iE_l t/\hbar}, \text{ energía } E_l$$

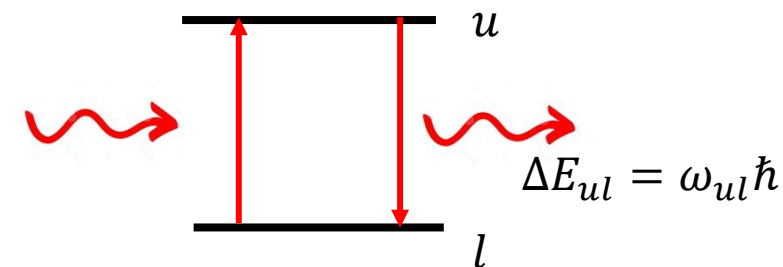
La probabilidad de realizar una transición del estado $u \rightarrow l$

$$P(t \geq t_f) = |a_l(t_f)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^{t_f} H_{lu}^1(t) e^{-i\omega_{ul}t} dt \right|^2 \quad \text{Con } \omega_{ul} = \frac{E_u - E_l}{\hbar}$$

$$H_{ul}^1 = \int \psi_l^{o*}(\vec{r}) \hat{H}_1(t) \psi_u^o(\vec{r}) dV$$

Transiciones posibles: $H_{lu}^1(t)$ (o M_{ul}) $\neq 0$

$$H_{ul}^1 = \int \psi_l^{o*}(\vec{r}) (-p_x E_{ox} \cos(\omega t)) \psi_u^o(\vec{r}) dV \propto \int \psi_l^o(\vec{r}) p_x \psi_u^o(\vec{r}) dV = M_{ul}$$



Momento dipolar de transición:

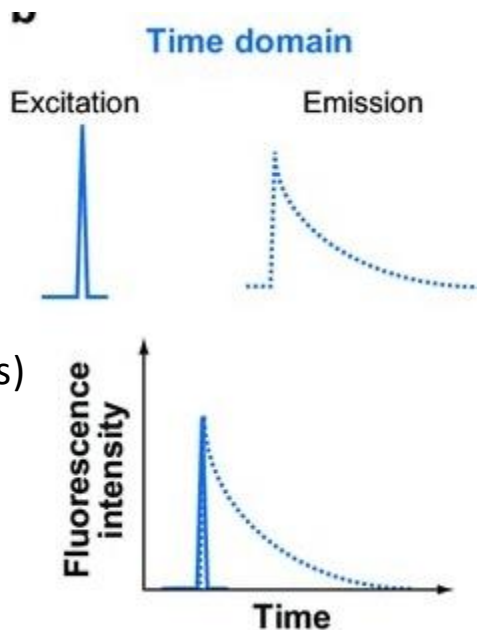
Superposición especial de las funciones de onda de los estados u y l pesadas con el momento dipolar

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

Las transiciones reales atómicas tienen tasas de decaimiento determinadas por consideraciones cuánticas

$\gamma_{rad,ji}$ transición $j \rightarrow i$ (puramente cuántico)

$\gamma_{rad,CEO}$



Excitación (ejemplos)
Laser TiZa (pulsos fs)
Descarga eléctrica (gases)

Antena dipolar o carga oscilante $\mu_x(t) = \mu_o \cos(\omega_o t)$
 $\mu_o = -ex_o$

Energía

$$E_T = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 x_o^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 \mu_o^2 / e^2$$

La potencia media radiada al campo lejano es igual a la pérdida de energía del oscilador

$$P_{av} = \frac{\omega_o^4 \mu_o^2}{12\pi\epsilon_o c^3} = -\frac{dE_T}{dt} = \gamma_{rad,CEO} E_T$$

$$\gamma_{rad,CEO} = \frac{e^2 \omega_o^2}{6\pi m_e \epsilon_o c^3}$$

En visible

$$\gamma_{rad,CEO} \sim 10^8 s^{-1} \ll \omega_o \sim 4 \times 10^{15} s^{-1}$$

¡¡Anchos naturales muy pequeños!!

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

Las transiciones reales atómicas tienen tasas de decaimiento determinadas por consideraciones cuánticas

$$\gamma_{ul}^{rad} = A_{ul} \text{ transición } ul \quad (\text{puramente cuántico})$$

Potencia media radiada = energía/ tiempo

$$P_{av} = \frac{\omega_{ul}^4 \mu_o^2}{12\pi\epsilon_o c^3} = \frac{16\pi^3 \nu_{ul}^4 \mu_o^2}{12\epsilon_o c^3} = A_{ul} h\nu_{ul}$$

A_{ul} probabilidad de transición por unidad de tiempo
 $h\nu_{ul}$ energía del fotón

$$A_{ul} = \frac{4\pi^3 \nu_{ul}^3 \mu_o^2}{3\epsilon_o c^3 h}$$

$\mu_o = -ex_o \longrightarrow M_{ul}$ momento dipolar de transición cuántico

$$A_{ul} = \frac{\omega_{ul}^3 M_{ul}^2}{3\pi\epsilon_o \hbar c^3}$$

$$\gamma_{CEO}^{rad}$$

Antena dipolar o carga oscilante $\mu_x(t) = \mu_o \cos(\omega_o t)$
 $\mu_o = -ex_o$

Energía total

$$E_T = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 x_o^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 \mu_o^2 / e^2$$

Potencia media radiada al campo lejano (promedio en ciclos de campo) es la **pérdida de energía**

$$P_{av} = \frac{\omega_o^4 \mu_o^2}{12\pi\epsilon_o c^3} = -\frac{dE_T}{dt} = \gamma_{CEO}^{rad} E_T$$

$$\gamma_{CEO}^{rad} = \frac{e^2 \omega_o^2}{6\pi m_e \epsilon_o c^3} = \frac{2\pi e^2 \nu_o^2}{3 m_e \epsilon_o c^3}$$

En visible

$$\gamma_{CEO}^{rad} \sim 10^8 s^{-1} \ll \omega_o \sim 4 \times 10^{15} s^{-1}$$

¡¡Anchos naturales muy pequeños!!

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

Oscillator strength: medición de la intensidad de la respuesta de una transición real relativa a la respuesta de un CEO a la misma frecuencia

❖ Transiciones no radiativas

$$\gamma_{ji}^{rad} \ll \gamma_{CEO}^{rad}, \quad f_{ji} \rightarrow 0 \quad M_{ij} \sim 0 \text{ (prohibidas)}$$

$$f_{ji} \equiv \frac{\gamma_{ji}^{rad}}{3\gamma_{CEO}^{rad}} \equiv \frac{\tau_{CEO}^{rad}}{3\tau_{ji}^{rad}} \propto M_{ij}$$

3 posibles polarizaciones del campo

❖ Niveles degenerados

$$f_{ji}|_{down} = -\frac{\gamma_{ji}^{rad}}{3\gamma_{CEO}^{rad}} \quad \text{(emisión)}$$

$$f_{ij}|_{up} = \frac{g_j}{g_i} \frac{\gamma_{ji}^{rad}}{3\gamma_{CEO}^{rad}}, \quad g_j \text{ y } g_i \text{ degeneración de los niveles } i, j. \quad \text{(absorción)}$$

❖ Regla de la suma (sumo todas las transiciones posibles de absorción o emisión espontanea (regla de Thomas-Kuhn-Reiche)

$$\sum_{i \neq j} f_{ji} \sim 1$$

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

Oscillator strength: medición de la intensidad de la respuesta de una transición real relativa a la respuesta de un CEO a la misma frecuencia

$$f_{ji} \equiv \frac{\gamma_{ji}^{rad}}{3\gamma_{CEO}^{rad}} \equiv \frac{\tau_{CEO}^{rad}}{3\tau_{ji}^{rad}}$$

3 posibles polarizaciones del campo

TABLE 3.1
Typical Radiative Decay Rates

Transition	Wavelength	Radiative decay rate	Oscillator strength	Comments
<i>Atomic sodium resonance lines:</i>				
$3s \rightarrow 3p$	589 nm	$6.3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ (1.6 ns)	0.33	Strong sodium <i>D</i> line
$3s \rightarrow 4p$	330 nm	$2.9 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ (350 ns)	0.0047	Weaker UV transition
<i>He-Ne laser transitions:</i>				
$3s_2 \rightarrow 2p_4$	633 nm	$1.4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ (0.7 μs)	0.0084	Red laser line
$2s_2 \rightarrow 2p_4$	1.153 μm	$4.4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ (0.23 μs)	0.09	Near IR laser
$3s_2 \rightarrow 3p_4$	3.392 μm	$9.6 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ (1.04 μs)	0.17	Middle IR laser

En tablas suele reportarse el valor absoluto, positivo, de la fuerza de oscilador.

Cuanto mayor es f_{ji} , más intensa y más permitida es la transición óptica

Átomo real y modelo clásico del electrón oscilante (CEO)

TABLE 3.1
Typical Radiative Decay Rates

Transition	Wavelength	Radiative decay rate	Oscillator strength	Comments
<i>Selenium quasi forbidden laser lines:</i>				
$^1S_0 \rightarrow ^3P_1$	489 nm	7.7 s^{-1} (130 ms)	3×10^{-8}	Magnetic-dipole transition
$^1S_0 \rightarrow ^1D_2$	777 nm	2.3 s^{-1} (430 ms)	2×10^{-9}	Electric-quadrupole
<i>Neodymium YAG laser transition:</i>				
$^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{11/2}$	1.064 μm	820 s^{-1} (1.22 ms)	$\approx 8 \times 10^{-6}$	Measured τ_2 is 230 μs
<i>Ruby laser transition:</i>				
$^2E \rightarrow ^4A_2$	694 nm	230 s^{-1} (4.3 ms)	$\approx 10^{-6}$	Decay is almost purely radiative
<i>Rhodamine 6G dye laser transition:</i>				
$S_1 \rightarrow S_0$	620 nm	$3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ (3.3 ns)	≈ 1.1	Decay is almost purely radiative

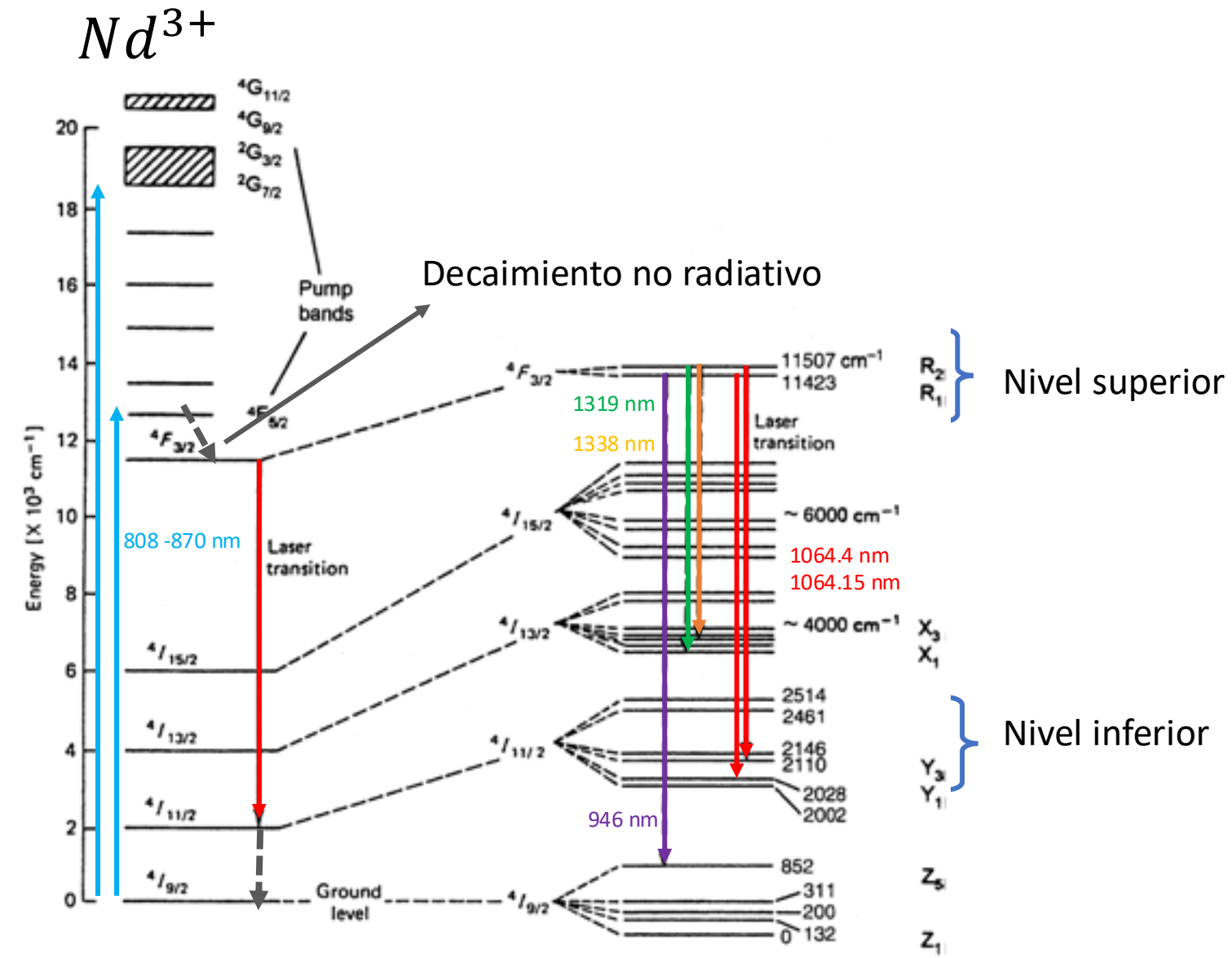
$$\gamma_2 = \frac{1}{\tau_2} = 4348 \text{ s}^{-1} \gg \gamma = 820 \text{ s}^{-1}$$

El tiempo de vida efectivo del nivel es menor que el tiempo de vida radiativo puro, por lo que tienen que existir otros mecanismos de decaimiento. **La línea está ensanchada respecto del ancho natural**

$$\gamma_2 = \gamma_{rad} + \gamma_{norad}$$

En transiciones fuertes, la estimación clásica y la cuántica dan órdenes de magnitud similares. Las transiciones resonantes fuertes suelen dar lugar a absorción y emisión intensas."

Transiciones en Nd:Yag



¿Cómo distinguimos y cuantificamos los procesos radiativos y no radiativos en el decaimiento del nivel $4F_{3/2}$?

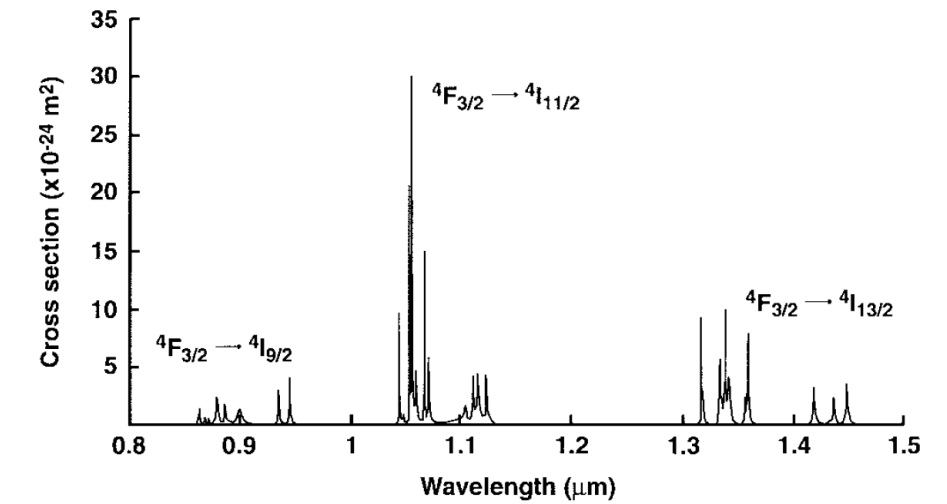
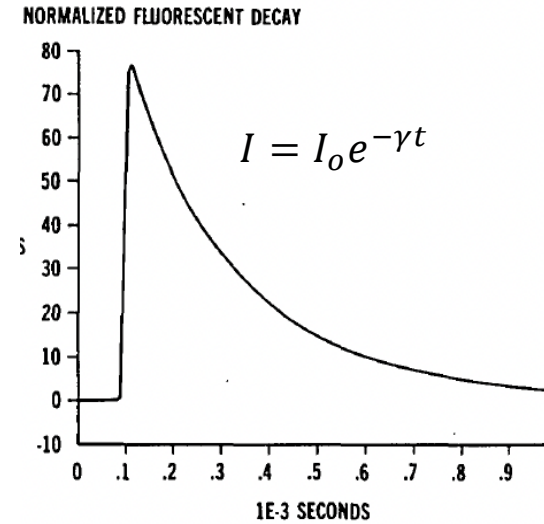
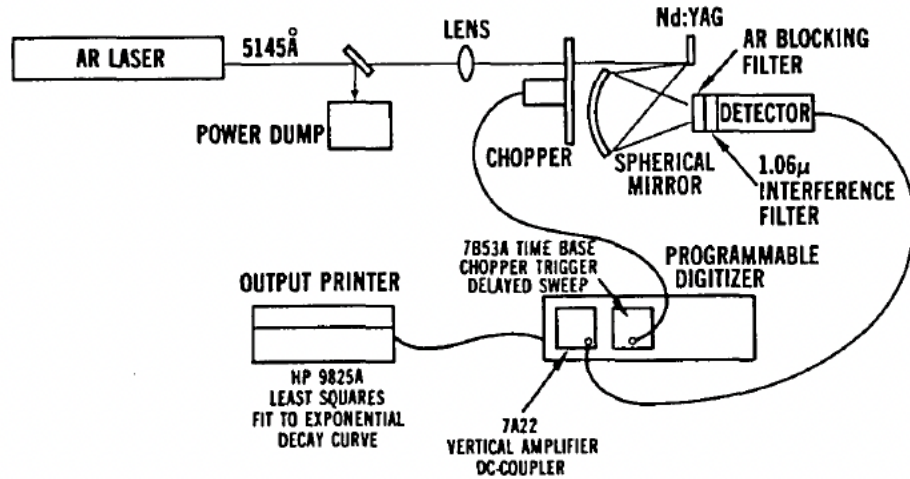


Fig. 2. Nd:YAG fluorescence spectrum.

Transiciones en Nd:Yag: tiempo de vida y eficiencia cuántica



¿Cuál es la tasa de decaimiento observada en la banda de 1.06 μm ?

$${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2} (Y_2, Y_3)$$

$$\gamma_{1.06 \mu\text{m}} = \gamma_{\text{rad}} + \gamma_{\text{norad}} \Big|_{1.06 \mu\text{m}}$$

$$\gamma_{1.06 \mu\text{m}} \approx \frac{1}{239} 10^6 \text{s}^{-1} = 4184 \text{s}^{-1}$$

<https://doi.org/10.1364/AO.20.001203>

Table I. Physical and Optical Parameters of Nd-Doped YAG Crystals

Characteristics	Airtron serial numbers		
	R1766	R1764	R1162
Physical			
Length (cm)	4.445	4.465	4.490
Diameter (cm)	0.427	0.427	0.4727
Weight (gm)	2.88	2.90	2.91
Strain ^a	None	None	None
Flatness of end surfaces ^b	$\lambda/10$	$\lambda/10$	$\lambda/10$
Twins ^a	None	None	None
Cracks ^a	None	None	None
Optical			
Avg. lifetime (μsec)	238.66	228.89	211.05
Concentration (at. %)	0.914	1.099	1.598
Quantum efficiency (η %)	82.07	80.70	67.70
Optical absorbance (A)			
at 938 nm	0.076	0.080	0.090
(Arbitrary abs. units)			
at 947 nm	0.133	0.138	0.145

¿Qué fracción del γ total es radiativa desde el nivel ${}^4F_{3/2}$ a 1064 nm?

$$Q({}^4F_{3/2}) = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{\gamma_{\text{rad}} + \gamma_{\text{norad}}} \approx 0.82 \quad (\text{stress-optic calorimetric technique})$$

¿Cuál es la tasa de decaimiento radiativo y no radiativo desde el nivel laser superior?

$$\gamma_{\text{rad}} = Q \gamma_{\text{tot}} \sim 0.82 \times \gamma_{\text{tot}}$$

$$\gamma_{\text{norad}} = (1 - Q) \gamma_{\text{tot}}$$

Transiciones en Nd:Yag: Branching ratio



Nd^{3+}

¿Qué fracción de la desexcitación radiativa contribuye a cada línea espectral?

$$BR_{u \rightarrow l} = \frac{A_{ul}}{\sum_j A_{uj}} = \frac{\gamma_{ul}^{rad}}{\gamma_{tot}^{rad}} \quad BR_{u \rightarrow l} \sim \frac{I_{ul}}{\sum_j I_{uj}}$$

$I_{uj} \propto A_{uj} N_u$ intensidad integrada de la línea espectral

$$BR(^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_J) = \frac{\sum_{l \in ^4I_J} A_{ul}}{\sum_j A_{uj}}$$

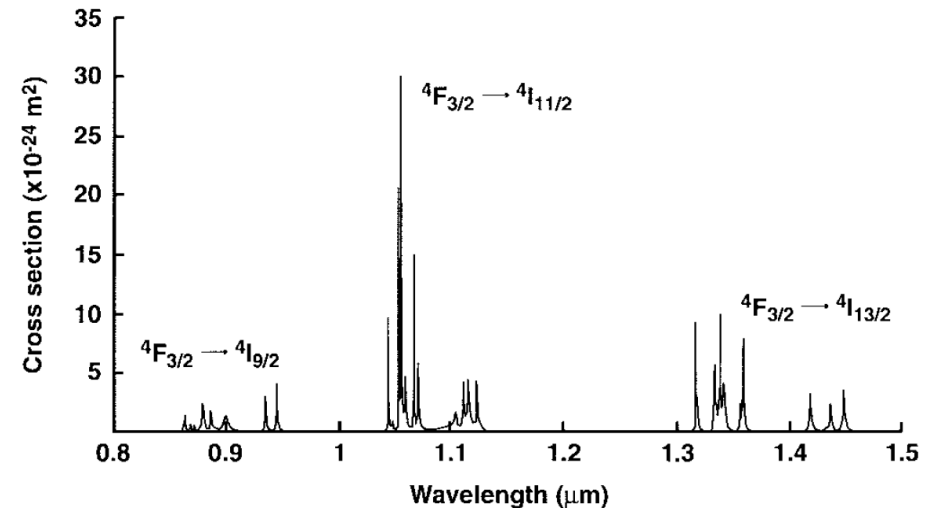
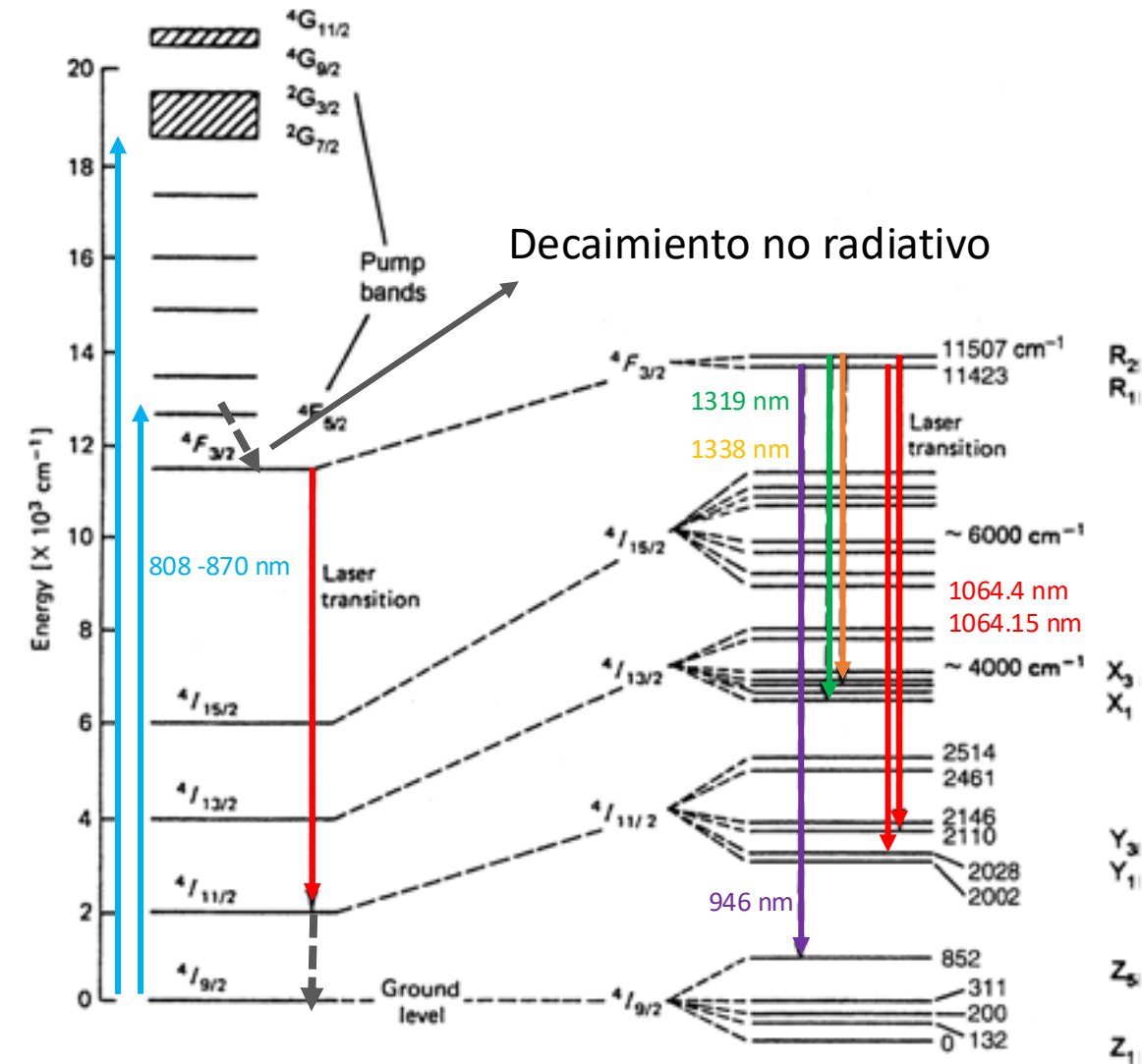
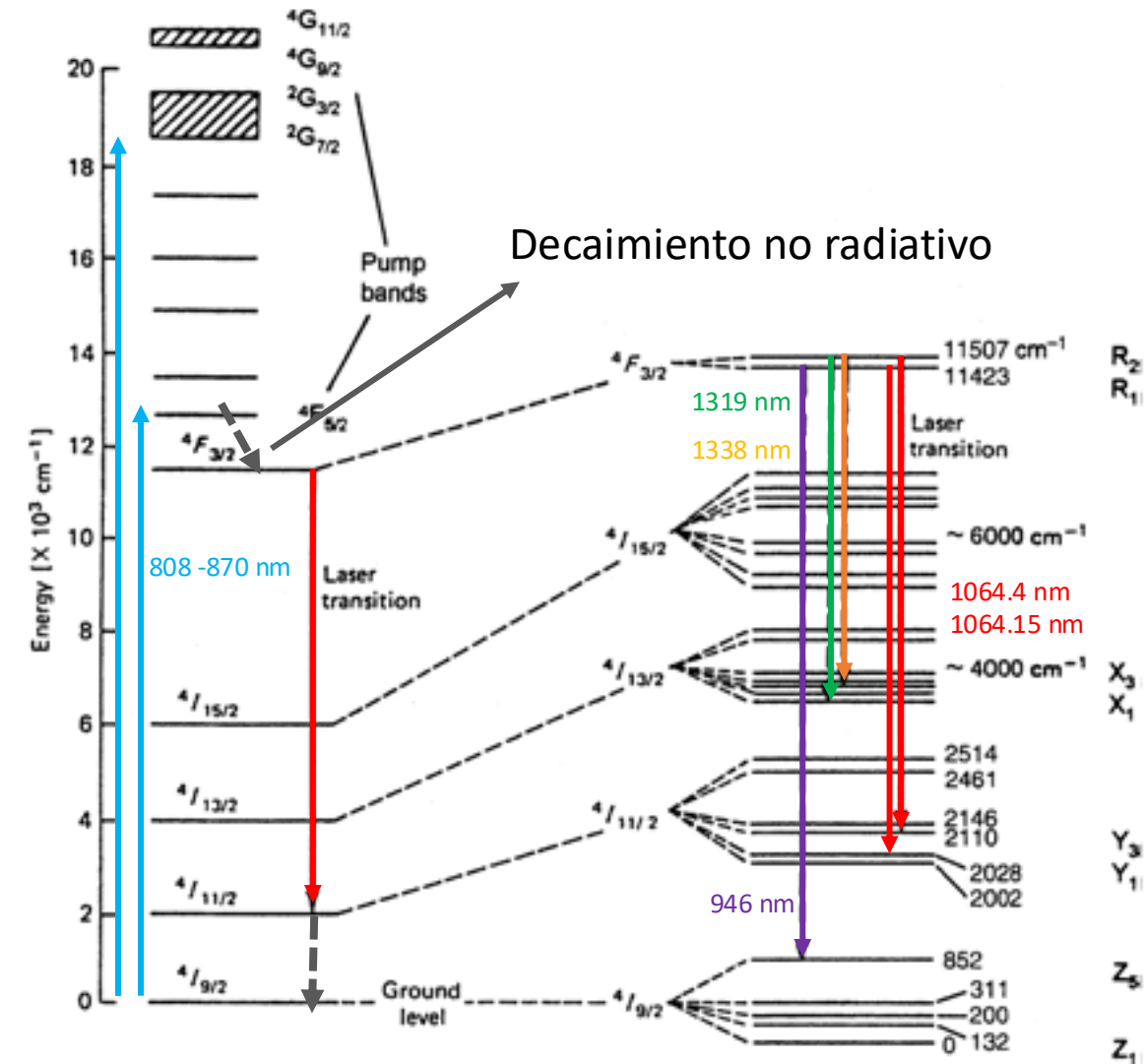


Fig. 2. Nd:YAG fluorescence spectrum.

Transiciones en Nd:Yag: Branching ratio



Nd^{3+}



¿Qué fracción de la desexcitación radiativa contribuye a cada multiplete?

$${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{15/2} \rightarrow BR < 0.01$$

$${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2} \rightarrow BR = 0.14$$

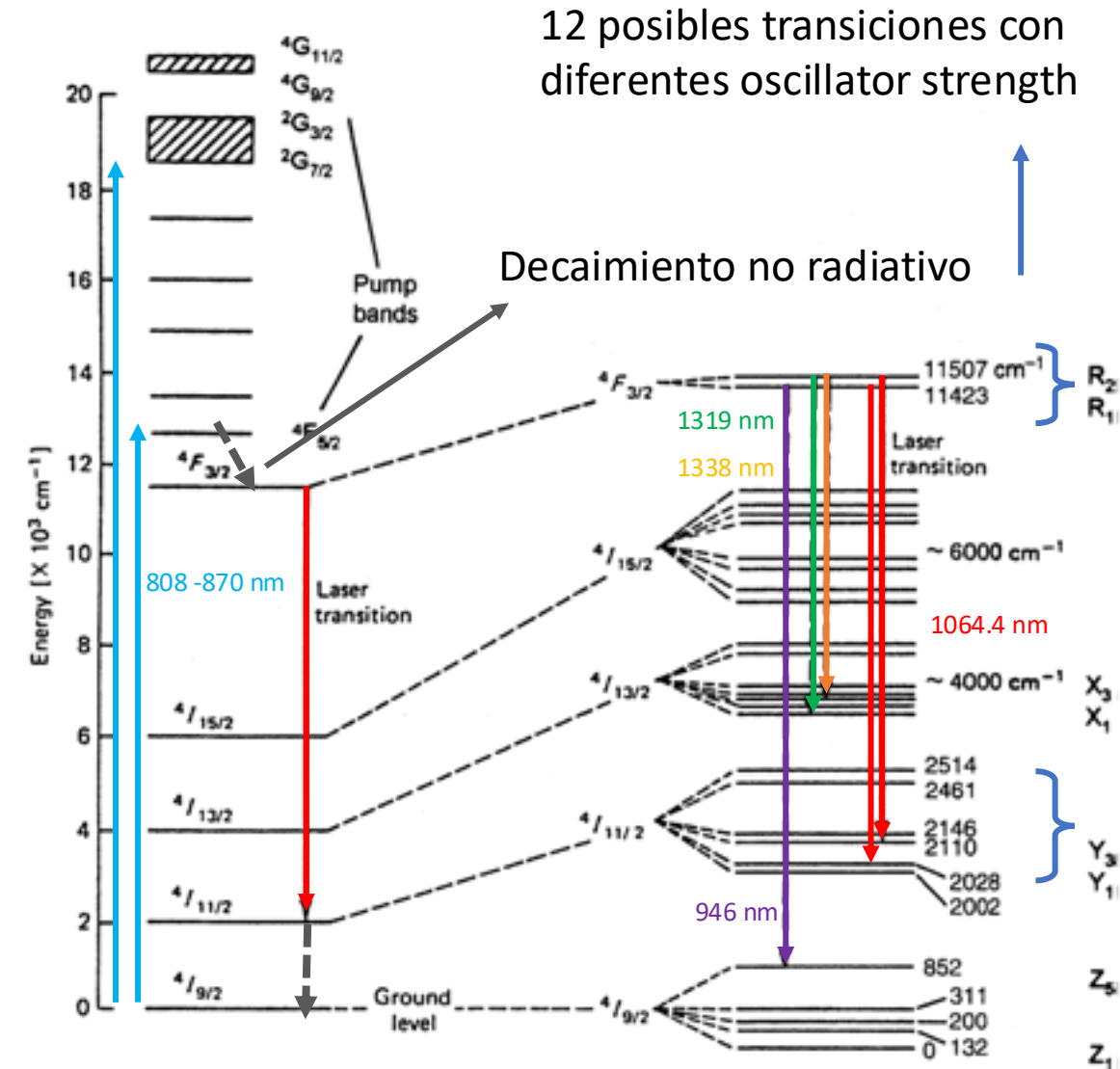
$${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2} \rightarrow BR = 0.6$$

$${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2} \rightarrow BR = 0.25$$

60% del decaimiento radiativo desde el nivel superior ${}^4F_{3/2}$ alimenta transiciones hacia el multiplete ${}^4I_{11/2}$

$$\begin{aligned} \gamma_{rad}({}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}) &= BR({}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}) \times \gamma_{rad}({}^4F_{3/2}) \\ &= BR({}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}) \times Q({}^4F_{3/2}) \gamma_{tot} \end{aligned}$$

Transiciones en Nd:Yag: Branching ratio



Branching ratio: Cálculo para líneas individuales

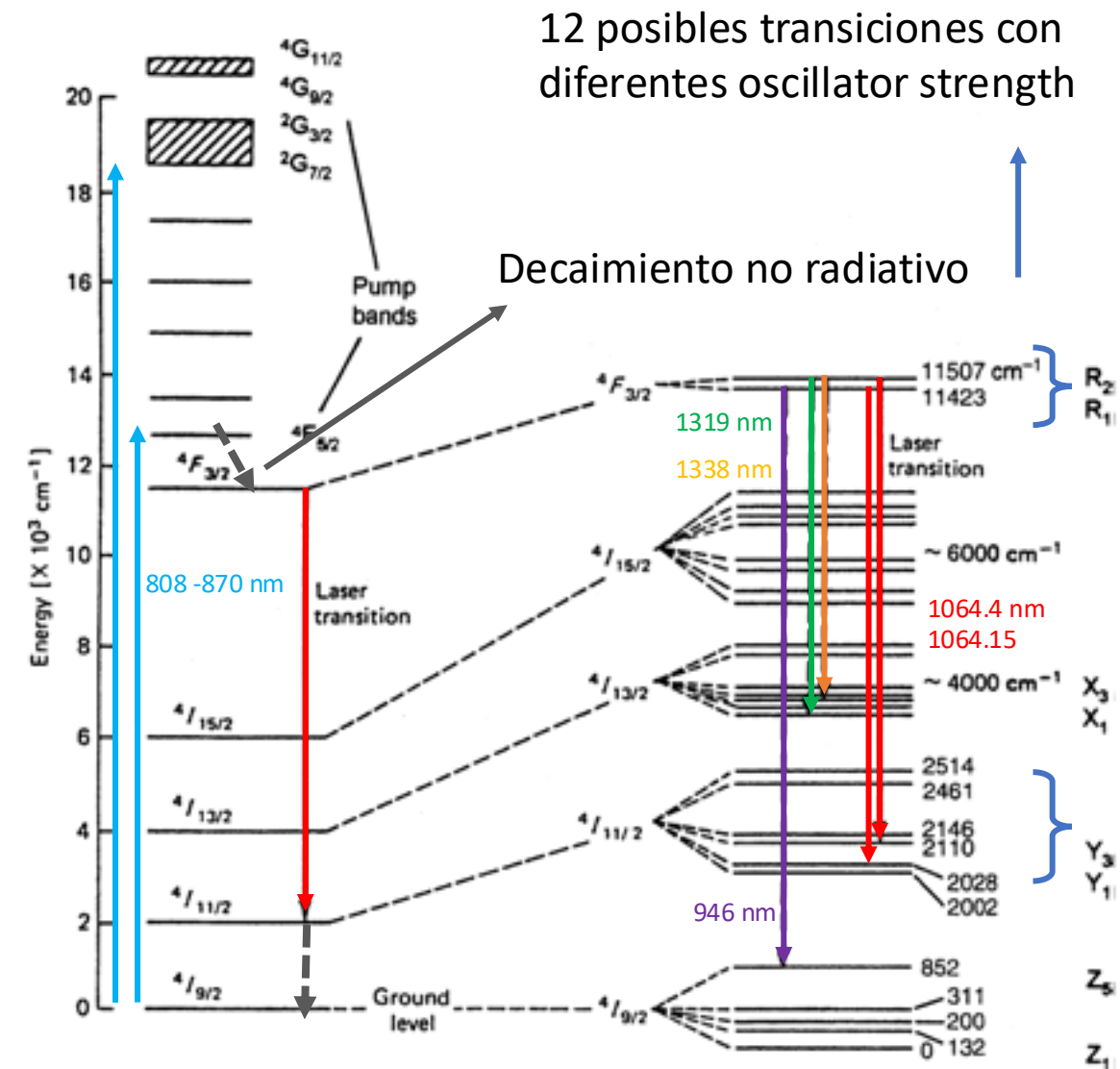
$$BR_{R_2 \rightarrow l^*} = \frac{p_{R_2} A_{R_2 \rightarrow l^*}}{p_{R_1} \sum_{l \in 4I_{11/2}} A_{R_1 \rightarrow l} + p_{R_2} \sum_{l \in 4I_{11/2}} A_{R_2 \rightarrow l}} = \frac{p_{R_2} \gamma_{R_2 \rightarrow l^*}^{rad}}{\gamma_{tot}^{rad}}$$

$$p_R = \frac{N_R}{N} \propto g_R e^{-E_R/kT} \text{ distribución de Boltzmann}$$

$$BR(4F_{3/2} \rightarrow 1064 \text{ nm}) = BR_{R_2 \rightarrow Y_3} + BR_{R_1 \rightarrow Y_2}$$

Las poblaciones de Boltzmann aparecen cuando el nivel superior está desdoblado en varios subniveles Stark y el branching ratio observado depende de cuánto contribuye cada uno de ellos a la emisión total.

Transiciones en Nd:Yag



Transition	Bottom Level (cm^{-1})	Wavelength (nm)	β_{ij}	$\sigma, 10^{-20} \text{ cm}^2$
$^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{13/2}$	3922	1318.4 (R_2)	0.021	1.5
	3933	1335.1 (R_1)	0.015	0.92
	4034	1338.1 (R_2)	0.023	1.5
	2028	1052.1 (R_2)	0.041	2.7
	2002	1051.5 (R_1)	0.091	4.7
$^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{11/2}$	2110	1064.15 (R_2)	0.125	7.1
	2028	1064.4 (R_1)	0.041	1.9
	2146	1068.2 (R_2)	0.040	1.8
	2110	1073.7 (R_2)	0.062	2.6
	2146	1078.0 (R_1)	0.043	1.2
$^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{9/2}$	852	938.5 (R_2)	0.041	0.81
	852	946.4 (R_1)	0.049	1.34

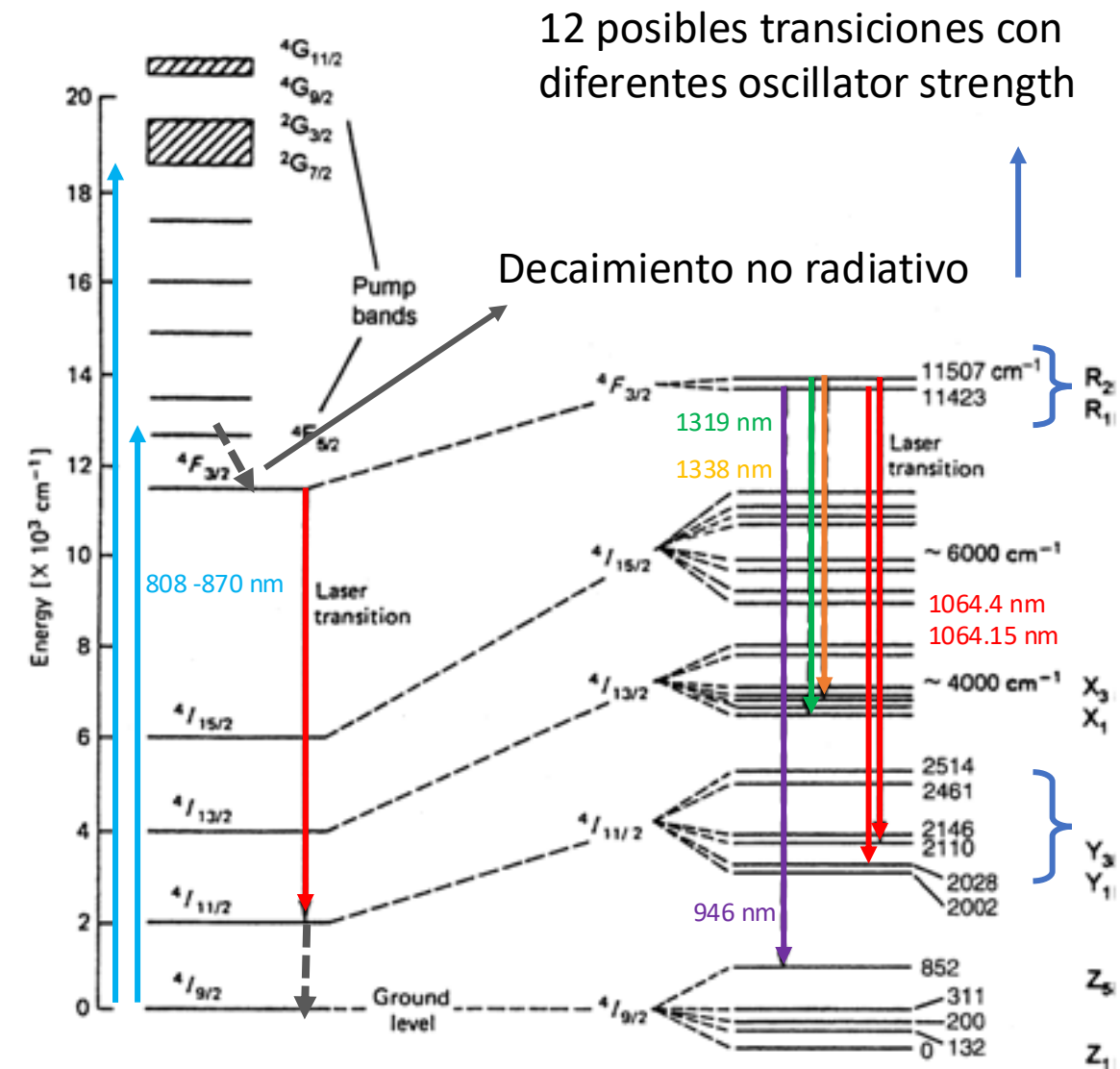
<https://www.szlaser.com/>

$$BR(1064.15) = \frac{p_{R_2} \gamma_{R_2 \rightarrow Y_3}^{rad}}{\gamma_{tot}^{rad}} = \beta_{R_2 \rightarrow Y_3} \times p_{R_2} = 0.125 \times 0.4 = 0.05$$

$$p_{R_2} \sim 0.4, \quad p_{R_1} \sim 0.6 \quad (300K)$$

$$\gamma_{rad}(1064.15 \text{ nm}) = BR(1064.15) \times \gamma_{tot}^{rad}(^4F_{3/2})$$

Transiciones en Nd:Yag



Transition	Bottom Level (cm^{-1})	Wavelength (nm)	β_{ij}	σ , 10^{-20} cm^2
$4F_{3/2} \rightarrow 4I_{13/2}$	3922	1318.4 (R_2)	0.021	1.5
	3933	1335.1 (R_1)	0.015	0.92
	4034	1338.1 (R_2)	0.023	1.5
	2028	1052.1 (R_2)	0.041	2.7
	2002	1051.5 (R_1)	0.091	4.7
$4F_{3/2} \rightarrow 4I_{11/2}$	2110	1064.15 (R_2)	0.125	7.1
	2028	1064.4 (R_1)	0.041	1.9
	2146	1068.2 (R_2)	0.040	1.8
	2110	1073.7 (R_2)	0.062	2.6
	2146	1078.0 (R_1)	0.043	1.2
$4F_{3/2} \rightarrow 4I_{9/2}$	852	938.5 (R_2)	0.041	0.81
	852	946.4 (R_1)	0.049	1.34

$R_2 \rightarrow Y_3(1064.15 \text{ nm})$

$p_{R_2} \sim 0.4$

$BR(1064.15 \text{ nm}) = 0.125 \times 0.4$
 $= 0.05$

$R_1 \rightarrow Y_2(1064.4 \text{ nm})$

$p_{R_1} \sim 0.6$

$BR(1064.4 \text{ nm}) = 0.04 \times 0.6 = 0.024$

$\gamma_{rad}(1064 \text{ nm}) = BR(1064 \text{ nm}) \times \gamma_{tot}^{rad}(4F_{3/2})$

$BR_{tot}(1064 \text{ nm}) \sim 0.05 + 0.024$
 $= 0.074$

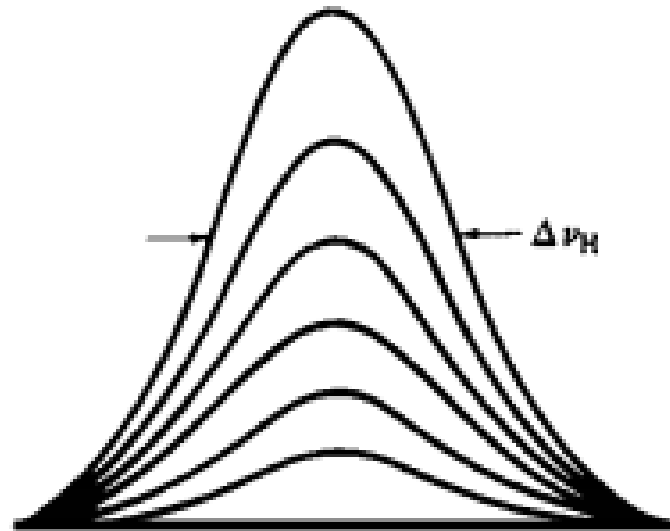


Mecanismos que ensanchan las líneas espectrales y/o reducen el tiempo de vida

En medios reales, la interacción con el entorno puede vaciar población del nivel excitado o ensanchar la línea espectral. Ambos efectos modifican la respuesta óptica del sistema.

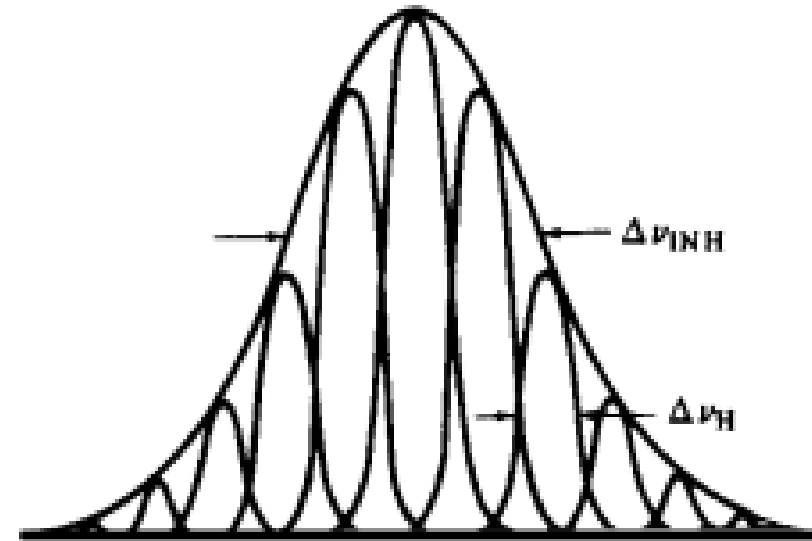
Procesos que reducen el tiempo de vida τ_u .	Significativo en	Tipo
Decaimiento colisional o relajación no radiativa; Átomos, moléculas, electrones o fonones interactúan con el sistema excitado y pueden inducir un decaimiento antes de la emisión espontánea.	Gases, plasmas, sólidos	Ensanchamiento homogéneo (perfil Lorentziano)
Procesos que NO cambian el tiempo de vida, pero sí ensanchan la línea γ_u		
Colisiones defasantes Producen saltos de fase aleatorios sin intercambio de energía.	Gases, líquidos, sólidos	Ensanchamiento no homogéneo (perfil no Lorentziano)
Desorden estructural/entornos locales distintos/ sólidos amorfos Diferentes sitios cristalinos, tensiones, defectos o desorden amorfo generan frecuencias de transición ligeramente distintas en distintas regiones del material.	sólidos	
Doppler La dispersión en velocidades en un gas produce corrimiento en frecuencias distinto para cada partícula.	Gases, plasmas	
Isótopos Diferentes isótopos presentan energías de transición ligeramente distintas.	Gases, plasmas	

Homogéneo

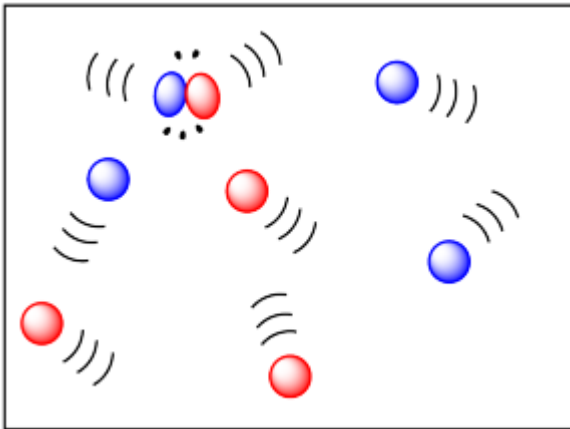


Todos los emisores tienen la misma frecuencia central y el mismo ancho de línea.

Inhomogéneo



Cada emisor presenta una frecuencia de resonancia ligeramente distinta. La línea total resulta de la superposición de muchas líneas homogéneas individuales.



Las colisiones con partículas del medio ocurren en tiempos muy cortos ($\sim 10^{-12} s$) y perturban al átomo o ion excitado.

Durante esa interacción pueden modificarse transitoriamente sus niveles de energía y su fase.

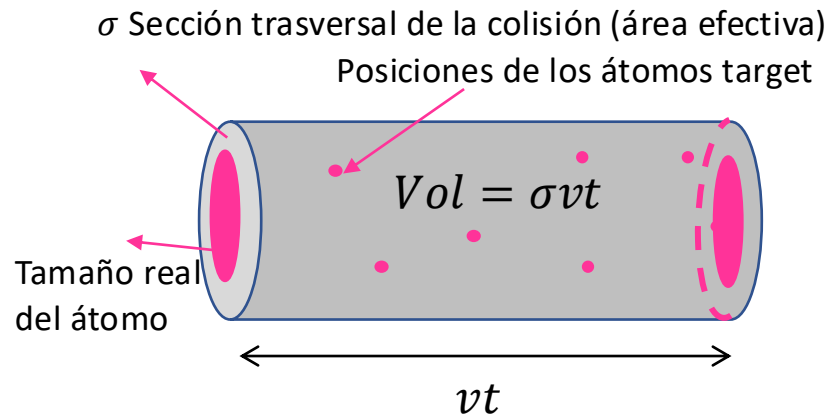
Decaimiento colisional

Si durante la colisión el átomo excitado transfiere parte de energía al medio, y se desexcita sin emitir fotones, el tiempo de vida del nivel superior disminuye

Colisión defasante

Si durante la colisión el átomo no se desexcita, no pierde energía, pero sí pierde la “memoria” de la fase. Cuando decae posteriormente, puede emitir un fotón, aunque ya sin una fase bien definida respecto de la oscilación previa. En este caso no cambia el tiempo de vida del nivel, pero sí aumenta el ancho de línea.

T_1^u tiempo medio entre colisiones o tiempo característico de desexcitación colisional.



η = número de átomos/ volumen

$N = \sigma vt \eta$ (cantidad total de átomos)

Camino libre medio entre colisiones $\ell = \frac{vt}{N} = \frac{1}{\sigma\eta}$

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

La dispersión en energías es $T_1^u \Delta E_u \sim \hbar \rightarrow T_1^u \Delta \nu_u \sim 2\pi$

$$T_1^u = \frac{\ell}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\sigma\eta} \sqrt{\frac{m}{3k_B T}}$$

$$\Delta \nu^{col} \sim \frac{1}{2\pi T_1^u} \propto \sigma\eta \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Colisiones

- Los átomos interactúan por choques con los otros átomos que se encuentran en el entorno.
- Estas colisiones pueden provocar que los átomos realicen transiciones al nivel inferior sin emitir luz. La energía se transmite al átomo con el cual colisiona, conservando energía y momento totales del sistema.
- Como consecuencia el tiempo de decaimiento de los niveles excitados disminuye.

$$\gamma_u^{rad} = \sum_i A_{ui} \qquad \gamma_u^{col} = \frac{1}{T_1^u}$$

Decaimiento colisional, desexcitación colisional, despoblación colisional..

$$\gamma_u = \gamma_u^{rad} + \gamma_u^{col} \qquad \tau_u = \frac{1}{\gamma_u} = \frac{1}{\gamma_u^{rad} + \gamma_u^{col}}$$

Ancho de línea total, considerando los niveles u y l ($\hbar\Delta\nu_{ul}^T = \hbar\gamma_{ul}^T = \hbar(\gamma_u + \gamma_l)$)

$$\Delta\nu_{ul}^T = \frac{1}{2\pi}(\gamma_u + \gamma_l) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li} + \frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l}\right) = \Delta\nu_{ul}^N + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l}\right)$$

$$\Delta\nu_{ul}^T = \Delta\nu_{ul}^N + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l} \right) = \Delta\nu_{ul}^N + \Delta\nu_{ul}^{col}$$

Veremos más adelante:

Para producir emisión laser se requiere un tiempo de vida τ_u largo. Si disminuye por colisiones, además de ensanchar la línea, no se logra inversión de población.

En un medio láser interesa que la desexcitación colisional sea despreciable frente a la radiativa: $\Delta\nu_{ul}^{col} \ll \Delta\nu_{ul}^N$

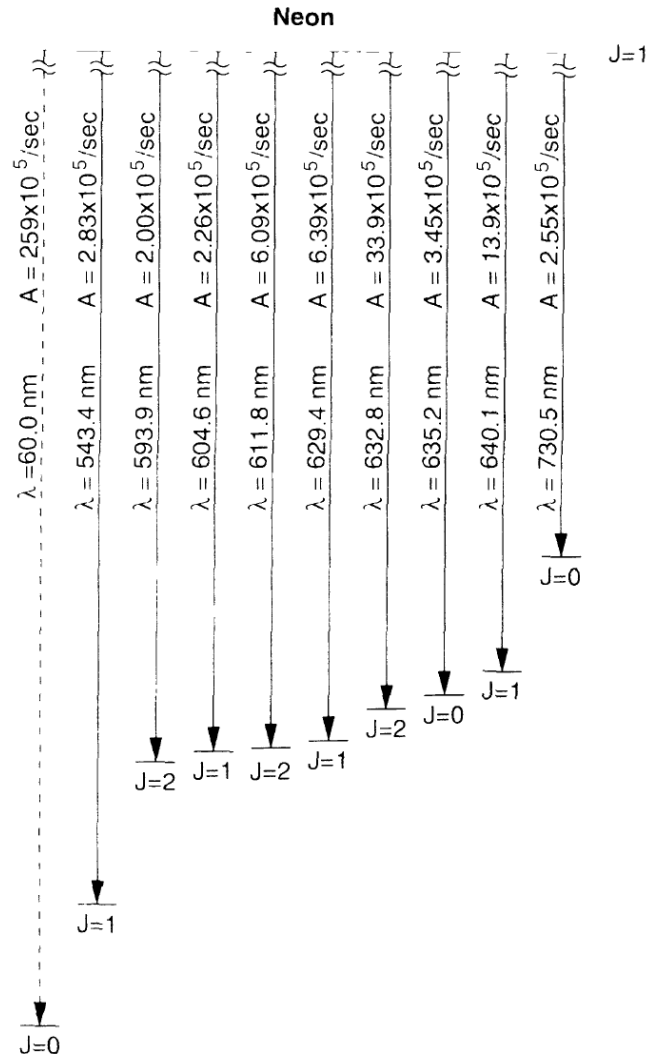
Tiempos de decaimiento asociados con despoblación colisional

Gases atómicos o moleculares: puede ocurrir por colisiones de la especie excitada con átomos, moléculas, electrones o iones del medio

γ_u^{col} aumenta con la presión (a mayor presión, menor camino libre medio y mayor probabilidad de colisión.)

Plasmas de alta densidad: desexcitación colisional con electrones

$\gamma_u^{col} \sim \frac{1}{E_u - E_l}$ si los niveles energéticos son muy cercanos, la probabilidad realizar una transición colisional aumenta



Láser de He-Ne

Especie activa: Neon

Gas auxiliar/buffer: He

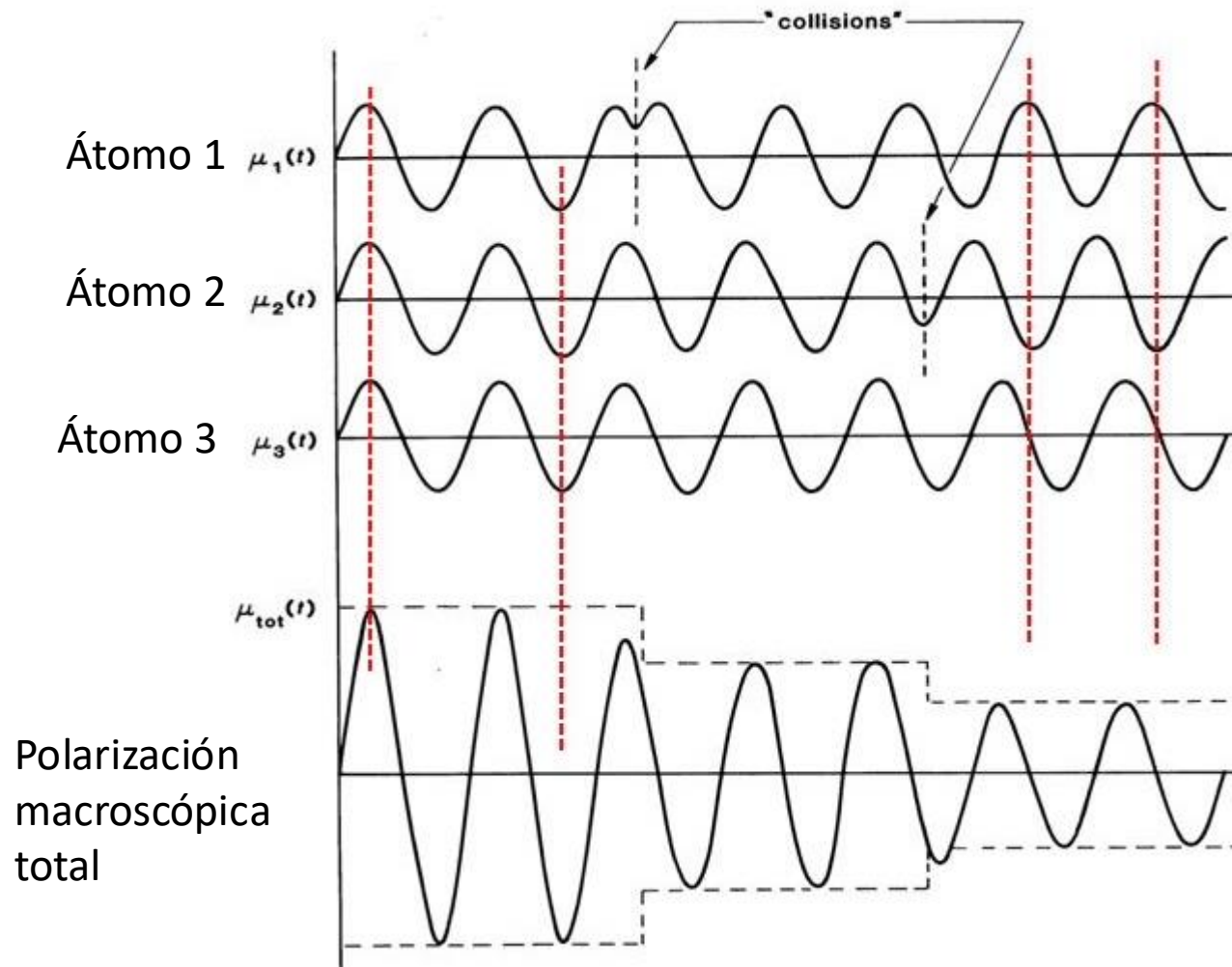
$$\tau_u^{rad} = \frac{1}{\sum_i A_{ui}} = \frac{1}{332.37 \times 10^5 \text{ s}^{-1}} = 3.01 \times 10^{-8} \text{ s} = 30.1 \text{ ns}$$

Aumentando la presión de He

La tasa de relajación del nivel excitado γ_u de Ne aumenta en un factor $7.5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ por cada Torr de He

En algunos láseres, como el CO_2 , este mismo mecanismo puede ser útil si favorece la despoblación colisional del nivel inferior.

Colisiones desfasantes (homogéneo)



- Las colisiones desfasan la oscilación dipolar sin cambiar apreciablemente su amplitud individual.
- No se reduce la población del nivel superior

Pero el desfase reduce la suma coherente del campo total.

La pérdida de sincronización entre emisores reduce la suma coherente del campo total, que decae típicamente de forma exponencial.

Colisiones desfasantes (homogéneo)

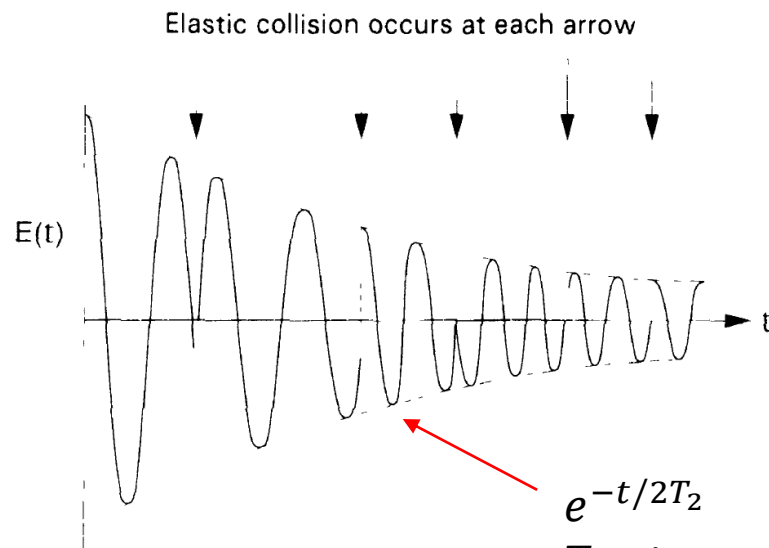
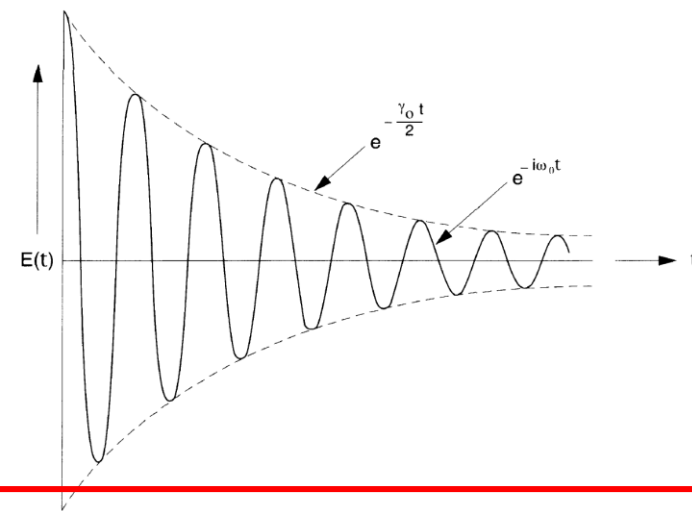


Figure 4-9 Phase interruptions of a decaying electromagnetic wave due to dephasing collisions

$$e^{-t/2T_2}$$

T_2 : tiempo característico de las colisiones desfasantes



Calcular el espectro de Fourier correspondiente a los dos patrones de emisión

$$\Delta\nu_{ul}^T = \frac{1}{2\pi}(\gamma_u + \gamma_l) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li} + \frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l} + \frac{2}{T_2} \right) = \overset{\text{Natural}}{\Delta\nu_{ul}^N} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l} + \frac{2}{T_2} \right)$$

Decaimiento colisional
(cambia tiempo de vida)

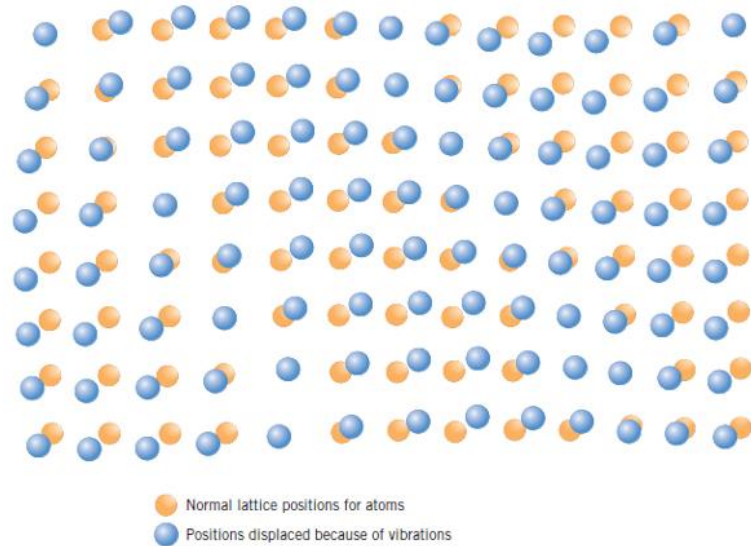
Colisiones desfasantes (no cambia tiempo de vida)

Si T_2 es suficientemente corto, CD puede superar el ancho natural³⁵

Decaimiento colisional (homogéneo)



En sólidos, la interacción con la red cristalina puede producir desexcitación no radiativa y ensanchamiento homogéneo (colisiones defasantes).



distancias interatómicas

$$\Delta x \sim 5 \times 10^{-10} m$$

Longitud de onda mínima de las vibraciones

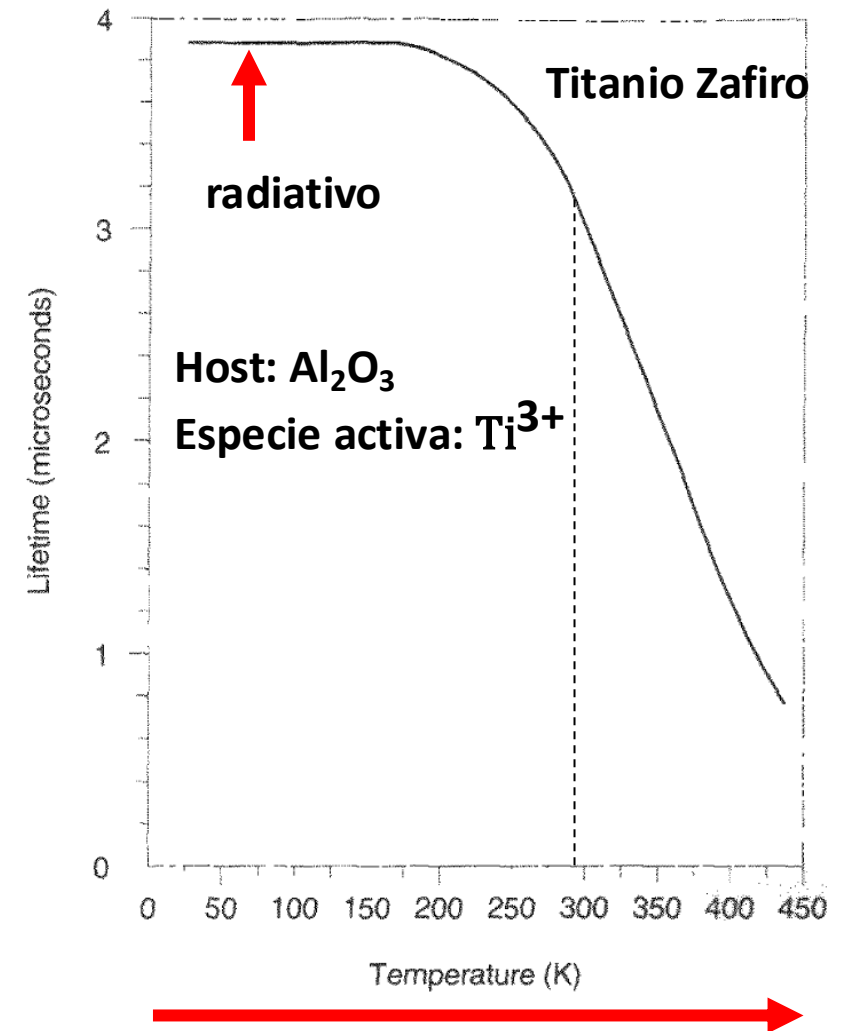
$$\lambda_{\min} \sim 2 \Delta x \sim 10^{-9} m$$

Velocidad de propagación de fonones a temperatura ambiente

$$v_{ph} = \sim (10^3 - 10^4) m/s \rightarrow f \sim \frac{v_{ph}}{\lambda_{\min}} \sim (10^{12} - 10^{13}) s$$

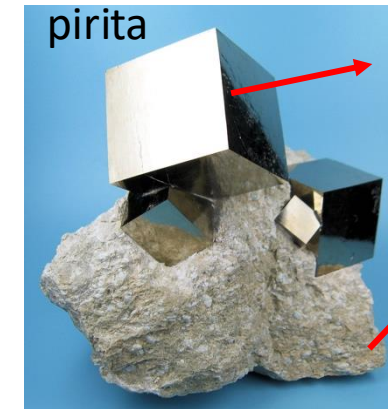
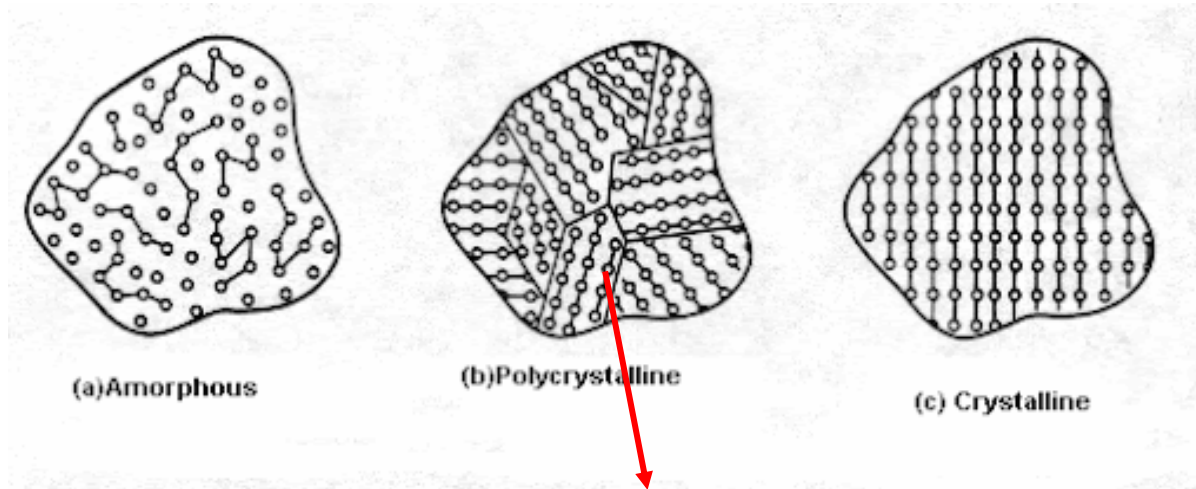
Tiempo de interacción

$$T \sim \frac{1}{f} \sim (10^{-13} - 10^{-12}) s$$



Al aumentar la temperatura, aumenta la población de fonones y se favorecen los canales no radiativos.

Ensanchamiento inhomogeneo por desorden estructural



cristalina

amorfa



policristalina

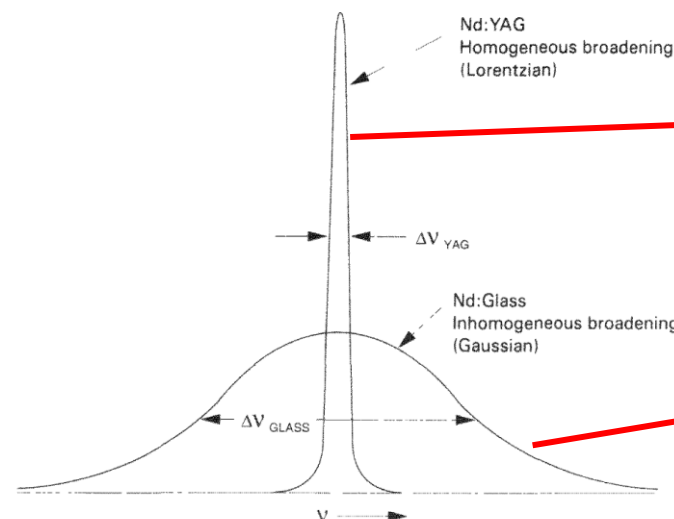
Las diferencias de entorno local, tensiones, defectos o desorden estructural producen pequeños corrimientos en los niveles de energía y, por lo tanto, en las frecuencias de emisión.

Laseres de Neodimio

Nd: vidrio

Nd: Yag (cristal)

$$\frac{\Delta\nu_{\text{vidrio}}}{\Delta\nu_{\text{YAG}}} \sim 40 - 60$$



Cristal

los iones activos ven entornos muy similares y emiten alrededor de una misma frecuencia central

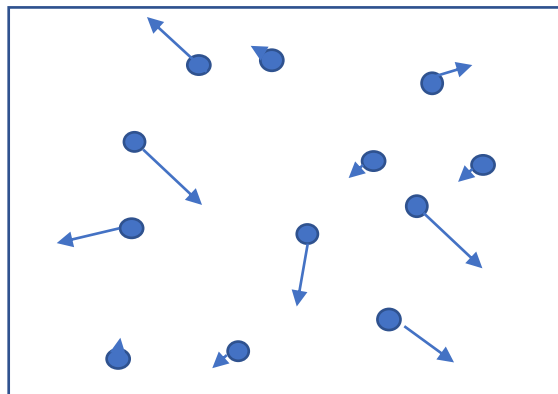
Amorfo:

La superposición de muchas frecuencias centrales ligeramente distintas ensancha la línea total y reduce su altura máxima.

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)



Átomos en un gas en equilibrio térmico se mueven aleatoriamente en todas las direcciones, con velocidades relacionadas con su temperatura



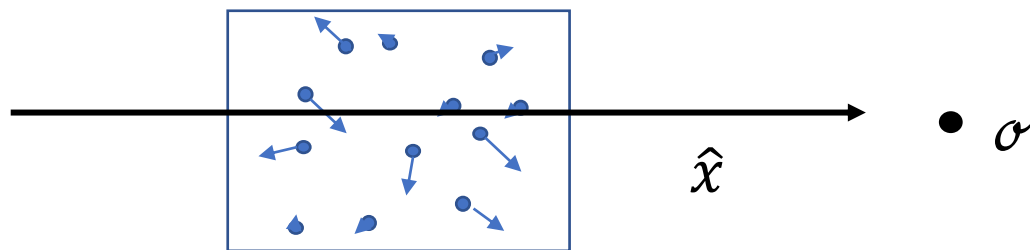
Distribución de Maxwell Boltzmann

Probabilidad de que la velocidad en $\hat{x}$ se encuentre entre v_x y $v_x + dv_x$, en $\hat{y}$ se encuentre entre v_y y $v_y + dv_y$ y en $\hat{z}$ se encuentre entre v_z y $v_z + dv_z$

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{M}{2\pi k_b T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\} dv_x dv_y dv_z$$

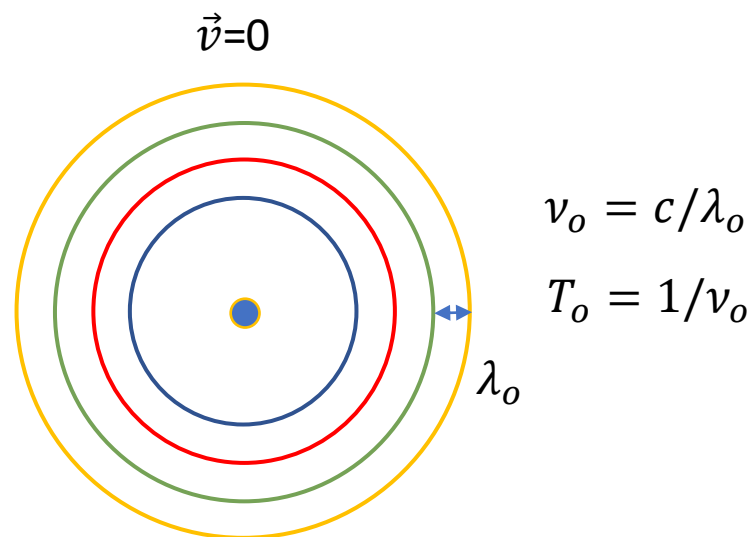
Consideramos que

- El ancho de línea natural es despreciable frente a la dispersión de frecuencias producida por Doppler $\Delta\nu^N \ll \Delta\nu_D$
- Los átomos que contribuyen al ancho de línea son solo los que se mueven en la dirección de observación

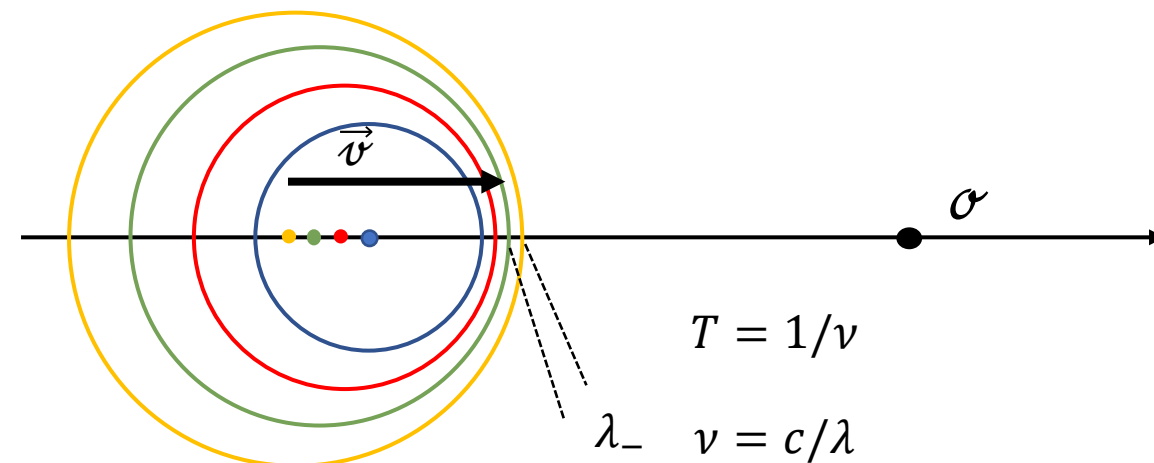


El observador ve una frecuencia de emisión que cambia según la velocidad en que se mueve el átomo

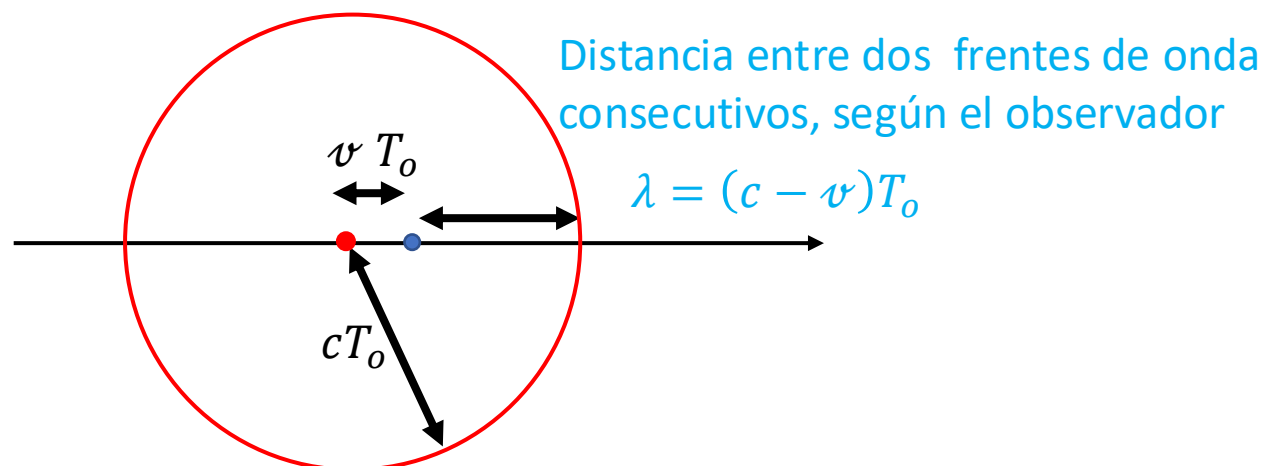
Repaso efecto Doppler



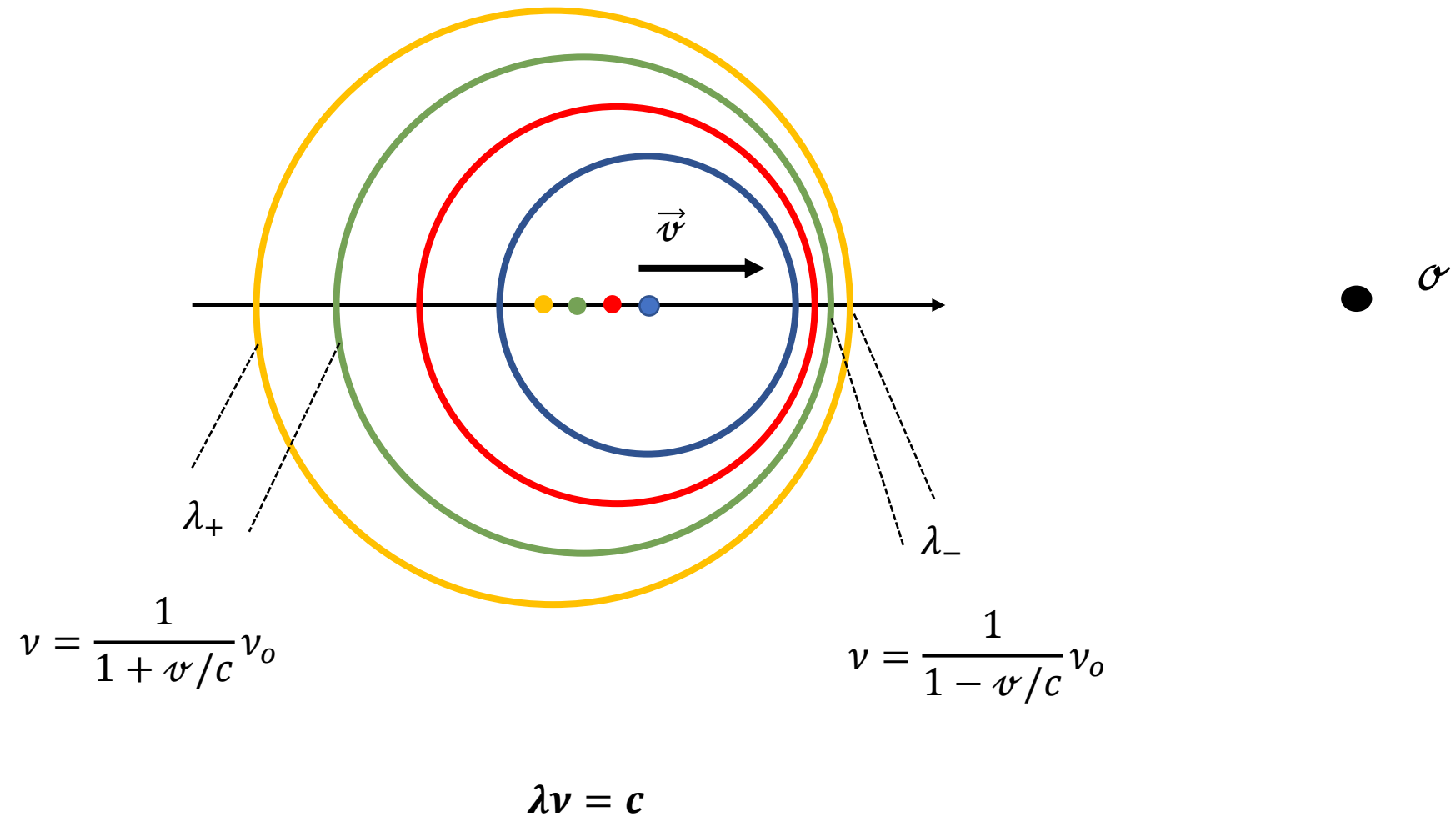
Cada punto de color marca la posición de la fuente cuando emite un nuevo frente de onda. Entre dos emisiones sucesivas transcurre un tiempo T_o



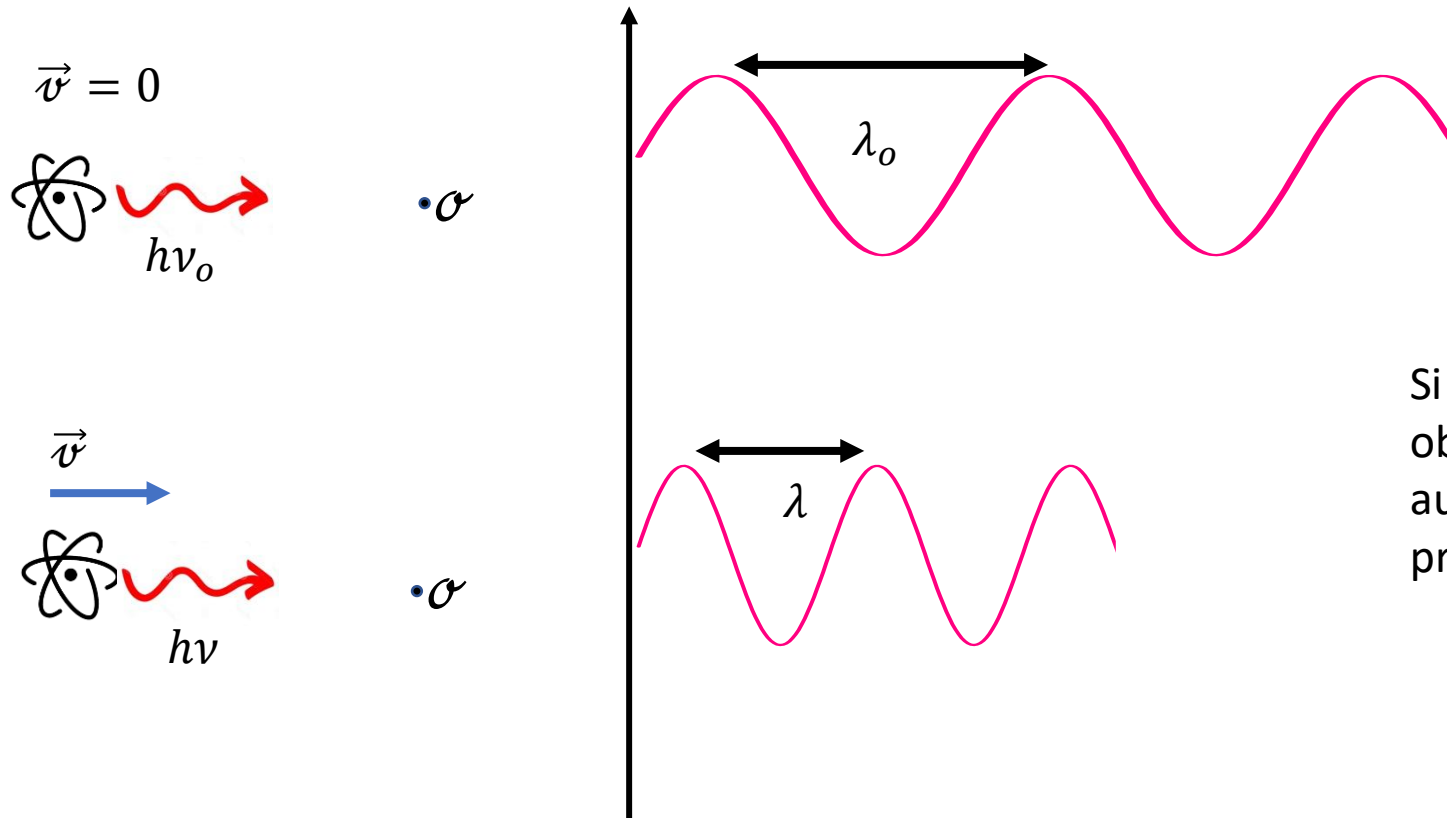
La Fuente emite una frente de onda y un período después T_o , habiéndose desplazado una distancia vT_o , emite un segundo frente de ondas



$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v)T_o} = \frac{1}{1 - v/c} v_o$$



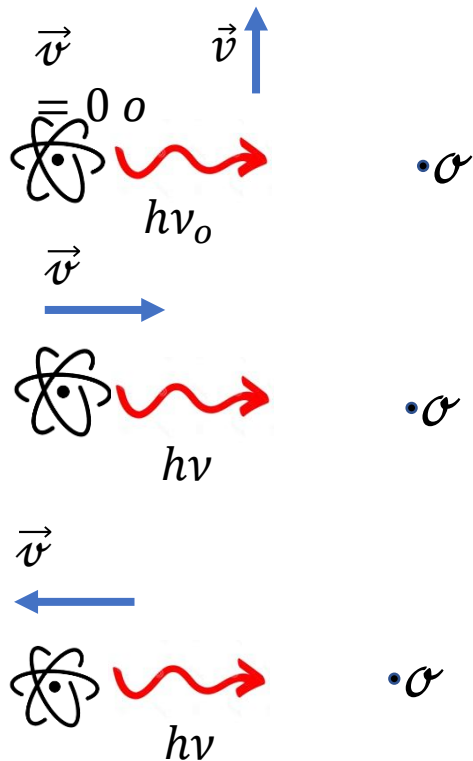
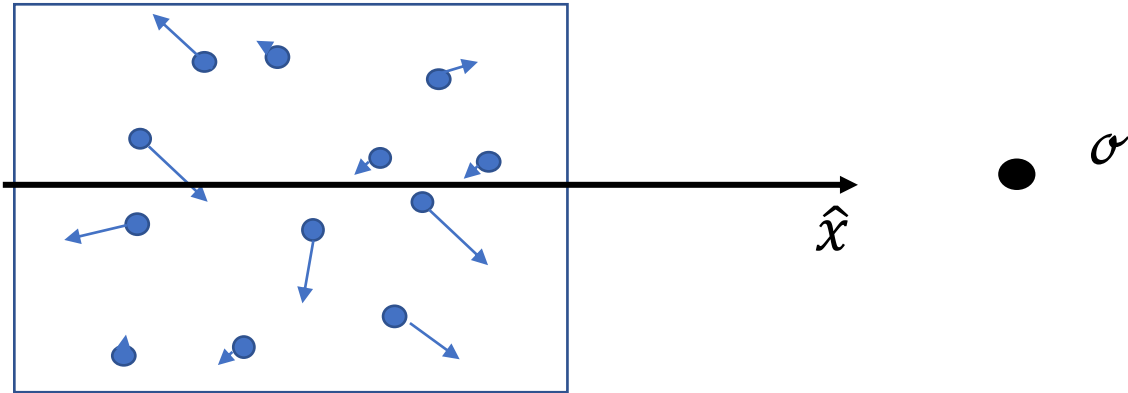
Repaso efecto Doppler



$$c = \lambda_o \nu_o = \lambda \nu$$

Si la fuente se acerca, la longitud de onda observada disminuye y la frecuencia observada aumenta, de modo que la velocidad de propagación sigue siendo c .

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)



Tomando. $\vec{v} = v_x \hat{x}$

átomo se acerca al observador

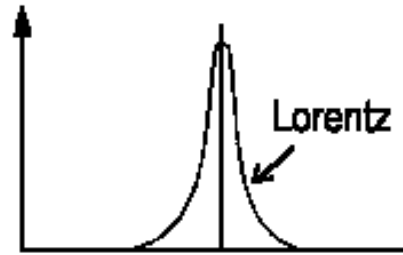
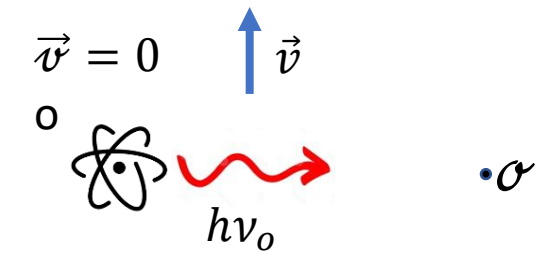
$$\nu = \frac{1}{(1 - v_x/c)} \nu_o \approx \nu_o \left[1 + \frac{v_x}{c} + \cancel{\left(\frac{v_x}{c} \right)^2} + \dots \right] \approx \nu_o \left[1 + \frac{v_x}{c} \right]$$

átomo se aleja del observador

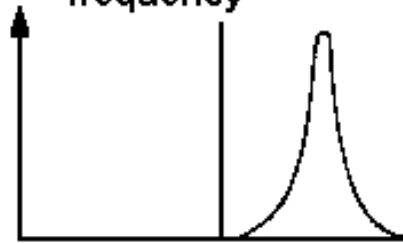
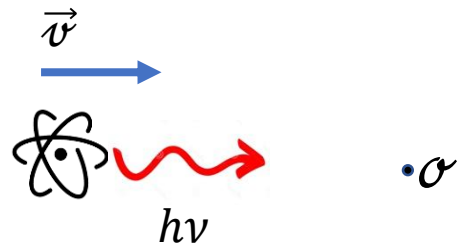
Despreciamos efectos relativistas

$$\nu = \frac{1}{(1 + v_x/c)} \nu_o \approx \nu_o \left[1 - \frac{v_x}{c} - \cancel{\left(\frac{v_x}{c} \right)^2} + \dots \right] \approx \nu_o \left[1 - \frac{v_x}{c} \right]$$

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)

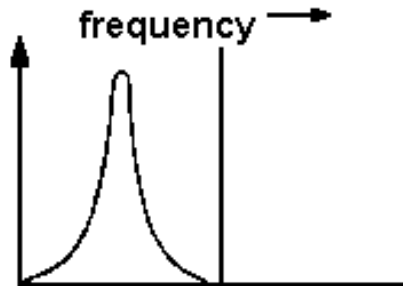
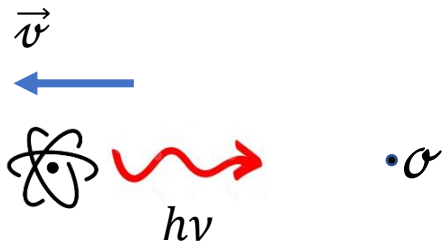


frequency $\rightarrow$



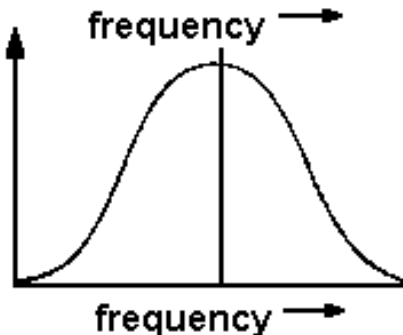
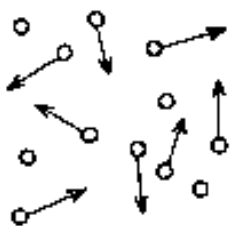
átomo se acerca al observador

$$\nu \approx \nu_0 \left[1 + \frac{v_x}{c} \right]$$



átomo se aleja del observador

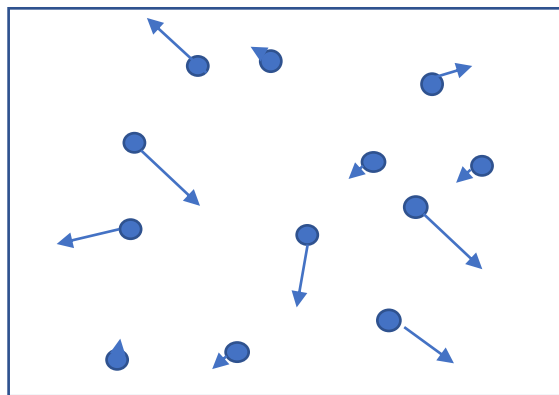
$$\nu \approx \nu_0 \left[1 - \frac{v_x}{c} \right]$$



Átomos en un gas en equilibrio térmico se mueven aleatoriamente en todas las direcciones, con velocidades relacionadas con su temperatura

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8K_B T}{M\pi}}$$

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)



Distribución de Maxwell Boltzmann

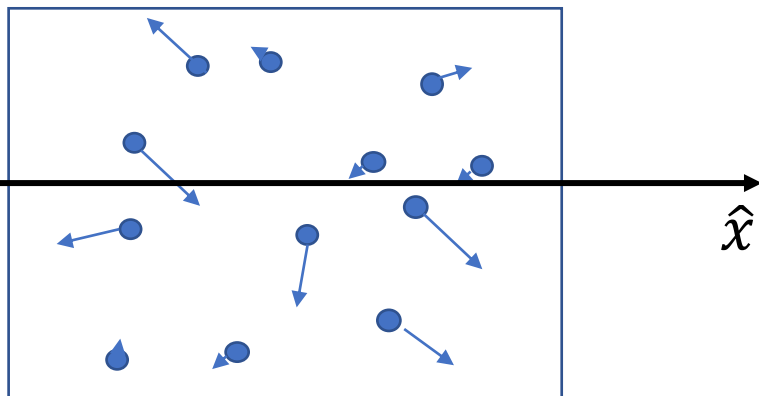
Densidad de probabilidad de que las componentes de velocidad se encuentren entre v_x y $v_x + dv_x$, entre v_y y $v_y + dv_y$ y entre v_z y $v_z + dv_z$

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\ = \left(\frac{M}{2\pi k_b T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\} dv_x dv_y dv_z$$

Consideramos que

- El ancho de línea natural es despreciable frente a la dispersión de frecuencias producida por Doppler $\Delta\nu^N \ll \Delta\nu_D$
- Los átomos que contribuyen al ancho de línea son solo los que se mueven en la dirección de observación

Probabilidad de encontrar frecuencias entre ν y $\nu + dv$



$$\nu \approx \nu_o \left[1 + \frac{v_x}{c} \right] \quad dv = \frac{\nu_o}{c} dv_x$$

$$v_x = (\nu - \nu_o) \frac{c}{\nu_o} \longrightarrow dv_x = \frac{c}{\nu_o} d\nu$$

Integrando sobre todos los valores posibles de v_y y v_z

$$v_x = (v - v_o) \frac{c}{v_o} \quad dv_x = \frac{c}{v_o} dv$$

$$G(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{M}{2\pi k_b T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\} dv_x dv_y dv_z$$

$$G(v)dv = \left(\frac{M}{2\pi k_b T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} (v_y^2 + v_z^2) \right\} dv_y dv_z \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} (v - v_o)^2 \left(\frac{c}{v_o} \right)^2 \right\} \frac{c}{v_o} dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} v_z^2 \right\} dv_z = \left(\frac{2\pi k_b T}{M} \right)^{1/2} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{M}{2k_b T} v_y^2 \right\} dv_y = \left(\frac{2\pi k_b T}{M} \right)^{1/2}$$

$$G(\nu)d\nu = \left(\frac{M}{2\pi k_b T}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi k_b T}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi k_b T}{M}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{M}{2k_b T} (\nu - \nu_o)^2 \left(\frac{c}{\nu_o}\right)^2\right\} \frac{c}{\nu_o} d\nu$$

$$G(\nu)d\nu = \left(\frac{M}{2\pi k_b T}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{M}{2k_b T} (\nu - \nu_o)^2 \left(\frac{c}{\nu_o}\right)^2\right\} \frac{c}{\nu_o} d\nu$$

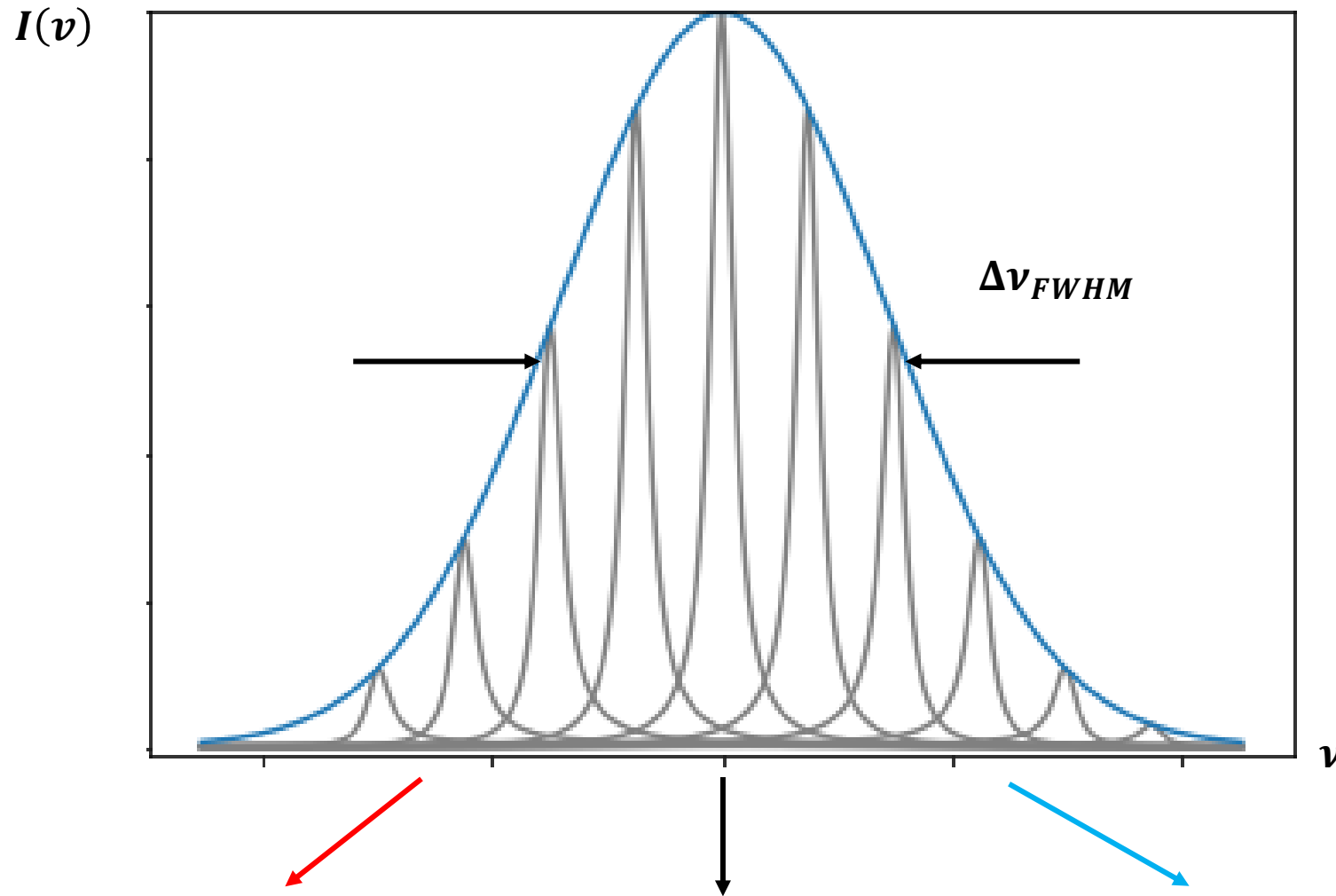
densidad de probabilidad de encontrar frecuencias de emisión entre ν y $\nu + d\nu$

Intensidad de la línea de emisión

$$I(\nu) = I_o G(\nu) = \left(\frac{M}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\nu_o}\right) I_o \exp\left\{-\frac{M}{2k_b T} (\nu - \nu_o)^2 \left(\frac{c}{\nu_o}\right)^2\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu) d\nu = I_o$$

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)



$$I(v) \propto \exp \left[\frac{-(v - v_o)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\sigma = \frac{v_o}{c} \left(\frac{k_b T}{M} \right)^{1/2}$$

$$\Delta v_D = \Delta v_{FWHM} = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma$$

$$\Delta v_D = 7.16 \times 10^{-7} v_o \sqrt{\frac{T}{M_a}}$$

M_a número másico del átomo

Átomos que se alejan del observador

Átomos que se mueven transversales a la dirección de observación

Átomos que se acercan al observador

Intensidad de la línea de emisión

$$I(\nu) = \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\nu_o} \right) I_o \exp \left\{ -\frac{M}{2k_B T} (\nu - \nu_o)^2 \left(\frac{c}{\nu_o} \right)^2 \right\}$$

$$\Delta\nu_D = \Delta\nu_{FWHM} = 2\nu_o \sqrt{\frac{\ln(2) 2 k_B T}{M c^2}}$$

Densidad espectral de población del nivel superior: Número de átomos del nivel superior por unidad de volumen y por unidad de frecuencia alrededor de ν

$$N_u(\nu) = 2 \left(\frac{\ln(2)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N_u}{\Delta\nu_D} \right) \exp \left\{ -\frac{4\ln(2)}{\Delta\nu_D^2} (\nu - \nu_o)^2 \right\}$$

$$N_u = \int_0^{\infty} N_u(\nu) d\nu$$

Número de transiciones por unidad de volumen, tiempo y frecuencia $N_u(\nu) A_{ul}$

$$N_u(\nu) A_{ul} = 2 \left(\frac{\ln(2)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N_u A_{ul}}{\Delta\nu_D} \right) \exp \left\{ -\frac{4\ln(2)}{\Delta\nu_D^2} (\nu - \nu_o)^2 \right\}$$

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)




$$\Delta\nu_{ul}^N = \frac{(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li})}{2\pi} = \frac{\gamma_{ul}^T}{2\pi} \propto \frac{1}{\lambda_{ul}^2}$$

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_o \sqrt{\frac{T}{M_a}} \propto \nu_{ul} \frac{1}{\lambda_{ul}} \sqrt{\frac{T}{M_a}}$$

$$\frac{\Delta\nu_{ul}^N}{\Delta\nu_D} \propto \frac{1}{\lambda_{ul}} \sqrt{\frac{M_a}{T}}$$

$\Delta\nu_{ul}^N \ll \Delta\nu_D$, λ_{ul} grandes, átomos livianos, temperaturas altas

En la mayoría de los láseres gaseosos, el ensanchamiento Doppler suele ser mucho mayor que el ancho natural de línea.

Doppler versus Natural Broadening

Laser species	λ (nm)	f	A (s ⁻¹)	$\Delta\nu^N$ (Hz)	$\Delta\nu_D$ (Hz)
Neon (He–Ne)	632.8	0.012	3.4×10^6	1.4×10^7	1.5×10^9
Argon ion	488.0	0.418	7.8×10^7	4.5×10^8	2.7×10^9
Cadmium (He–Cd)	441.6	0.006	1.4×10^6	4.5×10^7	1.1×10^9
Copper	510.5	0.005	2.0×10^6	3.6×10^5	2.3×10^9

Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo)



$\Delta\nu_{ul}^N \sim \Delta\nu_D$, λ_{ul} cortas (al UV), átomos pesados, temperaturas bajas
(Ej. Plasmas fríos)

Perfil de Voigt

$$\Delta\nu^N \approx \Delta\nu_D = 0.13 \Delta \quad \Delta = \frac{4\pi\nu_o}{c} \left(\frac{2k_b T}{M} \right)^{1/2}$$

$$I_V(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} I^N(\nu') I^D(\nu - \nu') d\nu'$$

$$I\left(\nu_o - \nu, \frac{\gamma_{ul}^T}{\Delta}\right) = I_o \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\nu - \nu'_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2} \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{\Delta}\right) \exp\left\{-\frac{16\pi^2}{\Delta^2} (\nu'_o - \nu_o)^2\right\} d\nu'_o$$



$$I^N(\nu) = I_o \frac{\gamma_{ul}^T / 4\pi^2}{\left[(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2 \right]}$$

$$I^D(\nu) = \left(\frac{M}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{\nu_o}\right) I_o \exp\left\{-\frac{M}{2k_b T} (\nu - \nu_o)^2 \left(\frac{c}{\nu_o}\right)^2\right\}$$

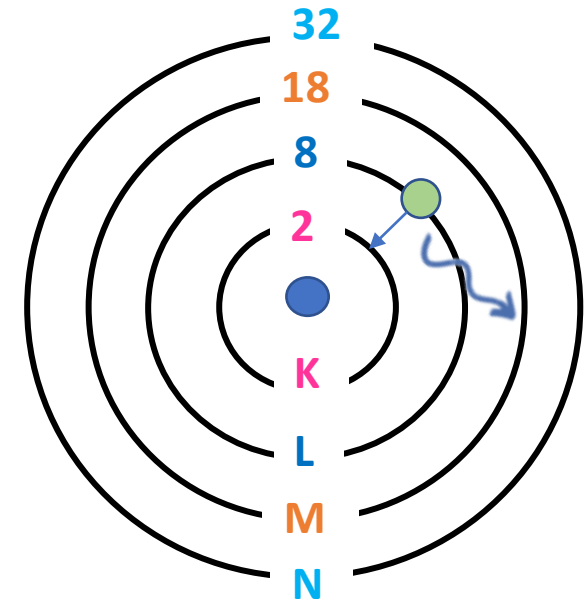
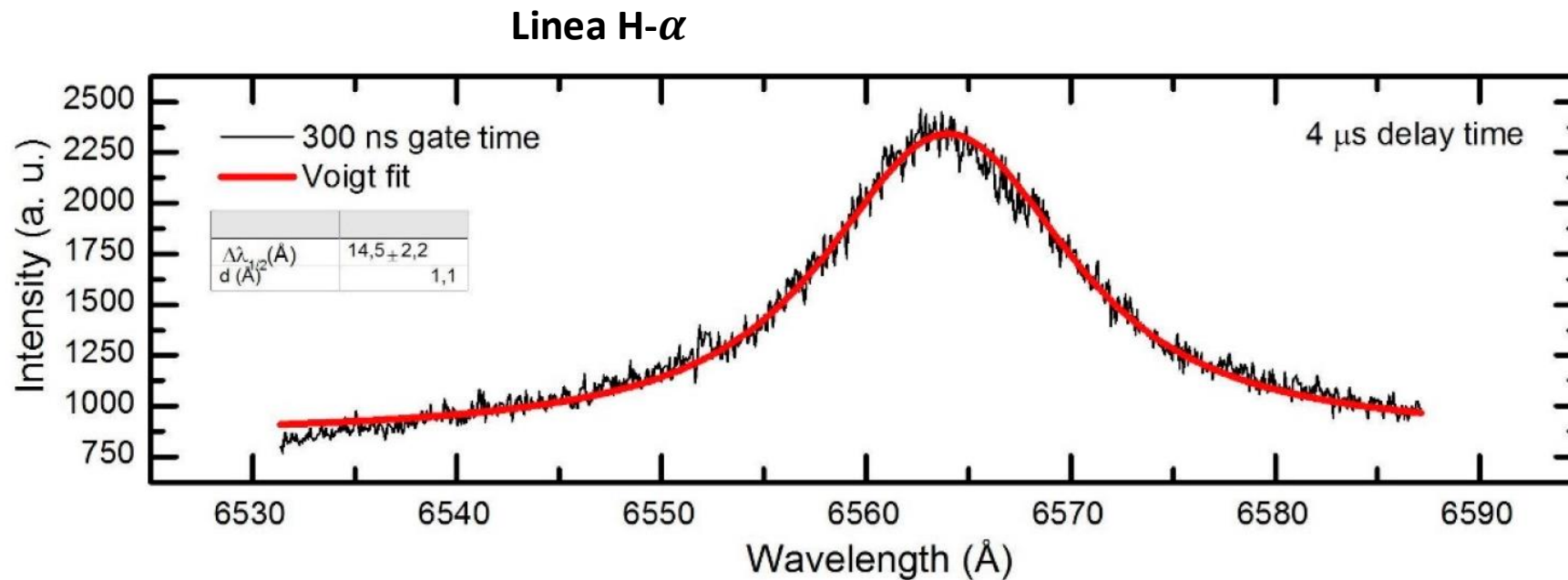


Simular el espectro de Voigt para distintos valores de γ_{ul}^T y Δ

Un ejemplo de ajuste con perfil de Voigt



Nd:Yag laser (10 ns, $\lambda = 1064$ nm, 2.5 J/ pulso) enfocado sobre film de aluminio generando un plasma



Linea H- α : los átomos de Al fueron ionizados hasta quedarse con 1 e (H-like)
La línea H- α es la transición K α : el L(n=2) , orbital p a k Shell (n=1)

Ensanchamiento isotópico (inhomogéneo)



En los gases conviven naturalmente distintas especies isotópicas

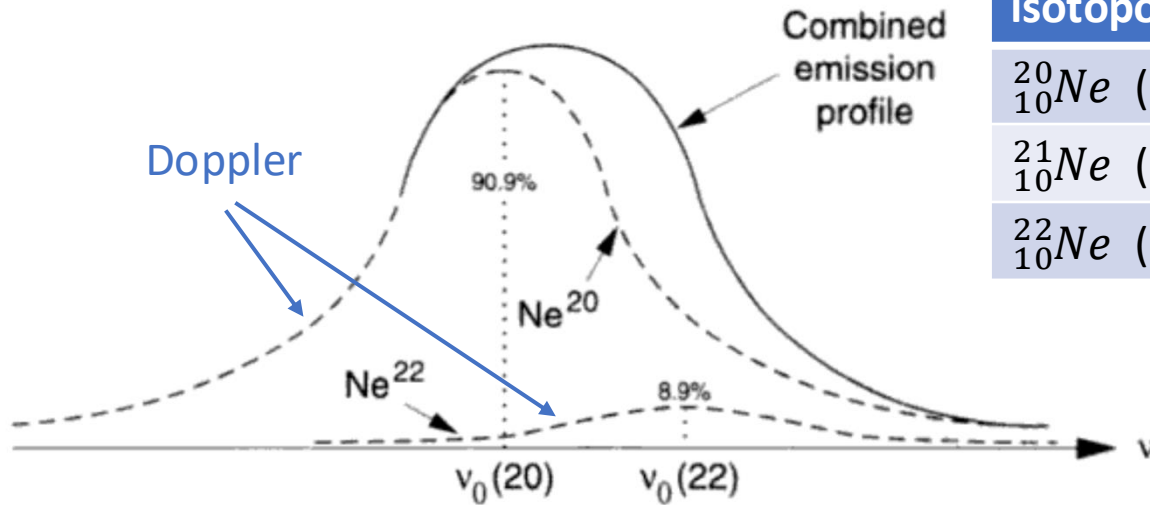
Isótopos:

Mismo número de protones Z

Distinto número de neutrones N

$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X$ $Z = p^+$ número atómico
 $A = p^+ + n^0$ número másico

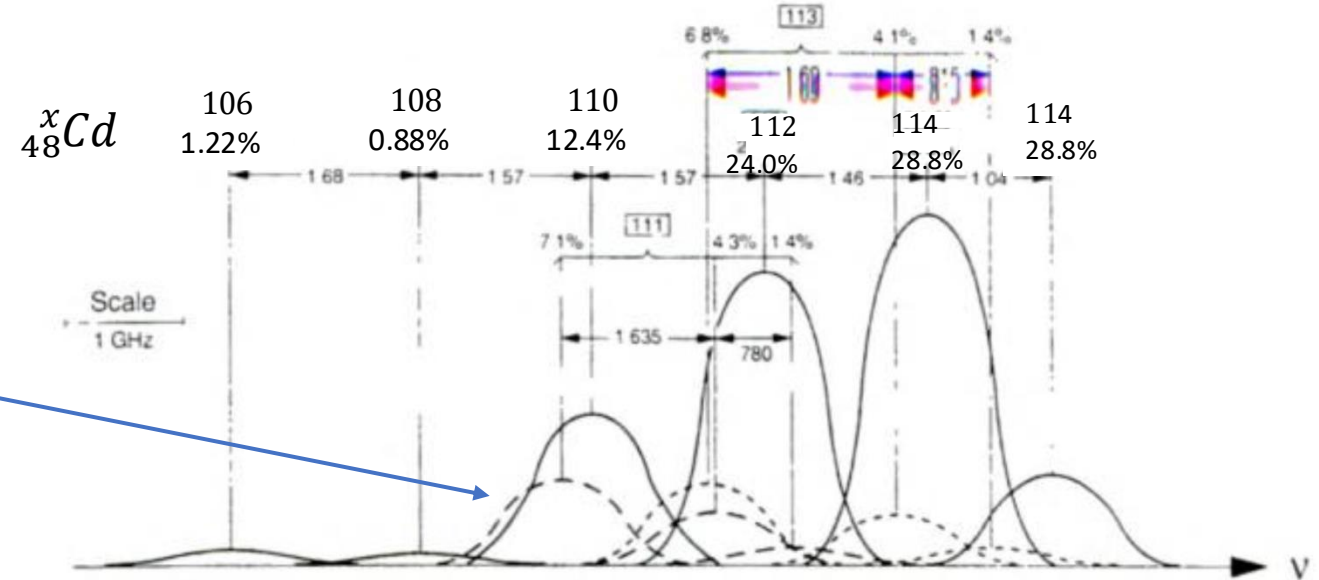
isótopo	Abundancia
$^{20}_{10}\text{Ne}$ (10 n^0)	90.8%
$^{21}_{10}\text{Ne}$ (11 n^0)	0.26%
$^{22}_{10}\text{Ne}$ (12 n^0)	8.9%



$$I(\nu) = \sum_i a_i I_i(\nu - \nu_i)$$

Doppler
 $\Delta\nu_D \sim 1\text{GHz}$

Transición láser en Cd (441.6 nm)



Los perfiles Lorentziano, Gaussiano y Voigt

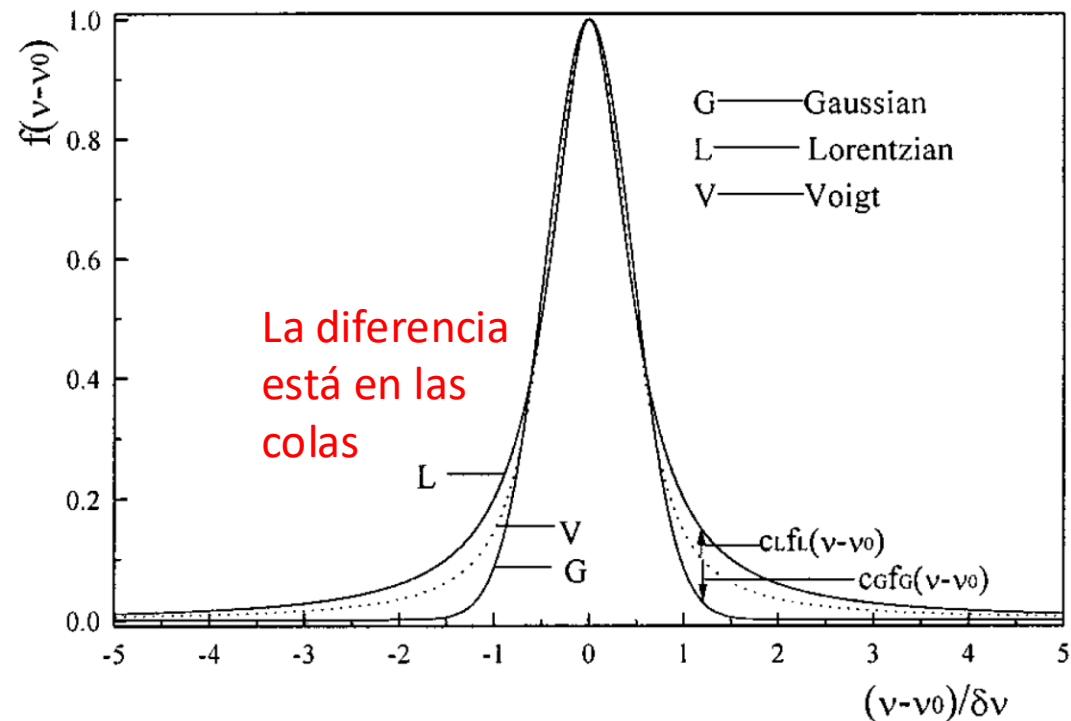
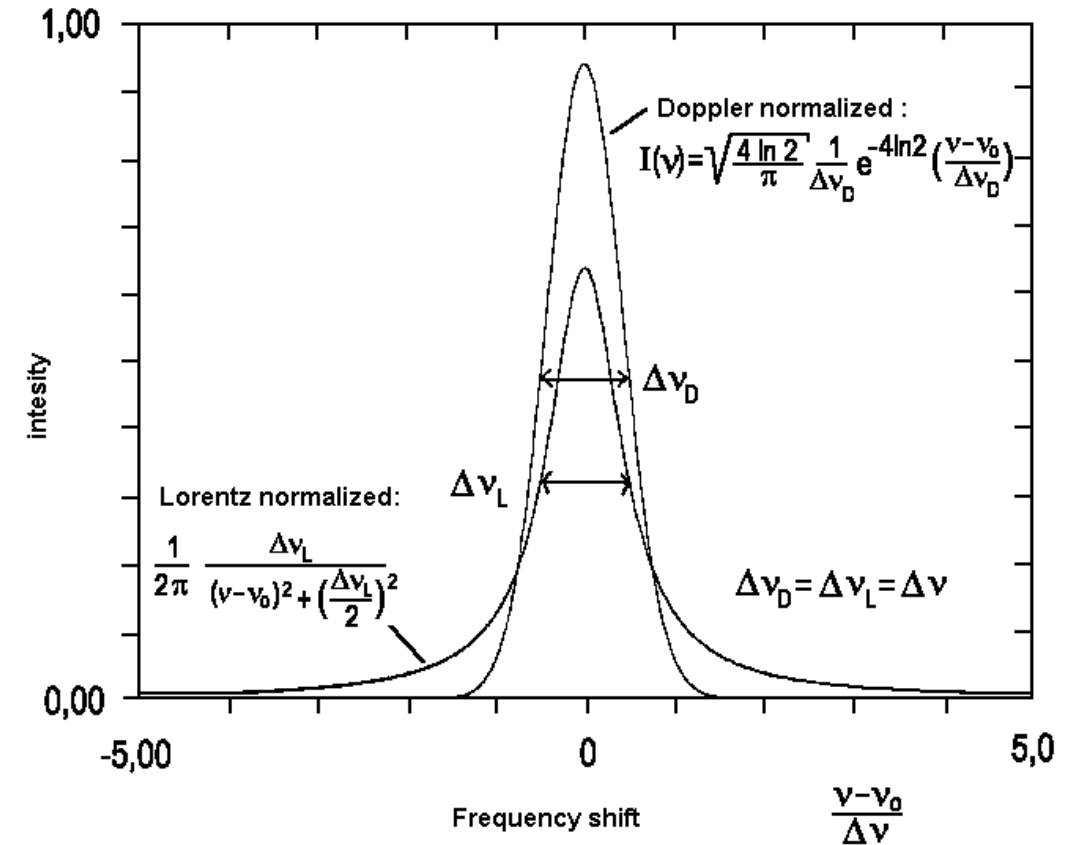


Fig. 1. Comparison of three line profiles with the normalized intensity and the same width.



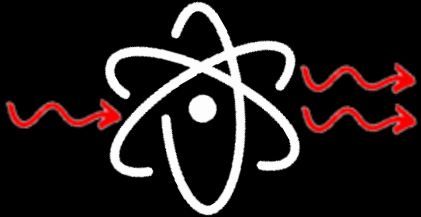
Lorentziano: colas largas

Gaussiano: colas cortas

Voigt: centro gaussiano, colas lorentzianas

Type of broadening	Nature of broadening	Special features
Natural	$\Delta E_T = \Delta E_u + \Delta E_l,$ $h\Delta v_{ul}^N = h(\Delta v_u + \Delta v_l) = h\left(\frac{A_u}{2\pi} + \frac{A_l}{2\pi}\right),$ $\Delta v_{ul}^N = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_i A_{ui} + \sum_j A_{lj} \right].$	Determines the minimum emission linewidth of a radiating transition. It involves decay rates of both the upper and lower levels. It is homogeneous with a Lorentzian profile.
T_1	$T_1^{u,l}$ are the decay times of levels u and l due to outside disturbances; $\Delta v_{T_1} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{T_1^u} + \frac{1}{T_1^l} \right].$ It will be relevant only if $\Delta v_{T_1} \gtrsim \Delta v^N$.	Both T_1 and T_2 determine the increased broadening on a transition from level u to level l due to outside influences, if T_1 and/or $T_2 \gtrsim 1/(2\pi\Delta v^N)$. We cannot determine which form is dominant in a given instance merely by measuring the broadening. T_2 broadening is less detrimental because it does not destroy population; however, it still reduces the laser gain because of the increased broadening. Both are homogeneous with a Lorentzian profile.
T_2	T_2 is the average phase interruption time of level u or l for outside disturbances. It usually occurs equally for levels u and l . Therefore, $\Delta v_{T_2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{T_2} \right].$ It will be relevant only if $\Delta v_{T_2} \gtrsim \Delta v^N$.	
Doppler	$\Delta v_D = 2v_0 \sqrt{\frac{2(\ln 2)kT}{Mc^2}}.$ It will be relevant only if $\Delta v_D \gtrsim \Delta v^N$.	This is due entirely to the motion of atoms; it has nothing to do with decay rates or phase interruptions. Each atom still radiates with its own natural width. The total Doppler width is the sum of the shifted natural emission widths of all the atoms.
Isotope	If there is more than one isotope present, each isotope behaves independently and has its own broadening (usually Doppler). The linewidth and shape are determined by the sum of the emissions from each isotope. It is relevant only if the isotope shift is significant compared to linewidths of individual isotopes.	This is essentially a sum of separate emitters that have slight shifts in frequency. The overall emission envelope is therefore an unusually shaped sum of many separate Doppler widths.

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

- Los fenómenos lineales de interacción de la luz con los materiales
- Modelo del electrón clásico oscilante (CEO)
 - Constantes ópticas (absorción e índice de refracción)
 - Ancho de línea natural
- Ensanchamiento de línea
 - Homogéneo: decaimiento natural y colisional
 - Inhomogéneo: desorden estructural, Doppler, isotopos
- Tasas de absorción y emisión. Relación entre descripción clásica y cuántica
- Oscillator strength, eficiencia cuántica, branching ratio



- Tipos de niveles para distintos sistemas atómicos, moleculares, sólidos (iones)
- Transiciones permitidas

Niveles de energía en átomos



Ejemplo átomo de hidrógeno o cualquier ion con 1 electrón

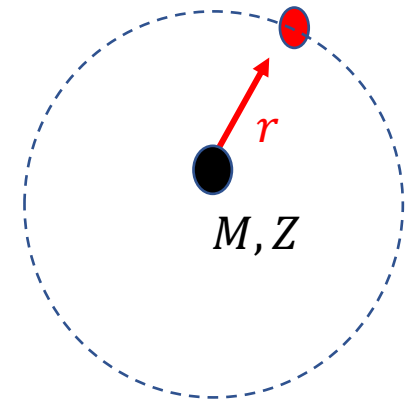
La solución de la ecuación de Schrödinger para un átomo hidrogenoide determina los estados permitidos y sus energías.

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi + V \Psi \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$H\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = E_n \psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$$

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = c R_n(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi)$$

Armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$



Masa reducida

$$\mu = m_e M / (m_e + M)$$

Radio de la primera orbita de Bohr

$$a_H = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi \mu e^2}$$

Niveles de energía en átomos



Ejemplo átomo de hidrógeno o cualquier ion con 1 electrón

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = C R_n(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Parte angular: armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi) = \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi)$

$$\Theta_{lm}(\theta) = P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2|m|}}}{2^l l!} \frac{d^{|m|+1}}{dx^{|m|+1}} (x^2-1)^l, \quad x = \cos(\theta) \quad \text{Polinomio de Legendre}$$

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi},$$

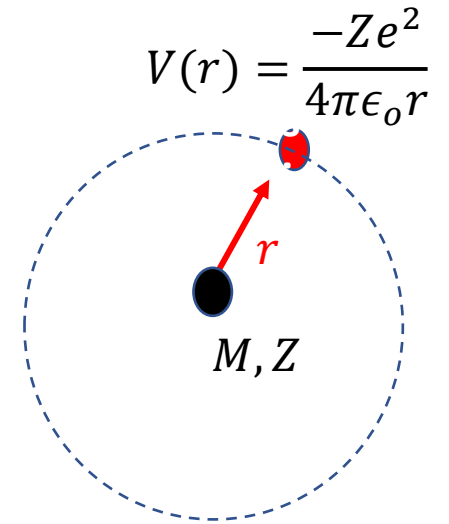
Parte radial

$$R_n(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+1}^{2l+1}(\rho) \quad \rho = \frac{2r}{na_H}$$

$$L_{n+1}^{2l+1}(\rho) = \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{2l+1} \left[e^\rho \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n+1} (\rho e^{-\rho}) \right] \quad \text{Polinomio de Laguerre}$$

Solución total

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = c_{nlm} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+1}^{2l+1}(\rho) P_l^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$



Masa reducida

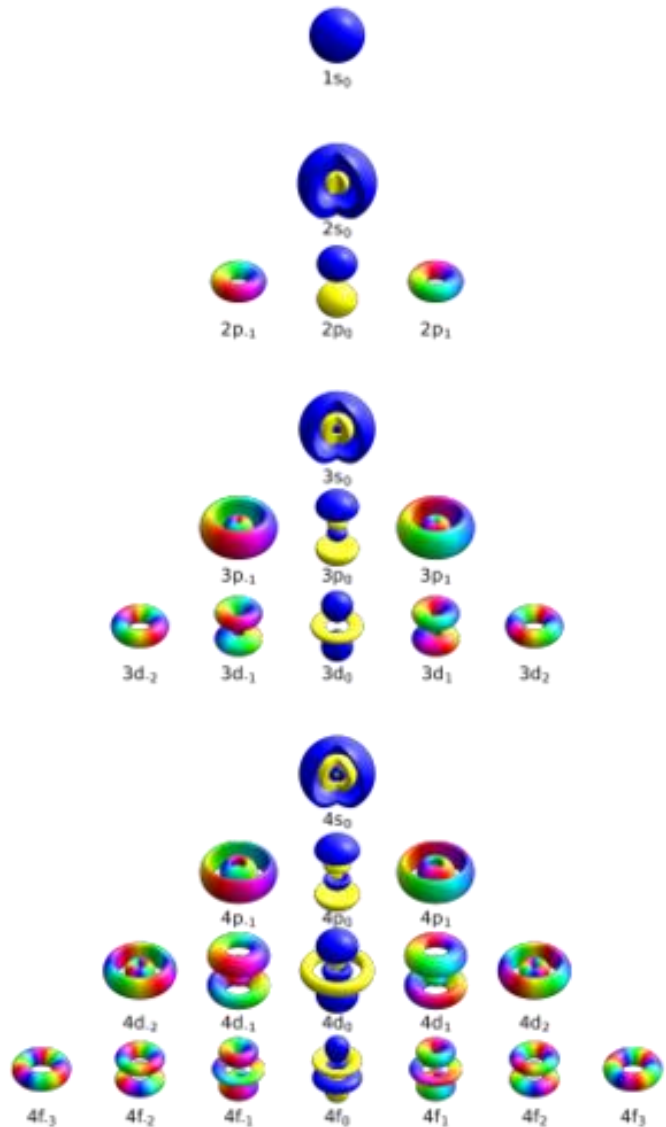
$$\mu = m_e M / (m_e + M)$$

Radio de la primera orbita de Bohr

$$a_H = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2}$$

$$E_n = -Z^2 \frac{\mu e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Niveles de energía en átomos



n	l	m	0	1	2	3
			s	p	d	f

Números cuánticos permitidos

n = número cuántico principal $n = 1, 2, 3, \dots$

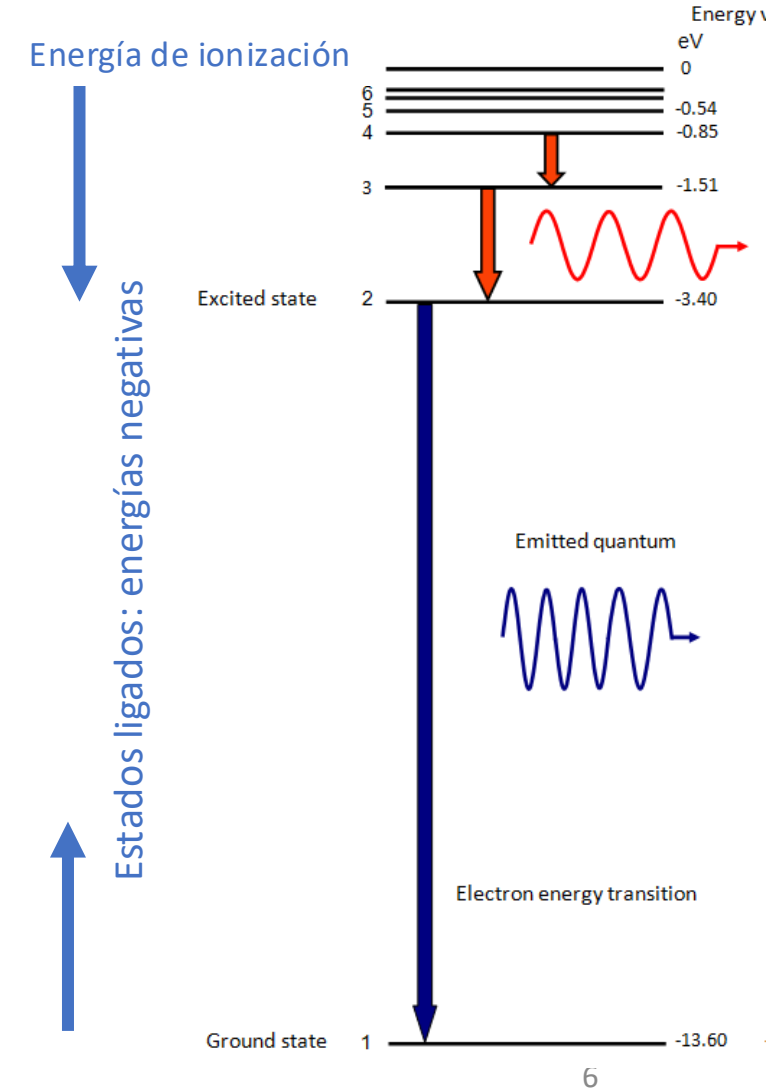
$$E_n = -Z^2 \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

l = momento angular orbital $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

m = proyección en z $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

$$L_z = m\hbar$$



Átomos aislados: niveles de energía discretos



Números cuánticos permitidos

Número cuántico orbital (momento angular): $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Número cuántico magnético (proyección del momento angular orbital): $L_z = m \hbar$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Número de spin: no tiene analogía clásica. $S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$

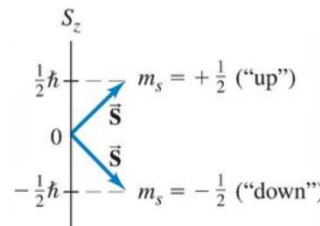
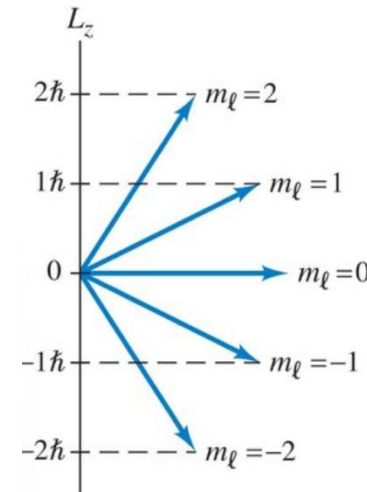
Para electrones $s = 1/2$,

$$m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Número cuántico del momento angular total: $J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$

$$J = L + S$$

$$|L - S| \leq J \leq |L + S|$$



Átomos aislados: niveles de energía discretos



Números cuánticos permitidos

Número cuántico principal: $E_n = -Z^2 \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2}$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Número cuántico orbital (momento angular): $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Número cuántico magnético (proyección del momento angular orbital, rotación del electrón alrededor del eje z): $L_z = m \hbar$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Número de spin: no tiene analogía clásica. Para electrones $s = 1/2$,

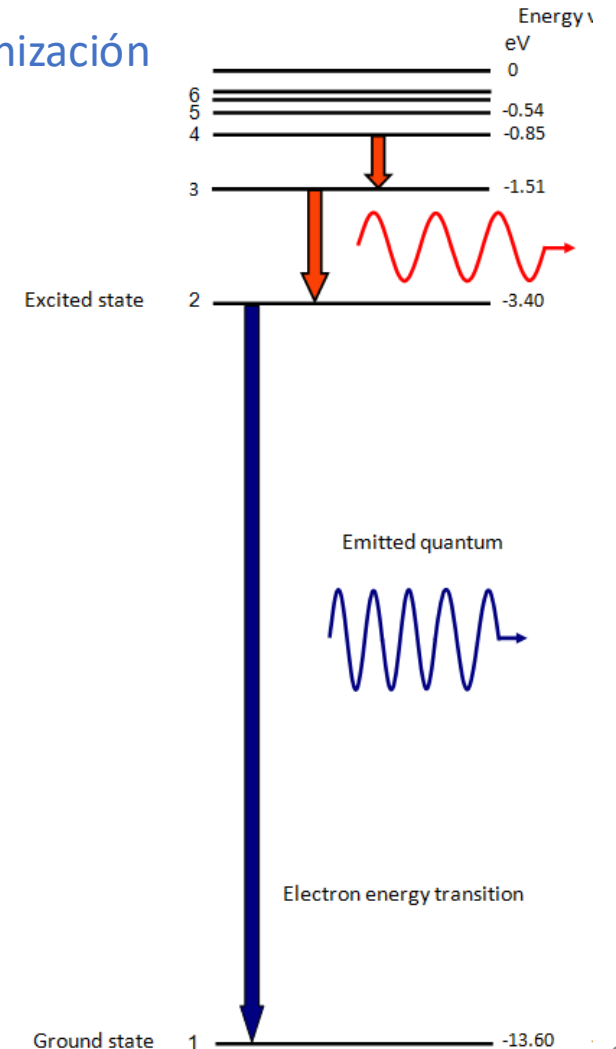
$$m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Número cuántico momento angular total: $J = L + S$

$$|L - S| \leq J \leq |L + S|$$

Energía de ionización

Estados ligados energías negativas



Átomos aislados: niveles de energía discretos



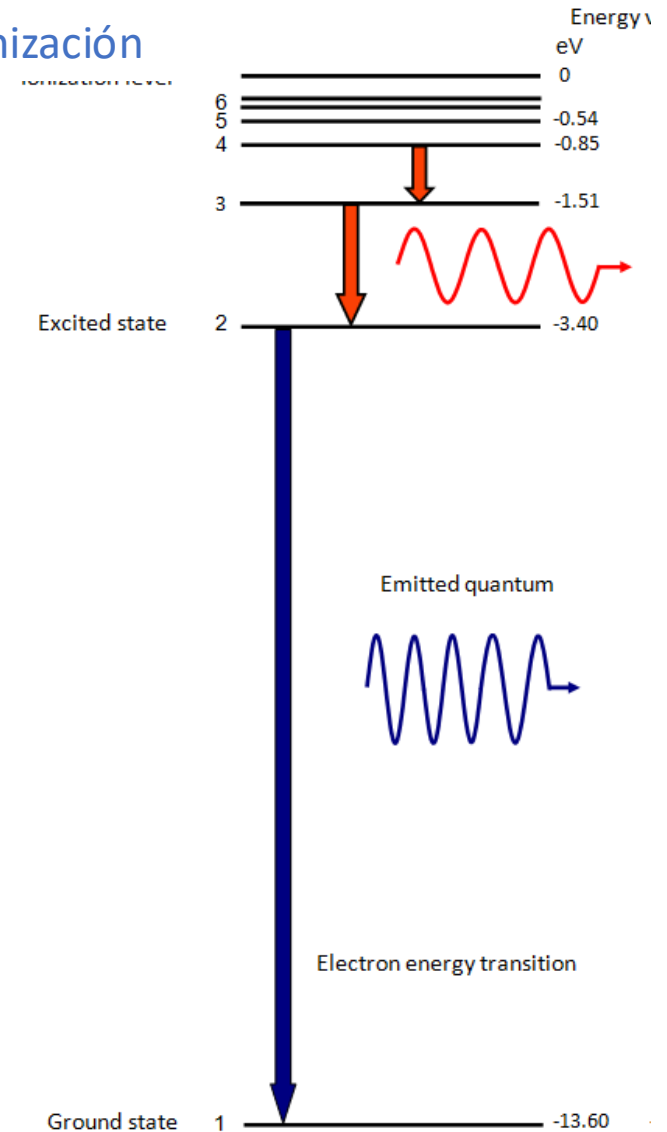
$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = c_{nlm} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) P_l^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

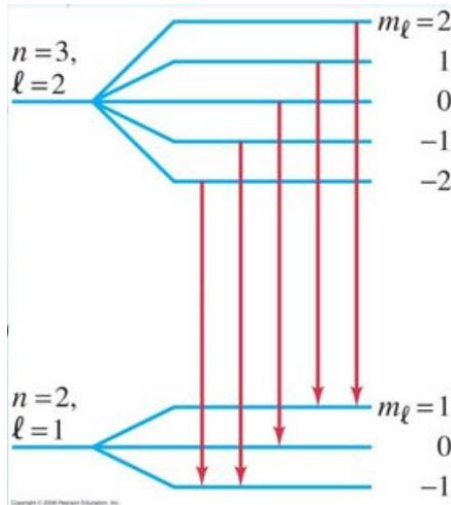
n	$l = 0, \dots, n-1$	$m \leq l $	m_s	$g_n = 2n^2$ (degeneración)
1	0	0	$+1/2, -1/2$	2
2	0, 1	0 -1, 0, 1	$+1/2, -1/2$	4x2
3	0, 1, 2	0 -1, 0, 1 -2, -1, 0, 1, 2	$+1/2, -1/2$	9x2

Energía de ionización

Estados ligados energías negativas



Átomos en un campo magnético: efecto Zeeman



Los fotones son emitidos con pequeñas diferencias de energía causadas por el efecto Zeeman

Potencial de interacción de átomo en campo magnético

$$V_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Momento magnético del átomo

$$\vec{\mu} = -\frac{\mu_B(g_l\vec{L} + g_s\vec{S})}{\hbar} \sim -\frac{\mu_B(\vec{L} + 2\vec{S})}{\hbar}$$

Por lo general, no importante en láseres.

Notación atómica: ejemplo átomo hidrogenoide



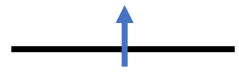
Átomos de hidrógeno estado fundamental

$l:$				
0	1	2	3	
s	p	d	f	

Capa K: $n = 1, l = 0$

Configuración electrónica $1s^1$

$$n = 1, l = 0, m_l = 0, s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$



$n = 1, l = 0 \rightarrow 1s$

$l = 0, s = 1/2$

$$|l - s| < J < |l + s| \rightarrow j = \frac{1}{2}$$

Multiplicidad de spin $2s+1=2$

$1s^2 S_{1/2}$

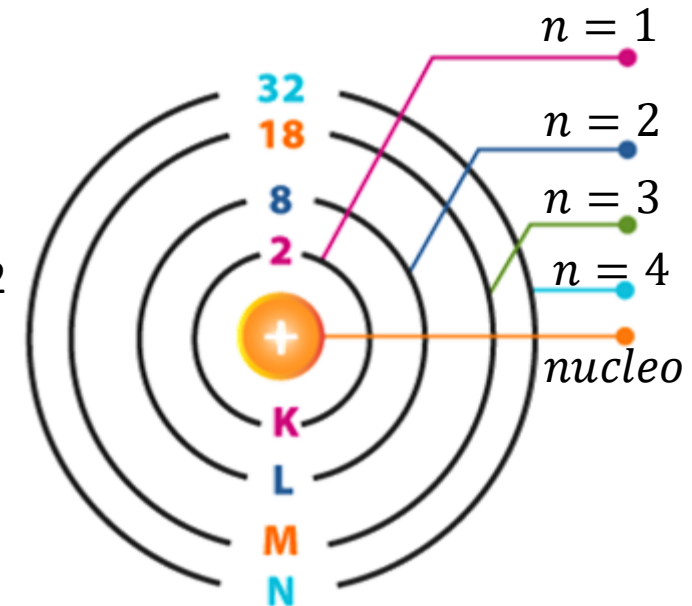
Degeneración $(2j+1) = 2$

Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$2S+1 L_J$

L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón





Ejemplo notación atómica

Átomos de hidrógeno: primer estado excitado $n=2$

Configuración electrónica

$2s^1$ o $2p^1$

$n = 2,$

$l = 0, 1$

Capa L

• $n = 2,$ $l = 0,$ $m_l = 0$

$j = \frac{1}{2}$

$2s^1 2S_{1/2}$

Degeneración

$(2j+1) = 2$

• $n = 2,$ $l = 1,$ $m_l = -1, 0, 1$

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

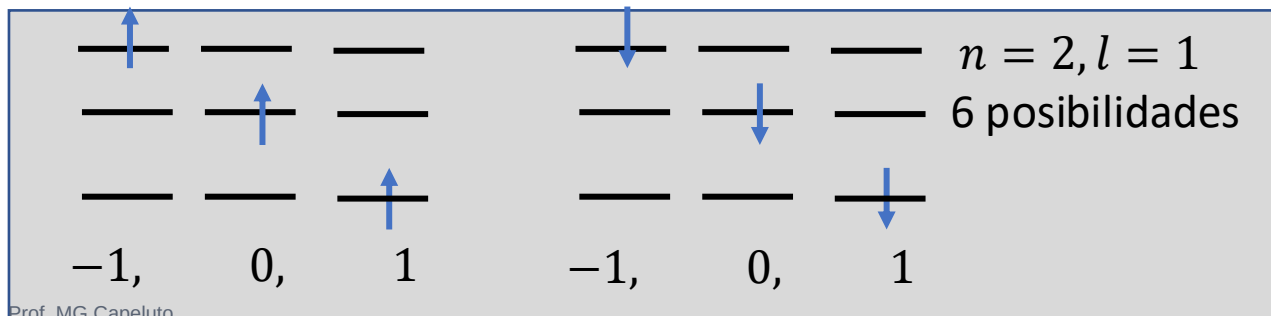
$2p^1 2P_{1/2}$

$(2j+1) = 2$

$2p^1 2P_{3/2}$

$(2j+1) = 4$

$s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2},$ Multiplicidad de spin $2s+1=2$

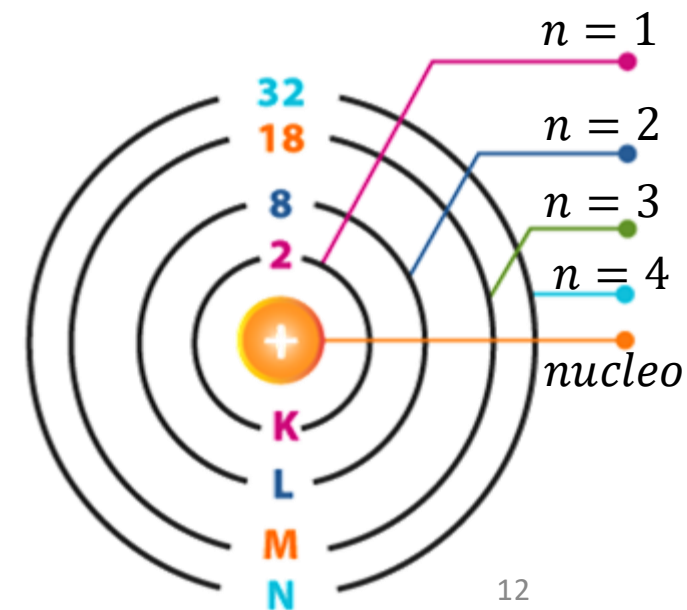


Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$2S+1 L_J$

L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón

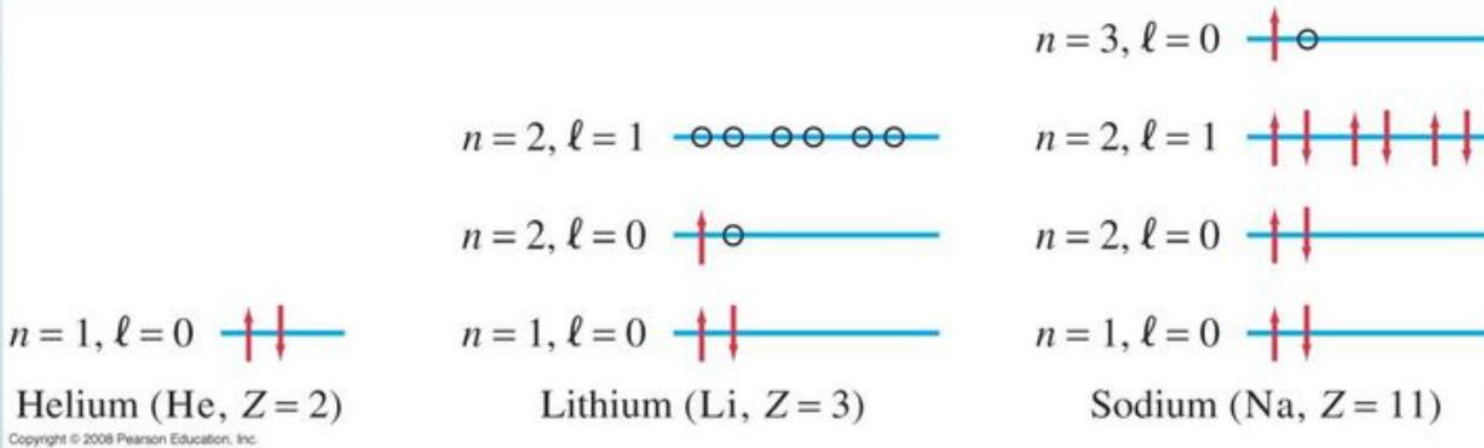
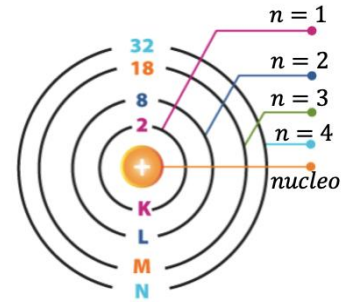


Átomos con más de un electrón

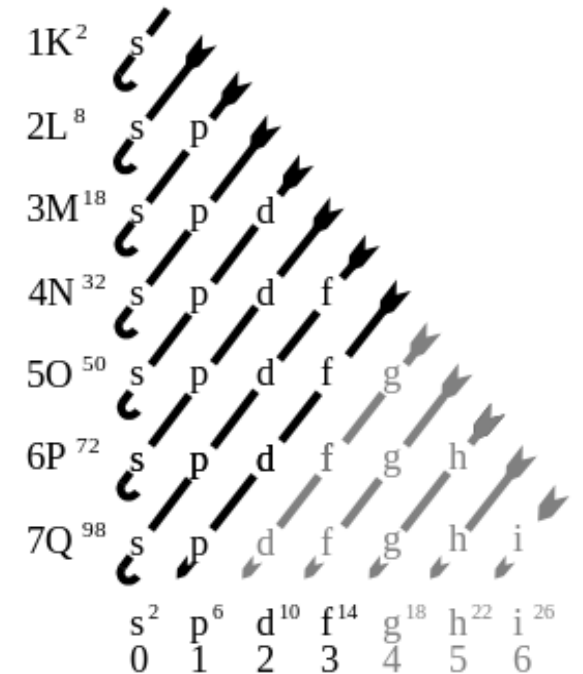


Átomos con más de un electrón: energías dependen de n y otros números cuánticos

Principio de exclusión de Pauli: dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico (si pertenecieran a distintos átomos sí, porque no compartirían posición)



Principio Aufbau
(principio de llenado)



$1s^2$

$1s^2 2s^1$

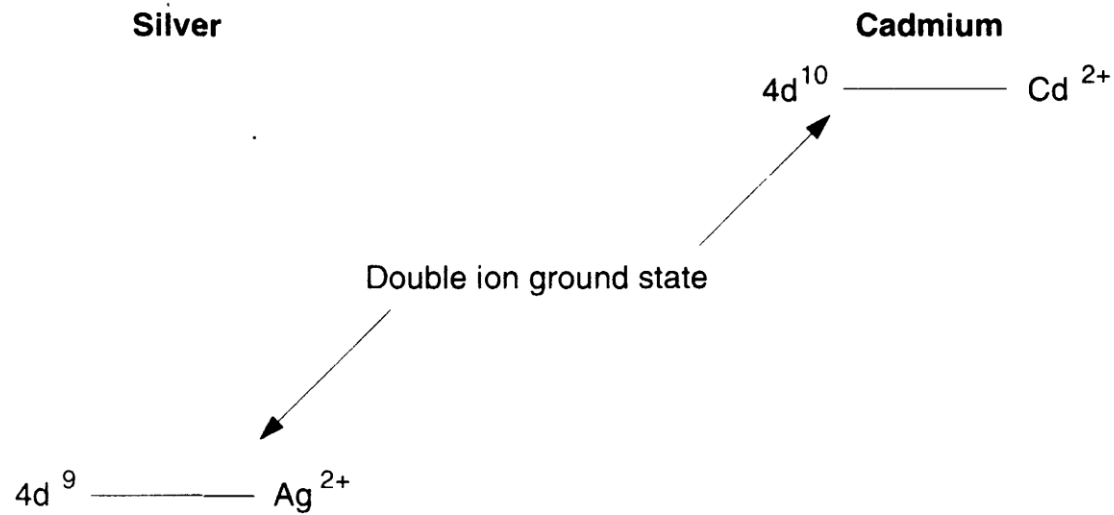
$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

$[He] 2s^1$

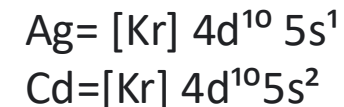
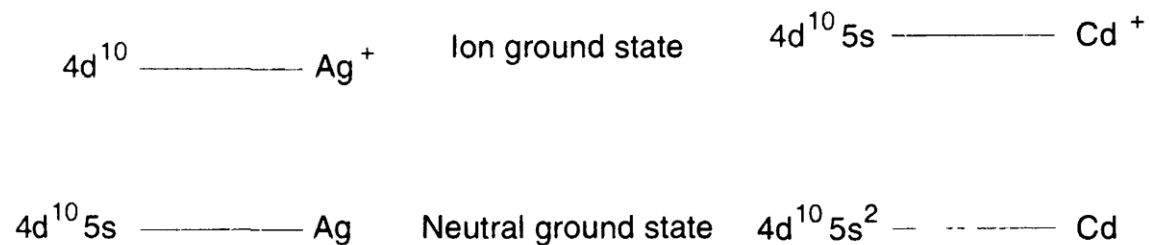
$[Ne] 3s^1$

Capa cerrada: muy estable, no reactiva

Átomos con más de un electrón en capas no cerradas



Estados fundamentales de iones se designan con el nombre del orbital más externo o último orbital (lo mismo se hace con estados excitados de átomos neutros)



Átomos con más de un electrón en capas no cerradas: Energías

Átomo hidrogenoide (cualquier ion con 1 electrón)

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi + V \Psi \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Átomo con más de un electrón

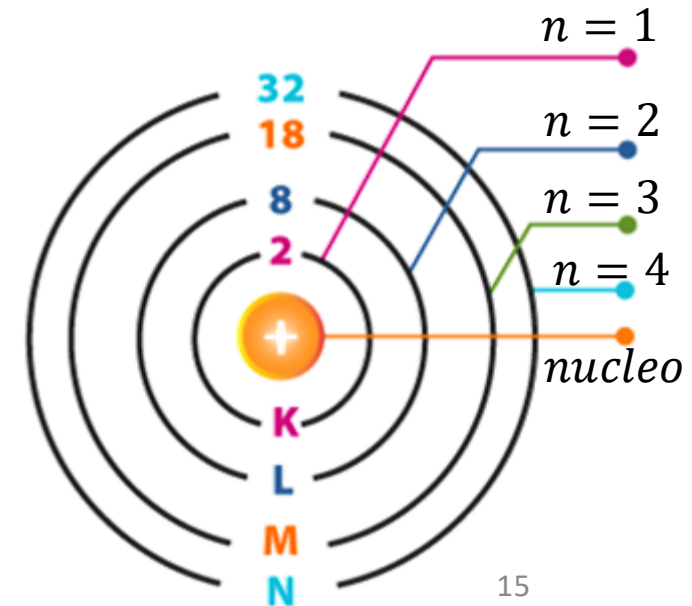
- Cinética de los electrones
- Interacción electrostática núcleo-electrones
- Interacción electrostática electrón-electrón
- Interacción spin-orbita
- Interacción spin-spin
- Interacciones magnéticas entre momentos angulares orbitales
- Interacción entre spin nuclear y spin electrón
- Interacción spin nuclear y momento angular orbital electrón
- Efectos relativistas
- Correlación de intercambio (alineación de spin paralelos)

Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$$2S+1 L_J$$

L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón



Átomos con más de un electrón en capas no cerradas: Energías

Dos electrones en capas no cerradas

$$L = L_1 + L_2$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$J = L + S$$

$$J = J_1 + J_2$$

Ejemplos

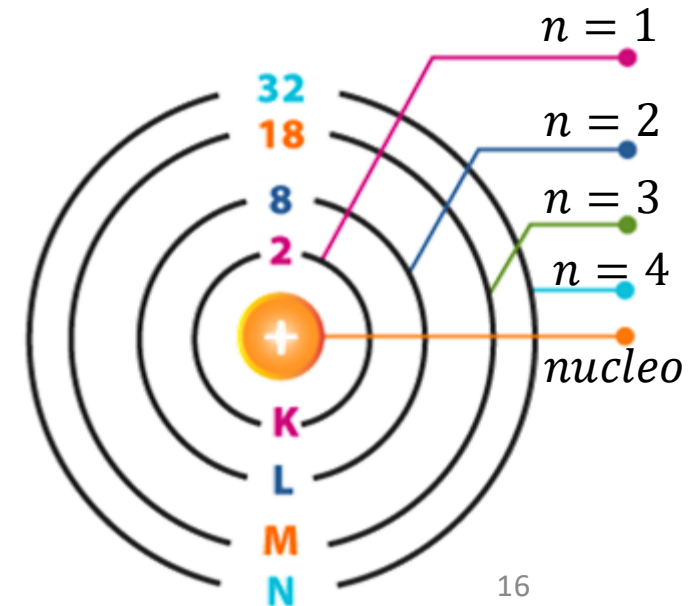
- Estados excitados del He, por ejemplo, $1s2p$
- Carbono
 - fundamental $1s^2 2s^2 2p^2$ o simplemente $2p^2$
 - primer excitado $1s^2 2s^2 2p 3p$ o simplemente $2p 3p$

Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$$^{2S+1} L_J$$

L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón



Átomos con más de un electrón en capas no cerradas: Energías

Caso más sencillo: He

Estado fundamental del He neutro

Configuración electrónica $1s^2$



$$l_1 = 0$$

$$m_{s1} = 1/2$$

$$l_2 = 0$$

$$m_{s2} = -1/2$$

$$L = L_1 + L_2 = 0$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = |S_1 - S_2| \dots |S_1 + S_2| = 0, 1 \longrightarrow \text{Ojo: En este caso } S \text{ NO puede valer 1 (Pauli)}$$

$$S = 0$$

Multiplicidad $2S+1=1$ (singlete)

$$J = L + S = 0$$

$$1s^2 \rightarrow {}^1S_0$$

Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$$2S+1 \quad L_J$$

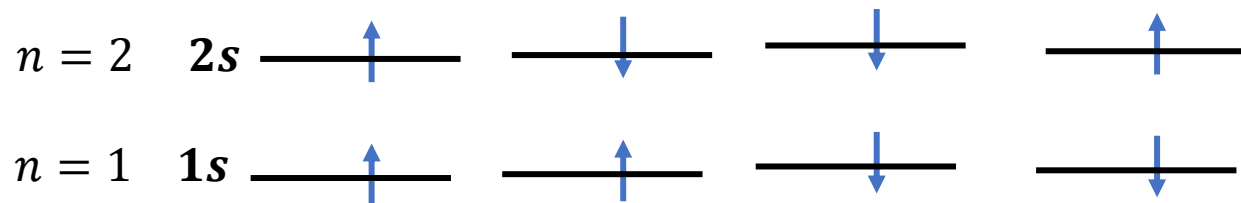
L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón

Átomos con más de un electrón en capas no cerradas: Energías

Caso más sencillo: He

Estado excitado del He neutro al nivel 2s

Configuración electrónica $1s^1 2s^2$



$$l_2 = 0$$

$$m_{s1} = -1/2, 1/2$$

$$l_1 = 0$$

$$m_{s2} = -1/2, 1/2$$

$$L = L_1 + L_2 = 0$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = |S_1 - S_2| \dots |S_1 + S_2| = 0, 1 \longrightarrow \text{En este caso, } S \text{ puede valer 1; no viola el principio de exclusión de Pauli.}$$

$$S = 0$$

Multiplicidad $2S+1=1$ (singlete) $1s2s \ ^1S_0$
 $J = L + S = 0$

$$S = 1$$

Multiplicidad $2S+1=3$ (triplete)
 $J = L + S = 1$

$$1s2s \ ^3S_1$$

Russell-Saunders o acoplamiento LS

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

$$2S+1 \ L_J$$

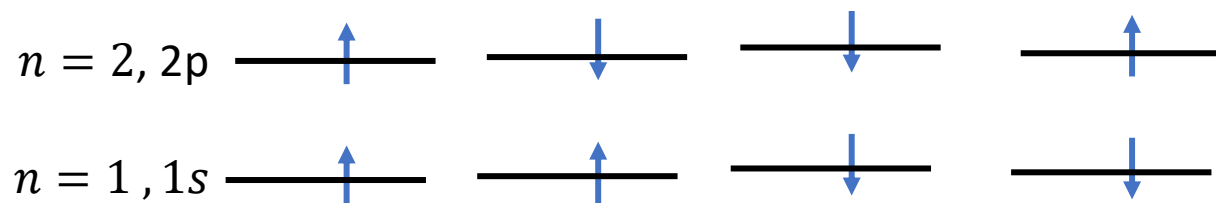
L, S, J valores totales para sistemas con más de un electrón

Átomos con más de un electrón en capas no cerradas: Energías

Caso más sencillo: He

Estado excitado del He neutro al nivel 2p

Configuración electrónica 1s2p



$$l_2 = 0$$

$$m_{s1} = -1/2, 1/2$$

$$l_1 = 1$$

$$m_{s2} = -1/2, 1/2$$

Russell-Saunders o acoplamiento LS

L :

0	1	2	3
S	P	D	F

$$2S+1 L_J$$

L, S, J valores totales para mas de un electrón

$$L = L_1 + L_2 = 1 \text{ (P)}$$

$$S = S_1 + S_2 \quad S = |S_1 - S_2| \dots |S_1 + S_2| = 0, 1 \quad \longrightarrow \quad \text{En este caso, S puede valer 1; no viola el principio de exclusión de Pauli.}$$

$$S = 0$$

Multiplicidad $2S+1=1$ (singlete)

$$J = L + S \rightarrow J = 1$$

$$S = 1$$

Multiplicidad $2S+1=3$ (triplete)

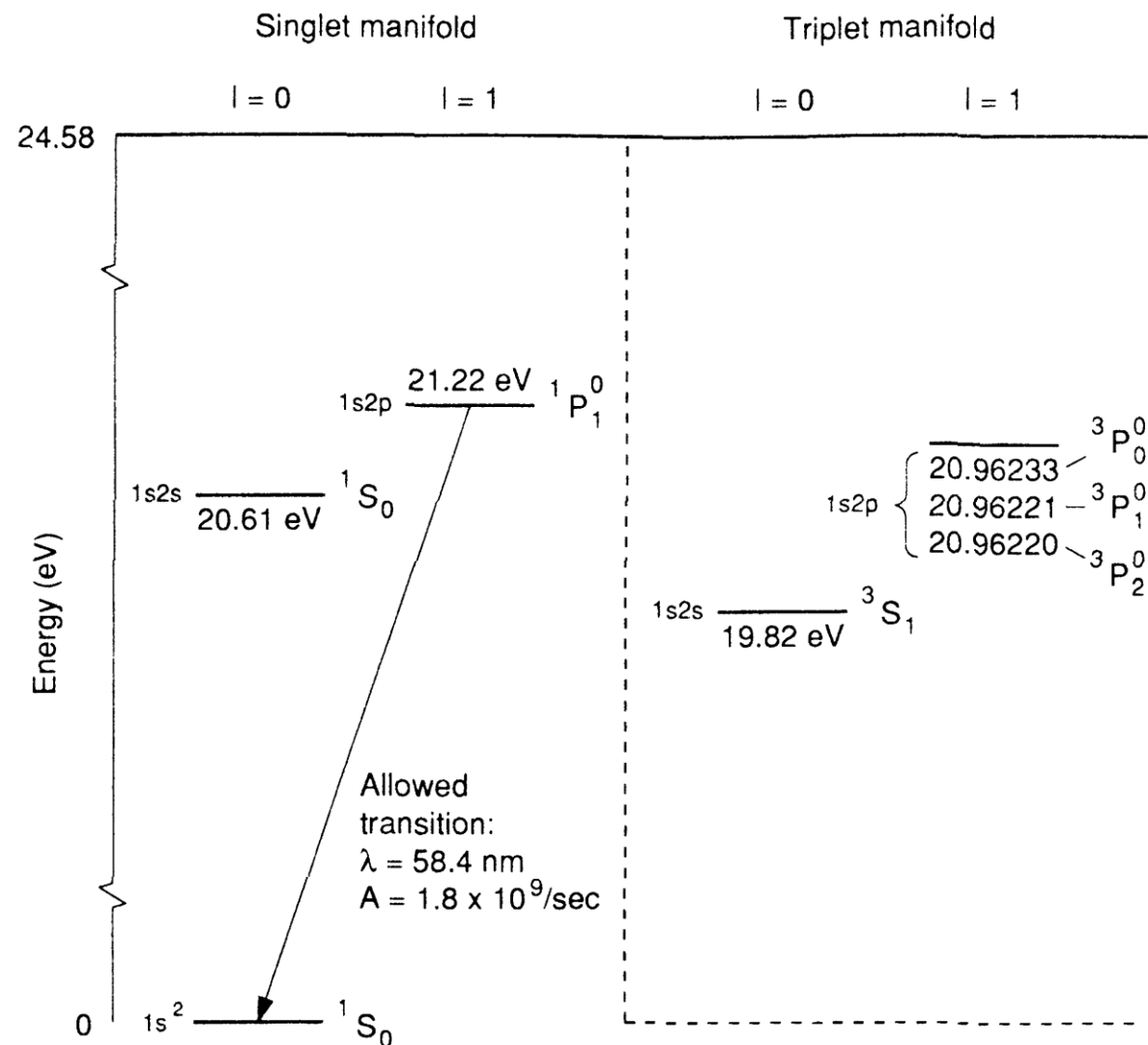
$$J = 0, 1, 2$$



Niveles de energía en Helio



Helium



Reglas de selección para transiciones radiativas



$$M_{ul} = \langle e\vec{r} \rangle = \int \Psi_u e\vec{r} \Psi_l dV \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$A_{ul} = \frac{16 \pi^2 \nu_{ul}^3 M_{ul}^2}{3 \epsilon_0 c^3 h}$$

Átomos con un electrón (hidrogenoides) en capa no cerrada

$$\begin{aligned} \Delta l &= \pm 1, \\ \Delta s &= 0, \\ \Delta j &= \pm 1 \text{ or } 0 \quad \text{but } j = 0 \nrightarrow j = 0, \\ \Delta m_j &= \pm 1 \text{ or } 0 \quad \text{but } m_j = 0 \nrightarrow m_j = 0 \text{ if } \Delta j = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Átomos con más de un electrón en capa no cerrada

$$\begin{aligned} \Delta l &= \pm 1 \quad \text{for the changing electron (change in parity),} \\ \Delta S &= 0, \quad \Delta L = 0, \pm 1, \\ \Delta J &= 0, \pm 1 \quad \text{but } J = 0 \nrightarrow J = 0, \\ \Delta M_J &= 0, \pm 1 \quad \text{but } M_J = 0 \nrightarrow M_J = 0 \text{ if } \Delta J = 0, \end{aligned} \quad (4.104)$$

S, L, J de los electrones en la capa no cerrada (valores totales)

Paridad:

de electrones con paridad impar
($l = 1, 3, 5 \dots$)

#par $\rightarrow$ par

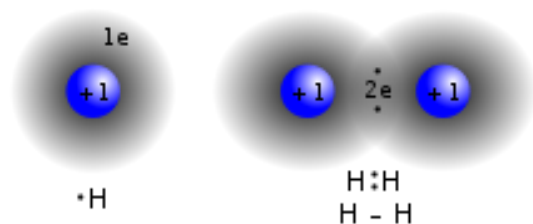
#impar $\rightarrow$ impar

Niveles de energía moleculares

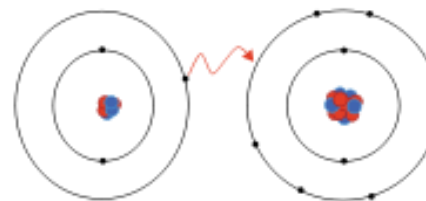


- Átomos separados por distancias del orden de las dimensiones atómicas sienten fuerzas de corto alcance que pueden unirlos y formar moléculas.
- En las moléculas cobran importancia las interacciones electrón-electrón, electrón-núcleo y núcleo-núcleo, lo que da lugar a diagramas de energía complejos, aun para moléculas simples.

Covalente: las especies comparten electrones



Iónica: una de las especies cede un electrón



Moléculas:

- Niveles discretos como los átomos
- También pueden realizar transiciones radiativas (emitir o absorber luz),
- Estados de energía asociados a rotaciones y vibraciones de las moléculas

$$E = E^{\text{electrónicos}} + E^{\text{rot}} + E^{\text{vib}}$$

$$\Delta E^{\text{rot,vib}} \ll \Delta E^{\text{electrónicos}}$$

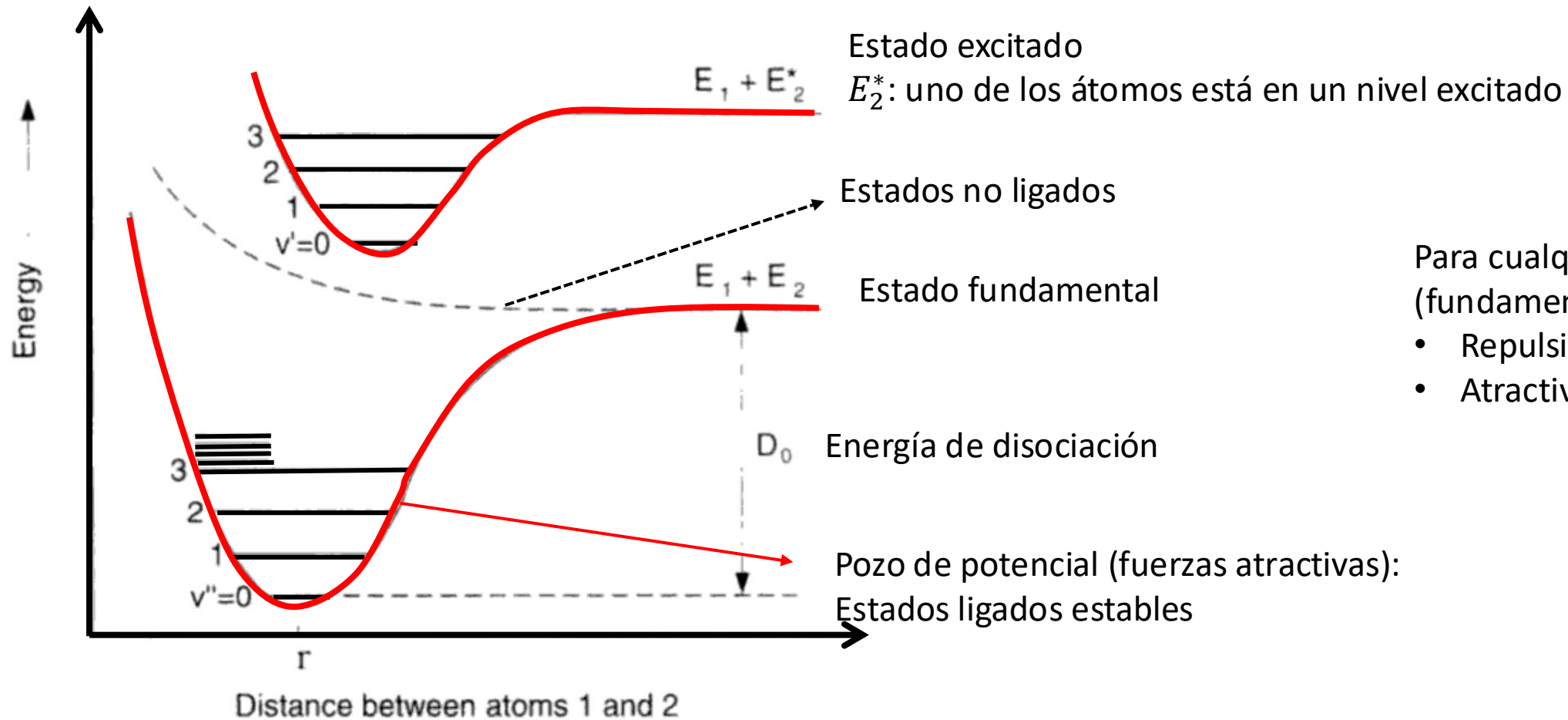
$$\gamma^{\text{rot,vib}} \ll \gamma^{\text{electrónicos}}$$

$$\lambda^{\text{rot,vib}} \gg \lambda^{\text{electrónicos}} . \quad \lambda^{\text{rot,vib}} : \text{IR, FIR (Far IR)}$$

Niveles de energía moleculares



Energía de interacción en función de la distancia entre dos átomos

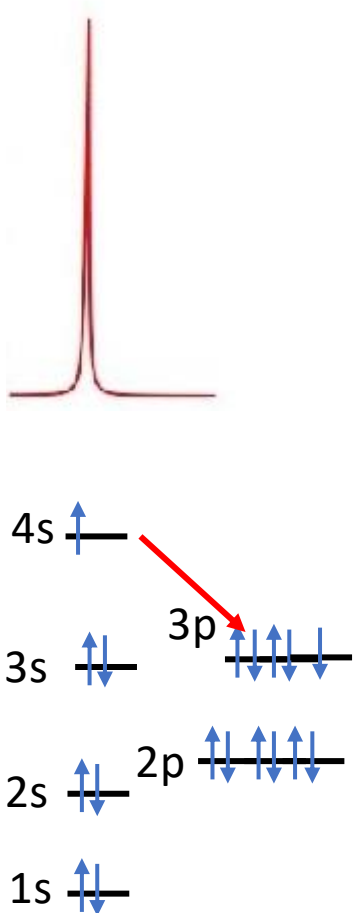


Para cualquier nivel energético (fundamental o excitado)

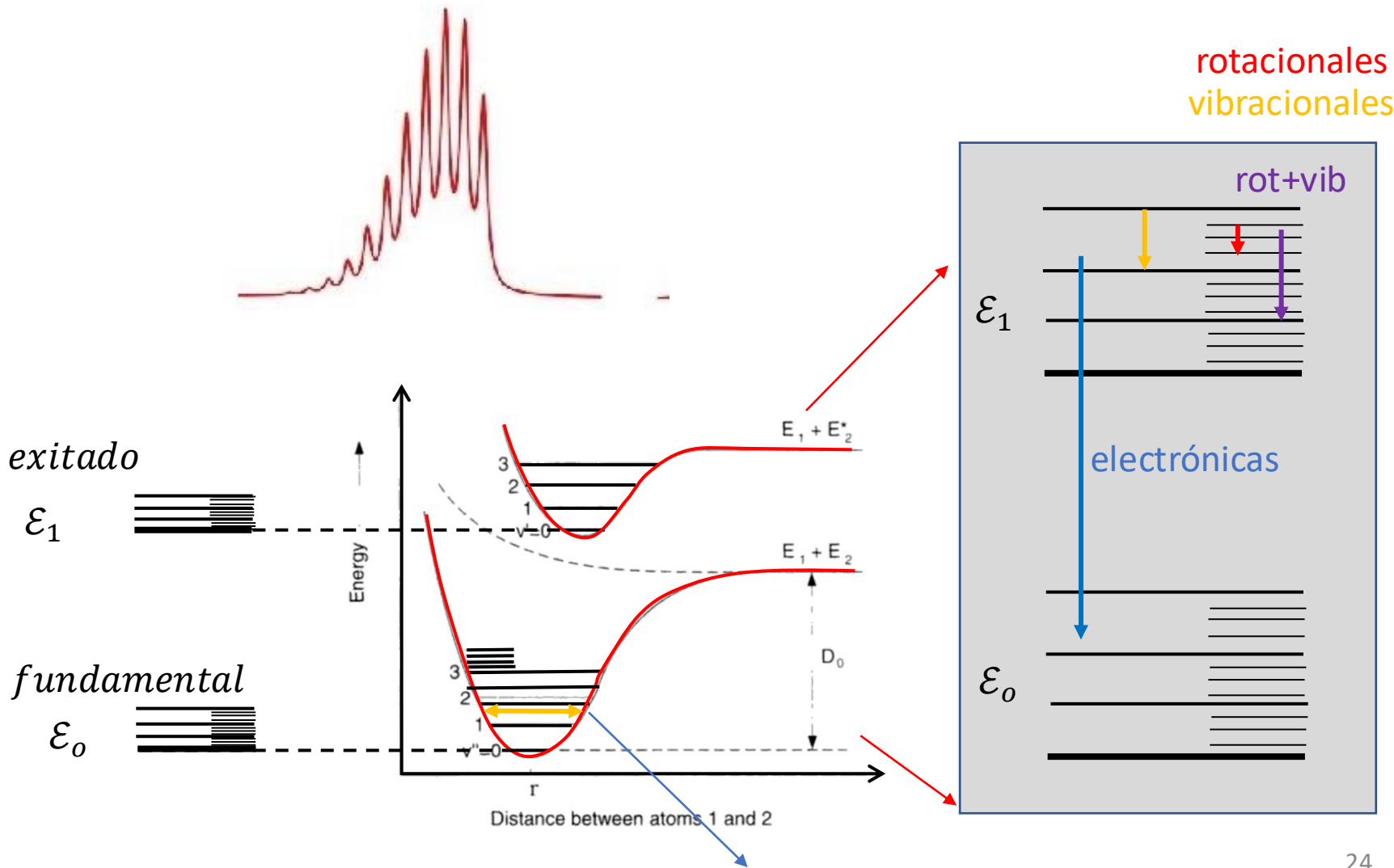
- Repulsivos (no ligados)
- Atractivos (ligados)

Niveles de energía moleculares

Transición atómica (niveles electrónicos)

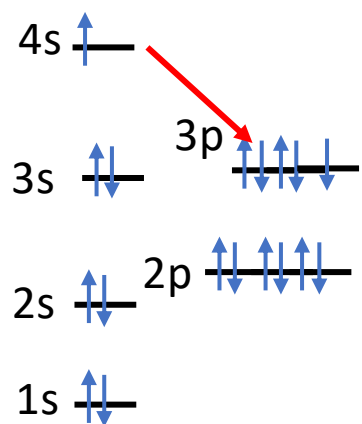


Transición en una molécula formada por pocos átomos (niveles electrónicos + vibracionales+ rotacionales)

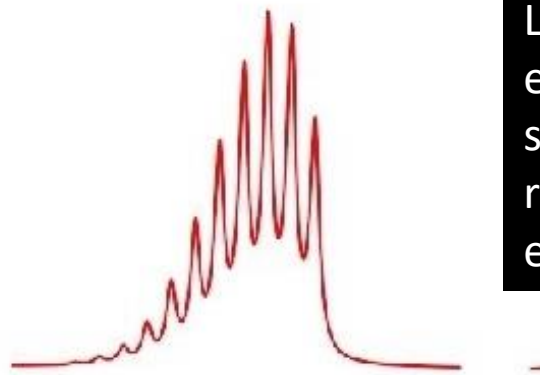


Niveles de energía moleculares

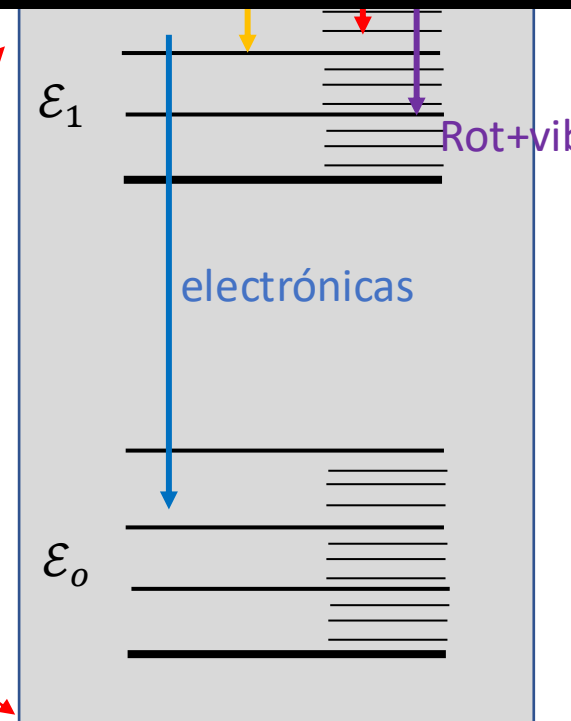
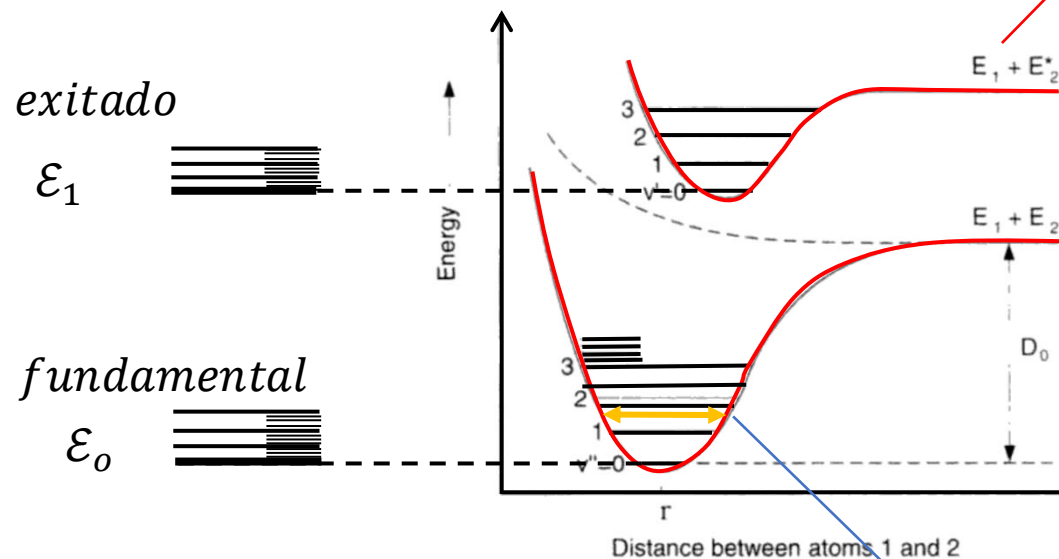
Transición atómica (niveles electrónicos)



Transición molécula formada por pocos átomos
(niveles electrónicos + vibracionales + rotacionales)



Las técnicas de espectroscopía en las que se emplean láseres sintonizables para excitar selectivamente a las moléculas permitieron resolver niveles de energía muy poco espaciados



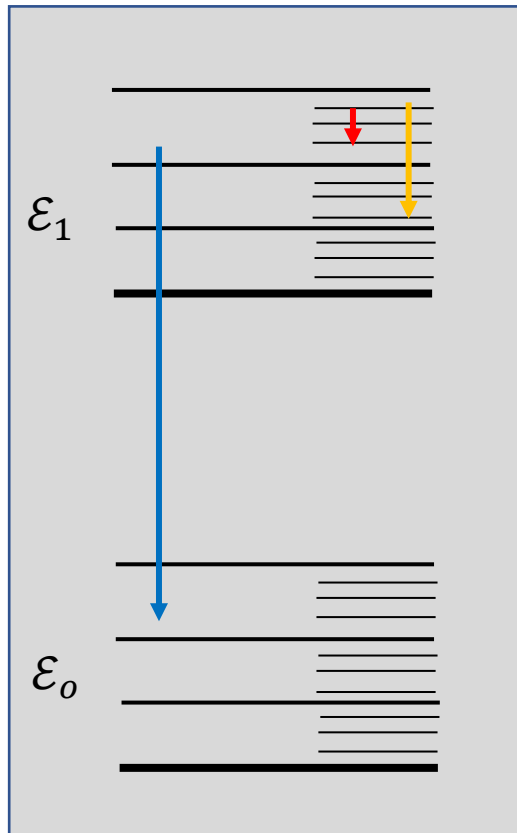
Amplitud máxima de oscilación en nivel rotacional

Niveles de energía moleculares



Cada nivel electrónico tiene superpuesto un conjunto de niveles rotacionales y vibracionales: No importa la energía en que esté la molécula, siempre va a estar rotando y vibrando

$$E = E_{electrónico} + E_{rot} + E_{vib}$$



Electrónicas
Visible/UV

Vibracionales
IR

Rotacionales
IR lejano/
microondas

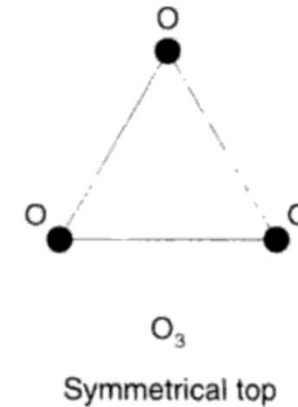
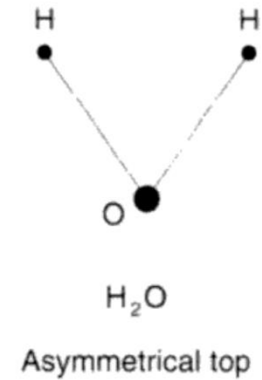
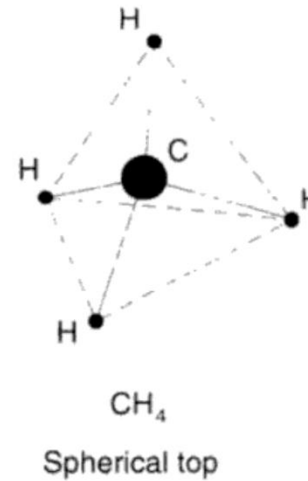
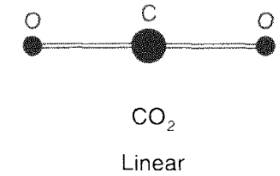
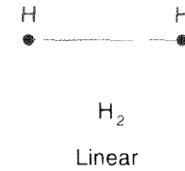
Niveles de energía moleculares



Moléculas de N átomos:

3N grados de libertad: 3 traslación + 3 rotación (2 para moléculas lineales)

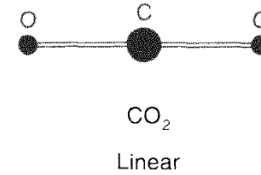
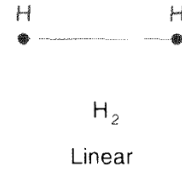
3N-6 vibraciones (3N-5 moléculas lineales)



Niveles de energía moleculares: rotaciones



Moléculas lineales



Energía rotacional clásica

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

I : momento de inercia

ω : velocidad angular de rotación

L : momento angular

La solución de la ecuación de Schrödinger para la rotación de un cuerpo rígido lleva a la cuantización del momento angular

$$L^2 = J(J + 1)\hbar^2, \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_{rot} = \frac{J(J + 1)\hbar^2}{2I} = J(J + 1)Bhc$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 cI}$$

Niveles de energía moleculares: Rotaciones



Molécula Homoatómica

$$E_{rot}^J = J(J + 1)Bhc$$

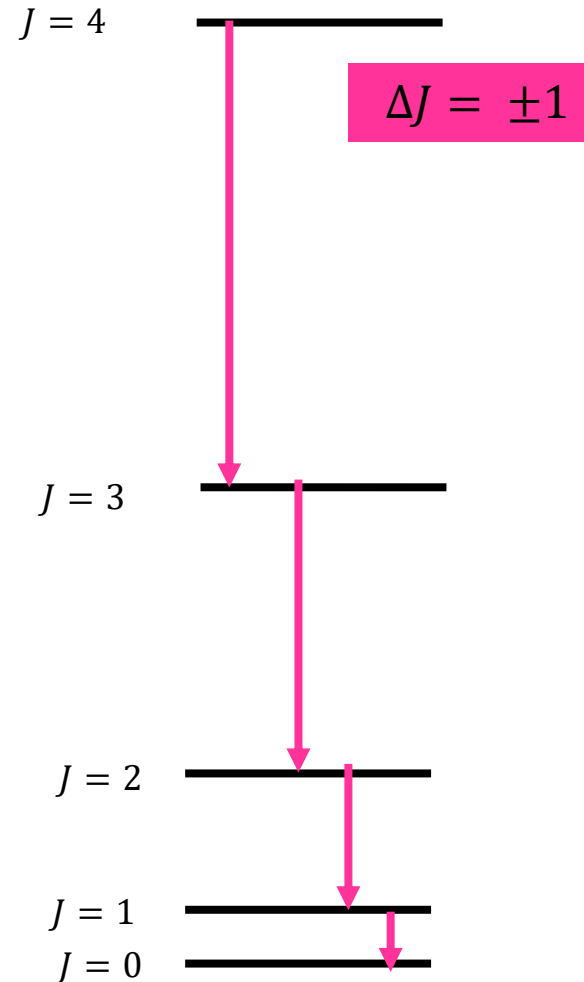
$$E_{rot}^{J+1} = (J + 1)(J + 2)Bhc$$

$$E_{rot}^{J+1} - E_{rot}^J = 2Bhc(J + 1)$$

$$\frac{E_{rot}^{J+1}}{E_{rot}^J} = \frac{J + 2}{J}$$

Reglas de selección para rotaciones

$$\Delta J = 0, \pm 1$$

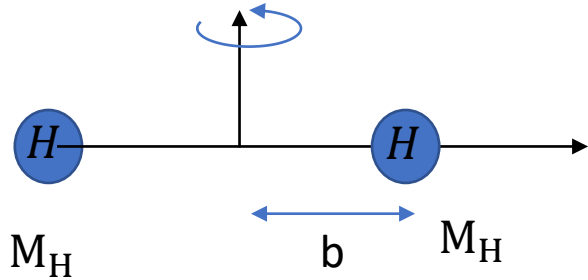


Transiciones radiativas hacia abajo

Niveles de energía moleculares: Rotaciones



Ejemplo: molécula homoeatómica H_2



$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = M_H b^2 + M_H b^2 = 2M_H b^2 = M b^2$$

$$2b = 0.107 \text{ nm}$$

$$M = 2M_H = 2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.34 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$I = 9.56 \times 10^{-48} \text{ kg m}^2$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c I} = \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ Js}}{8\pi^2 (3 \times 10^8 \text{ m/s}) (9.56 \times 10^{-48} \text{ kg m}^2)} = 2.92 \times 10^3 \frac{\text{Js}^2}{\text{kg m}^3} = 29.3 \text{ cm}^{-1}$$

$$E^0_{rot} = 0 \text{ eV}$$

$$E^1_{rot} = 2Bhc = 7.25 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

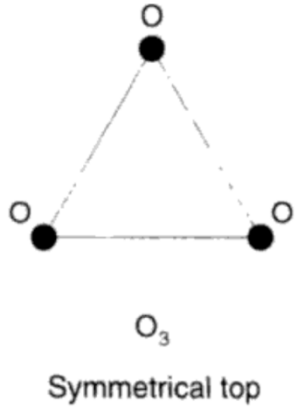
$$\lambda_{10} = \frac{hc}{E^1_{rot} - E^0_{rot}} = 171 \mu\text{m} \text{ (IR lejano } \sim 58 \text{ cm}^{-1} \text{)}$$

OJO: La molécula de H_2 no tiene momento dipolar....puede ser radiativa esta transición?

Niveles de energía moleculares: Rotaciones



Ejemplo: molécula Symmetrical top



I_c momento de inercia respecto al eje de simetría

I_b momento de inercia en un eje perpendicular al de simetría

$$E_{rot} = J(J + 1)Bhc + K^2(C - B)hc$$

$$J = K, K + 1, K + 2 \dots$$

$$K = 1, 2, 3, \dots$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c I_b}$$

$$C = \frac{h}{8\pi^2 c I_c}$$

N=3

3N=9 grados de libertad:

3 traslación + 3 rotación

3N-6= 3 vibraciones

Reglas de selección para rotaciones (transiciones permitidas)

$$\Delta J = 0, \pm 1$$
$$\Delta K = \pm 1$$

Niveles de energía moleculares: Rotaciones



población N_{vJ}

A temperatura ambiente, en equilibrio térmico, $T = 300 \text{ K} \rightarrow k_B T (208 \text{ cm}^{-1})$ ΔE^{rot} IR lejano

La población N_{vJ} del estado vibracional v y rotacional J , está dada por la distribución de Boltzmann. En equilibrio térmico la población se termaliza por colisiones

$$P = \frac{N_{vJ}}{N_v} = \frac{(2J+1)e^{-\frac{E_J}{k_B T}}}{\sum_J (2J+1)e^{-\frac{E_J}{k_B T}}} = \frac{(2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}}}{\sum_J (2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}}}$$

$g_J = (2J+1)$ (multiplicidad o degeneración del estado)

$$\theta_{\text{rot}} = \frac{Bhc}{k_b}$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 cI}$$

$\theta_{\text{rot}} (42 \text{ K para } H_2) \ll T (300 \text{ K})$, (momento de inercia grande, temperatura grande) puedo considerar continuo de niveles por lo que

Habíamos calculado $E^1_{\text{rot}} = 2Bhc = 7.25 \times 10^{-3} \text{ eV} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \theta_{\text{rot}} = \frac{Bhc}{k_b} &\sim 42 \text{ K} & \rightarrow k_B \theta_{\text{rot}} &= 0.003625 \text{ eV} & \rightarrow \frac{\theta_{\text{rot}} k_b}{hc} &\sim 29 \text{ cm}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} & & \rightarrow k_B T &\sim 0.0258 \text{ eV} & \rightarrow \frac{k_B T}{hc} &\sim 208 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} k_b &\sim 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \\ hc &\sim 1240 \text{ eV nm} \\ E &= \frac{hc}{\lambda} = hc \bar{k} \rightarrow \bar{k} = 2\pi k \end{aligned}$$

población N_{vJ}

A temperatura ambiente, en equilibrio térmico, $T = 300 \text{ K} \rightarrow k_B T$ (208 cm^{-1}) ΔE^{rot} IR lejano

La población N_{vJ} del estado vibracional v y rotacional J , está dada por la distribución de Boltzmann. En equilibrio térmico la población se termaliza por colisiones

$$P = \frac{N_{vJ}}{N_v} = \frac{(2J+1)e^{-\frac{E_J}{k_B T}}}{\sum_J (2J+1)e^{-\frac{E_J}{k_B T}}} = \frac{(2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}}}{\sum_J (2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}}}$$

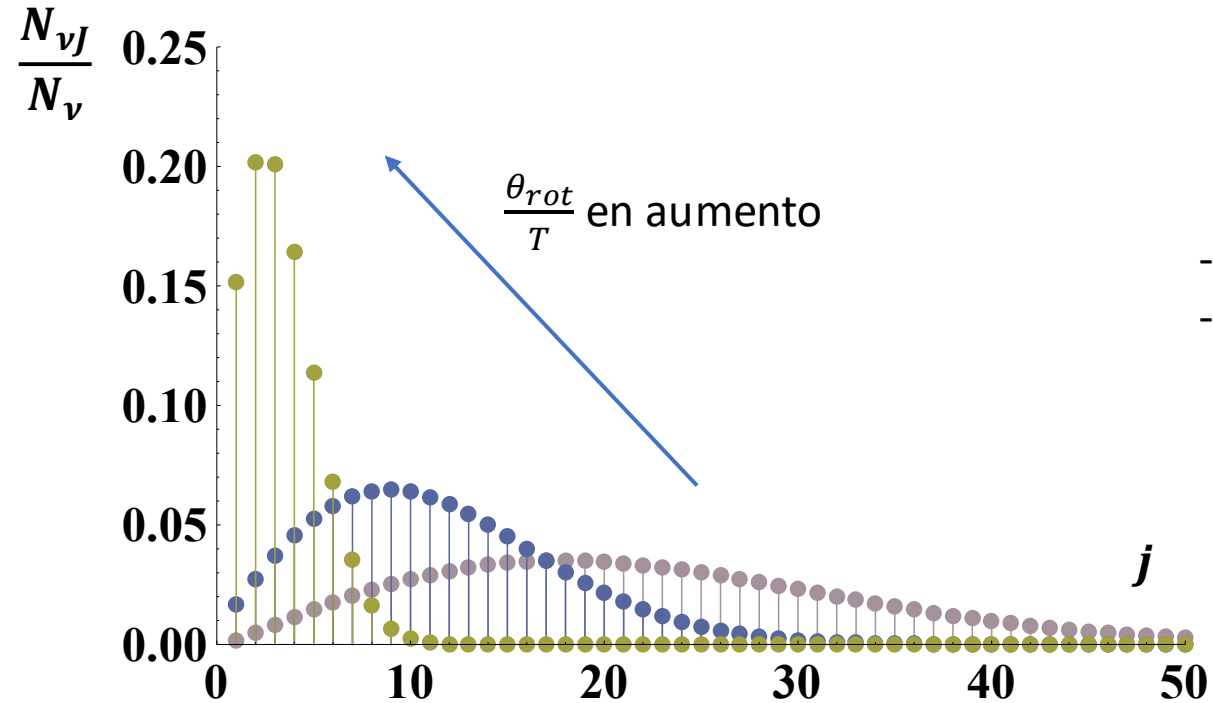
$g_J = (2J+1)$ (multiplicidad o degeneración del estado)

$$\theta_{\text{rot}} = \frac{Bhc}{k_b} \quad B = \frac{h}{8\pi^2 cI}$$

$\theta_{\text{rot}} (42 \text{ K para } H_2) \ll T (300 \text{ K})$, (momento de inercia grande, temperatura grande) puedo considerar continuo de niveles por lo que

$$\sum_J (2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}} \rightarrow \int_0^\infty (2J+1)e^{-\frac{J(J+1)Bhc}{k_B T}} dJ = \frac{T}{\theta_{\text{rot}}}$$

$$\frac{N_{vJ}}{N_v} = \left(\frac{\theta_{\text{rot}}}{T} \right) (2J+1)e^{-\frac{J(J+1)\theta_{\text{rot}}}{T}}$$



$$\frac{N_{vJ}}{N_v} = \left(\frac{\theta_{rot}}{T} \right) (2J + 1) e^{-\frac{J(J+1)\theta_{rot}}{T}}$$

- Se esperan los niveles más bajos más poblados
- El máximo se alcanza por estar multiplicado por $(2J + 1)$

Niveles de energía moleculares: vibraciones



Aproximación de oscilador armónico

Los átomos interactúan a través de fuerzas del tipo elástica

Cada grado de libertad vibracional es un oscilador armónico

Molécula diatómica (1gl de vibración)

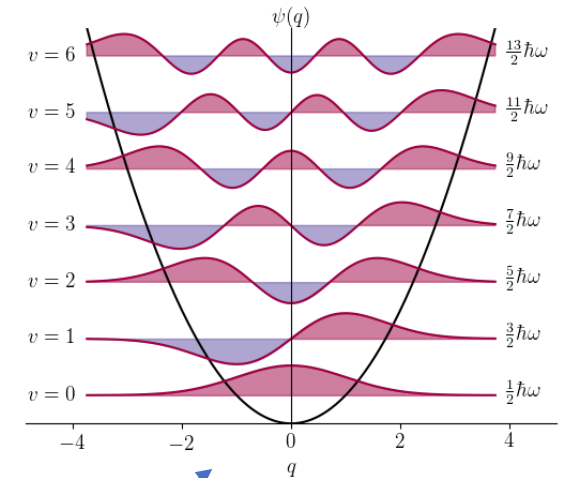
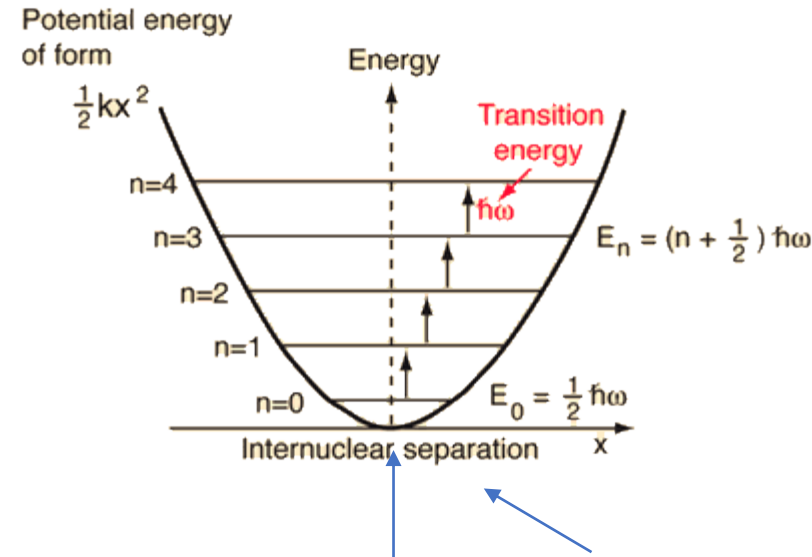


$$V(x) = \frac{1}{2} k_1 x^2$$

$$E_v^{vib} = \left(v + \frac{1}{2} \right) h \nu_1$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



$$\Delta E_v^{vib} = h \nu_1$$

Energía de vacío $\frac{1}{2} h \nu_1 \rightarrow$ nivel ocupado aún para $T=0$
No tienen análogo clásico

Niveles de energía moleculares: vibraciones



Aproximación de osciladores armónicos

Si tengo más grados de libertad, cada grado de libertad vibracional es un oscilador armónico

Ej: CO₂

$$N=3$$

3N = 9 grados de libertad:

3 traslación + 3 rotación

3N-6 = 3 vibraciones **tres modos de oscilación**

N modos de oscilación

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

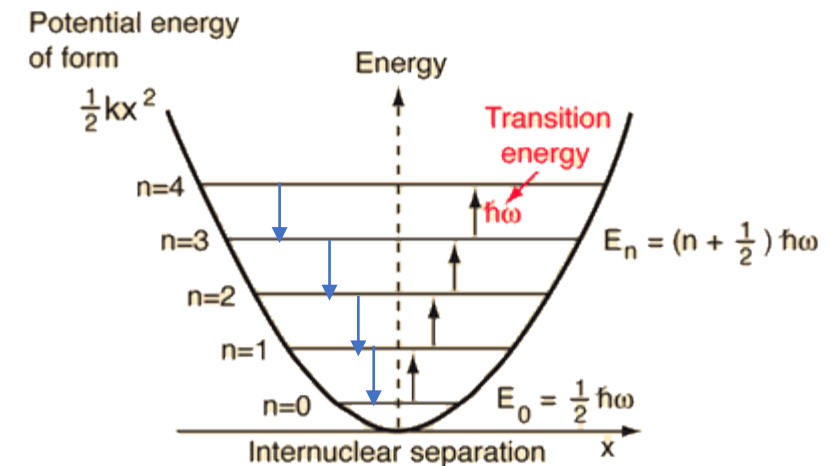
$$E_v^{vib} = \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) h\nu_1 + \left(v_2 + \frac{1}{2} \right) h\nu_2 + \left(v_3 + \frac{1}{2} \right) h\nu_3 + \dots + \left(v_N + \frac{1}{2} \right) h\nu_N$$

v_i números cuánticos de oscilación

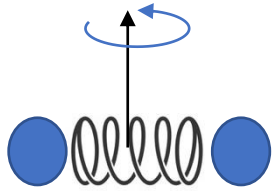
$v_i = 0, 1, 2, \dots$

Reglas de selección para transiciones vibracionales armónicas

$$\Delta v = \pm 1$$



Transiciones rotovibracionales



La molécula vibra y rota

$$\Delta E_v^{vib} \gg \Delta E_J^{rot}$$

Reglas de selección (transiciones radiativas permitidas)

Si la molécula vibra y rota, las transiciones ocurren entre un subnivel rotacional de un nivel vibracional a otro subnivel rotacional de otro vibracional

$$\Delta v = \pm 1 \text{ (en un modo)}$$

$$\Delta J = 0, \pm 1, \quad \Delta J = J_u - J_l$$

$$\Delta J = -1, \quad \text{rama } P$$

$$\Delta J = 0, \quad \text{rama } Q$$

$$\Delta J = +1, \quad \text{rama } R$$

En algunas moléculas la rama Q está prohibida (por tener $J_u = J_l = 0$)

- Diatómicas (excepto NO – Oxido Nítrico)
- Algunas lineales (CO₂)

Dos estados de un mismo modo vibracional (ν_1)

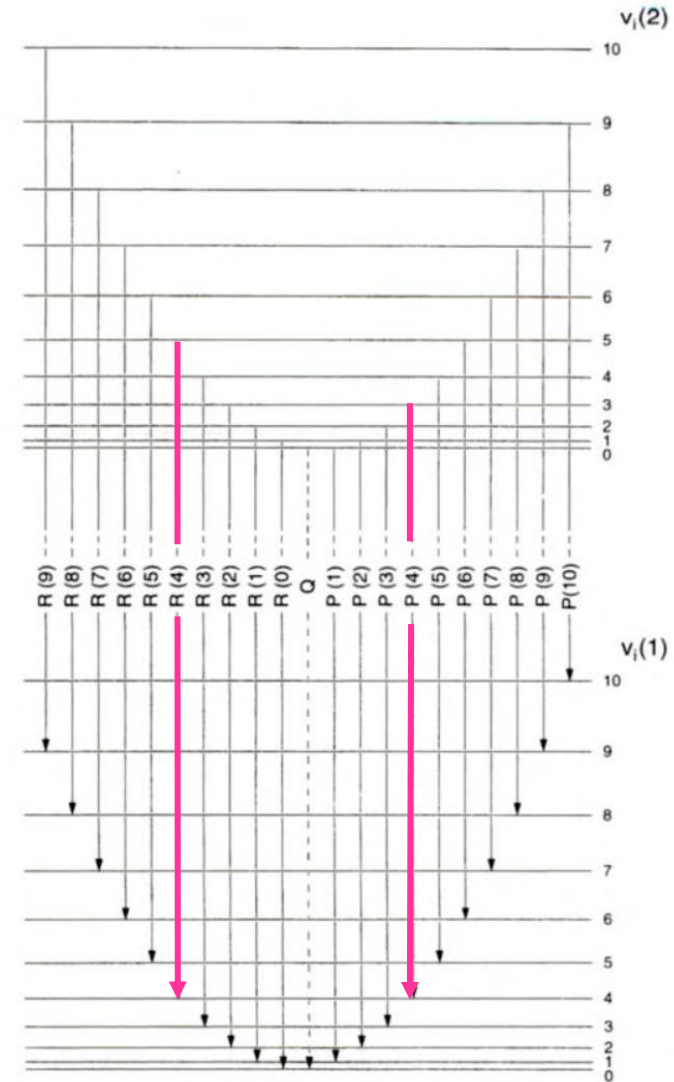


Figure 5-5 Energy-level diagram, showing two specific vibrational levels within a single vibrational mode of a molecule along with the rotational sublevels, as well as the presence of the P- and R-branch transitions and absence of Q-branch transitions

Transiciones rotovibracionales



Ejemplo: Niveles de energía laser de CO₂ (10.6 μm), operando a 500K

CO₂ molécula lineal

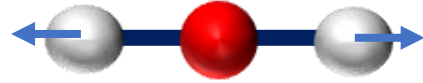


N=3

3N = 9 grados de libertad:

3 traslación + 3 rotación

3N-6 = 3 vibraciones



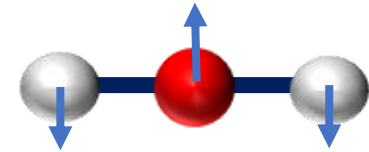
Estiramiento
simétrico

$$\nu_1 = 4.16 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$



Estiramiento
asimétrico

$$\nu_3 = 7.05 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$



Flexión (degeneración 2, ocurre
en el plano perpendicular)

$$\nu_2 = 2.00 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

$$E_{v_1, v_2, v_3}^{vib} = \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) h\nu_1 + \left(v_2 + \frac{1}{2} \right) h\nu_2 + \left(v_3 + \frac{1}{2} \right) h\nu_3$$

$$E_{(0,0,0)}^{vib} = \frac{1}{2} (h\nu_1 + h\nu_2 + h\nu_3) = 0.2235 \text{ eV}$$

Números cuánticos:

$$v_1, v_2, v_3 = 1, 2, 3, \dots$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (1, 0, 0)$$

$$E_{(1,0,0)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_1 = 0.172 \text{ eV}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (0, 1, 0)$$

$$E_{(0,1,0)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_2 = 0.083 \text{ eV}$$

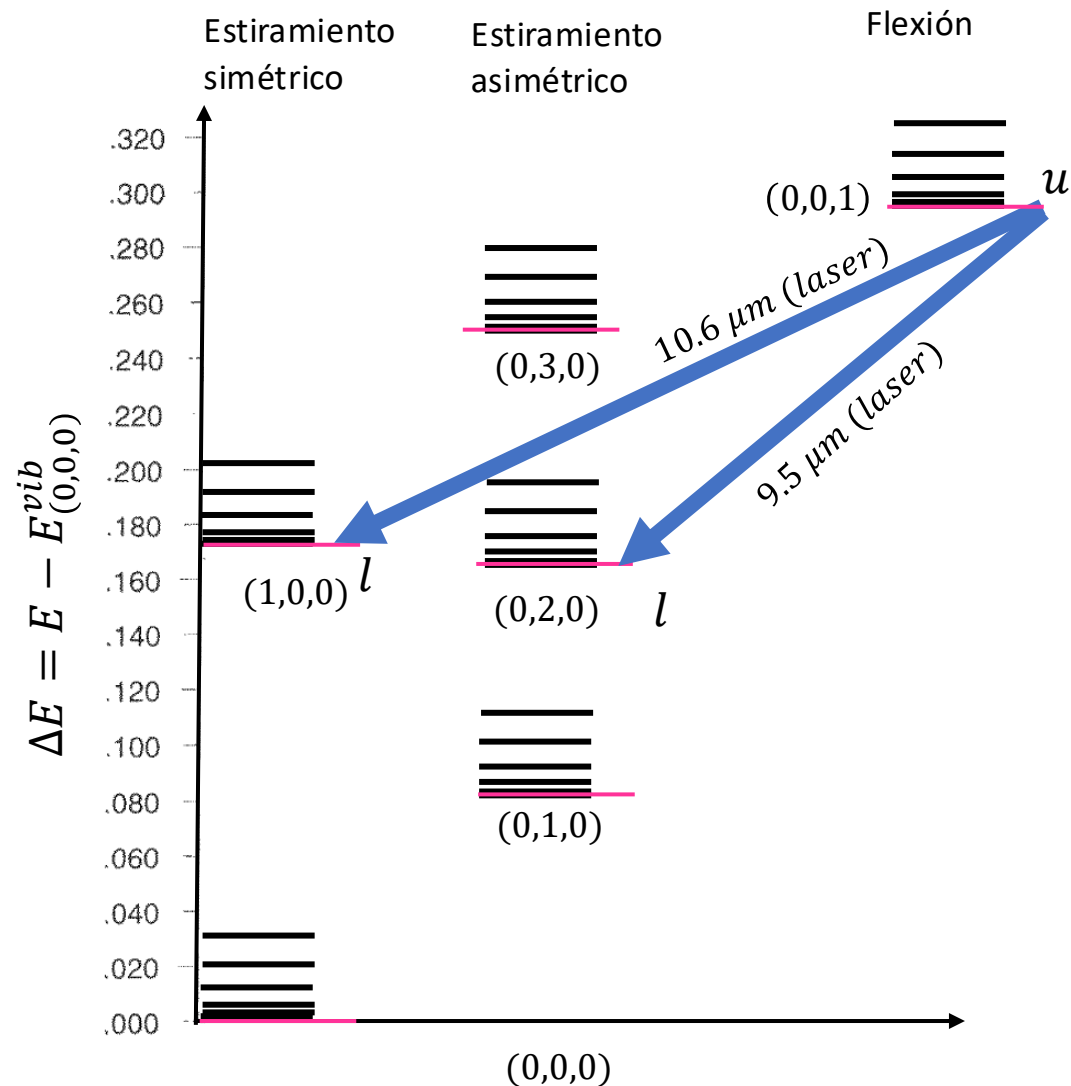
$$(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 1)$$

$$E_{(0,0,1)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_3 = 0.292 \text{ eV}$$



$$h \sim 4.136 \times 10^{-15} \text{ eVs}$$

Transiciones rotovibracionales



$$E_{(1,0,0)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_1 = 0.172 \text{ eV}$$

$$E_{(0,1,0)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_2 = 0.083 \text{ eV}$$

$$E_{(0,0,1)}^{vib} - E_{(0,0,0)}^{vib} = h\nu_3 = 0.292 \text{ eV}$$

$$(0,0,1) \rightarrow (1,0,0)$$

$$\Delta E = E_{(0,0,1)}^{vib} - E_{(1,0,0)}^{vib} = 0.12 \text{ eV}$$

$$\lambda \sim 10.33 \mu m$$

$$(0,0,1) \rightarrow (0,2,0)$$

$$\Delta E = E_{(0,0,1)}^{vib} - E_{(0,2,0)}^{vib} = 0.292 \text{ eV} - 2 \times 0.083 = 0.126$$

$$\lambda \sim 9.8 \mu m$$

¡Falta tener en cuenta rotaciones!

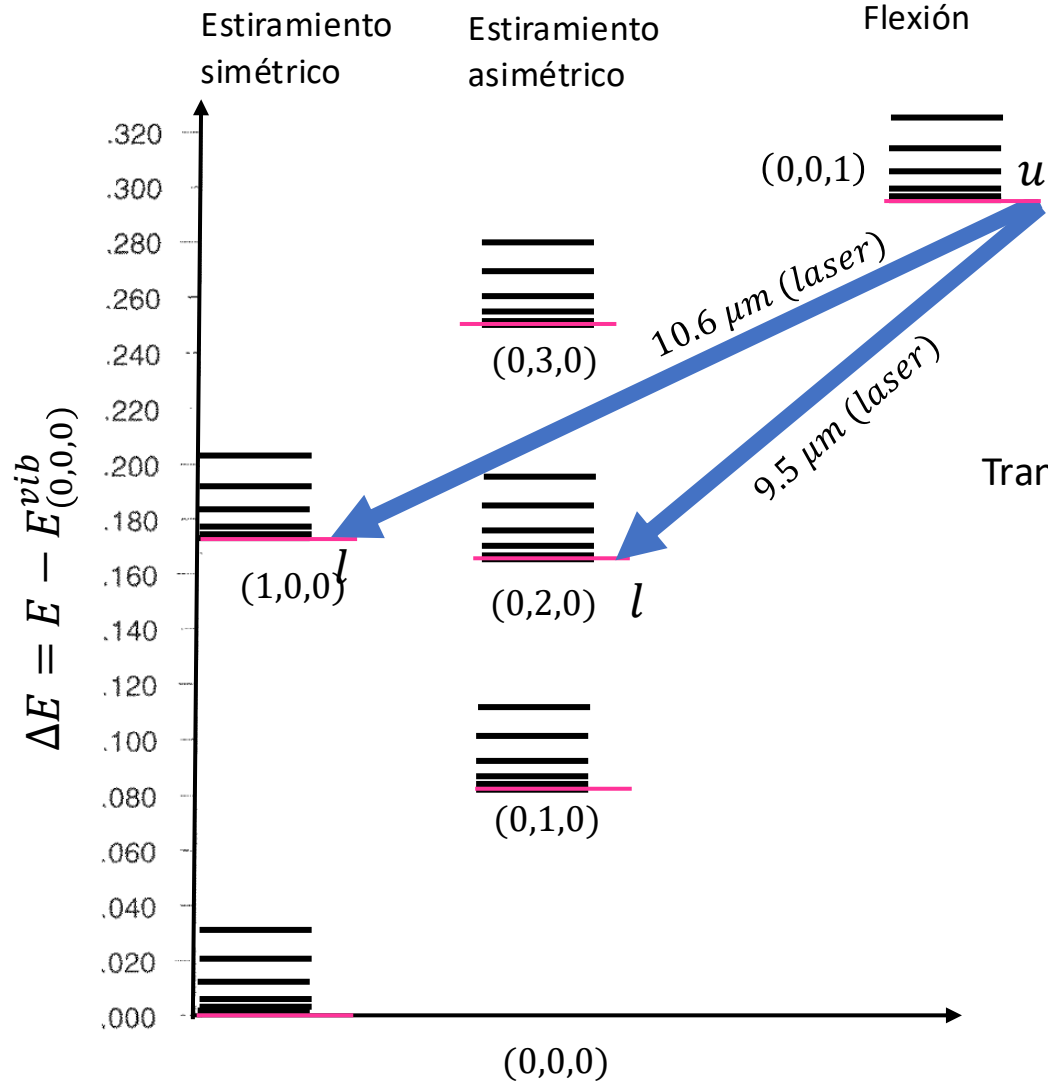
Ver que no se cumple que $\Delta v = \pm 1 \rightarrow$ no importa porque la transición es entre modos diferentes



Para pensar

¿Por que hay transición radiativa entre niveles vibracionales?

Transiciones rotovibracionales



$$E_{rot}^J = J(J+1)Bhc \quad B = 39 \text{ m}^{-1}$$

$$E_{rot}^1 - E_{rot}^0 = 2Bhc = 9.68 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

Reglas de selección $\Delta J = 0, \pm 1$

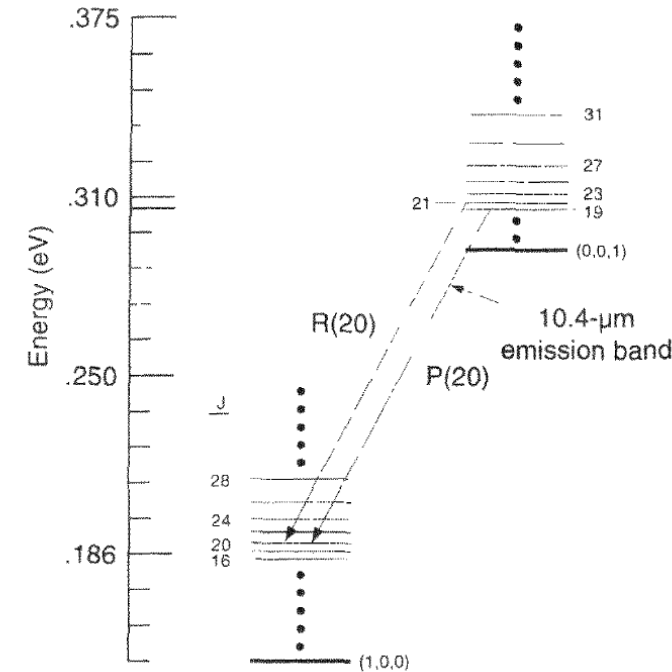
$$E_{rot}^J = J(J+1) \times (4.84 \times 10^{-5}) \text{ eV}$$

$$(0,0,1) \rightarrow (1,0,0)$$

Transiciones más significativas P(20) y R(20)

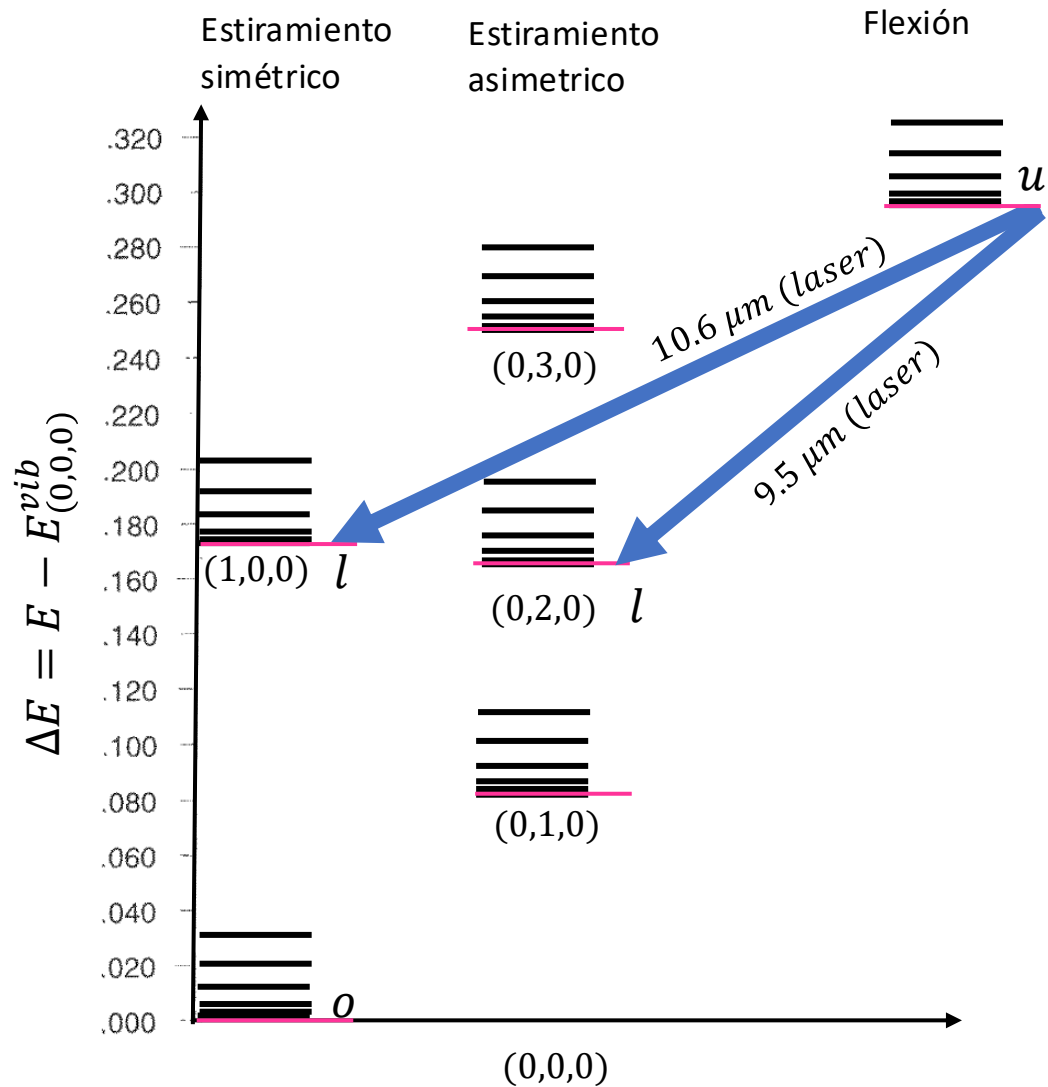
$$\begin{aligned} \text{P}(20) &\rightarrow \Delta J = -1 \\ J &= 19 \rightarrow J = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R}(20) &\rightarrow \Delta J = +1 \\ J &= 21 \rightarrow J = 20 \end{aligned}$$



Calcular la energía de transición total (considerando vibraciones y rotaciones), longitud de onda, número de onda...

Transiciones rotovibracionales



$$\Delta \nu_D = (7.16 \times 10^{-7}) \nu_o \sqrt{\frac{T}{M_A}}$$

$$E_{rot}^1 - E_{rot}^0 = 2Bhc = 9.68 \times 10^{-5} eV$$

$$\Delta \nu_D = (7.16 \times 10^{-7}) \frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{M_A}} = (7.16 \times 10^{-7}) \frac{3 \times 10^8 m/s}{10.6 \times 10^{-6} m} \sqrt{\frac{500K}{44}}$$

$$= 6.83 \times 10^7 Hz$$

$$\Delta E_D = h\Delta \nu_D = 2.83 \times 10^{-7} eV$$

$$\Delta E_D \ll \Delta E_{Rot} (1 \rightarrow 0) (\Delta E_{Rot} > 9.68 \times 10^{-5} eV)$$

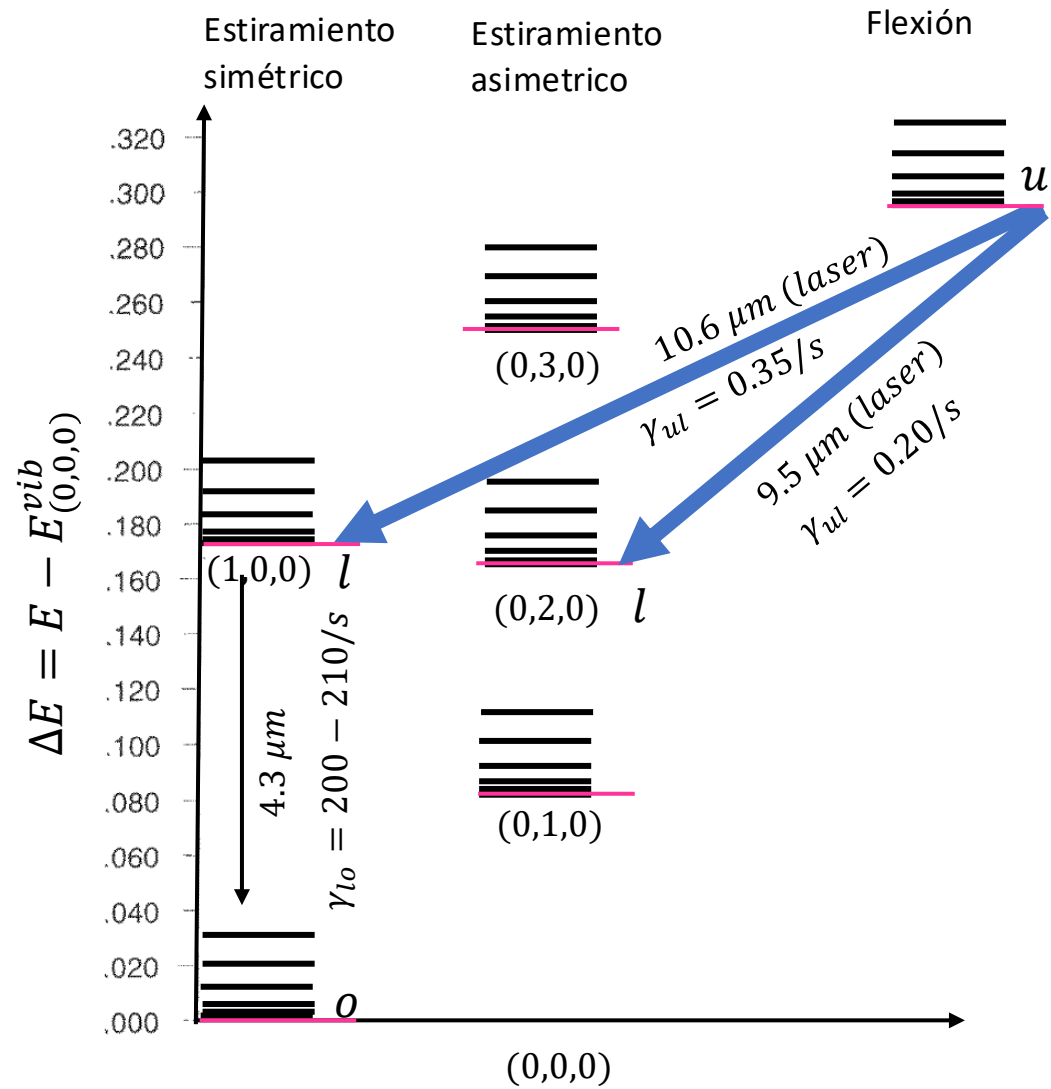
Se pueden resolver las transiciones

Láser de CO2 de alta presión

A $P > 50$ Torr, empiezan a importarse las colisiones (más moléculas, más colisiones)

A $P > 8 \text{ atm} = 6080$ Torr, las líneas se ensanchan y observo un continuo en lugar de líneas resueltas

Transiciones rotovibracionales



Ver que $\gamma_{ul} \ll \gamma_{lo}$, esto es muy importante para hacer funcionar un láser!

Niveles electrónicos moleculares



Niveles electrónicos atómicos

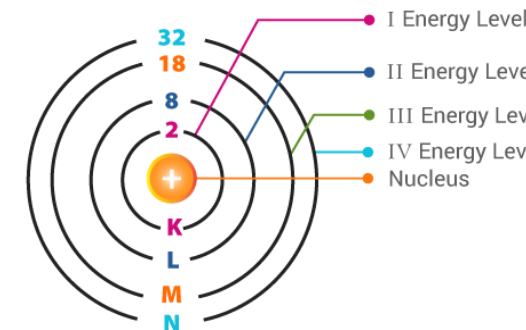
Único electrón

$L:$	0	1	2	3
	s	p	d	f

Varios electrones

$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

(configuración capas no completas). $^{2S+1}L_J$



Niveles electrónicos moleculares

Número cuántico momento orbital

$\Lambda:$	0	1	2	3
	Σ	Π	Δ	Φ

Número cuántico rotacional

$$J = \Lambda, \Lambda + 1, \Lambda + 2, \dots$$

Número cuántico spin $S \rightarrow$ **multiplicidad** $2S + 1$

Estado singlete $S = 0$

Estado doblete $S = 1/2$

Estado triplete $S = 1$

$$^{2S+1}\Lambda$$

Ejemplo singlete con
momento angular 0

$$^1\Sigma$$

Niveles electrónicos moleculares

Niveles electrónicos atómicos

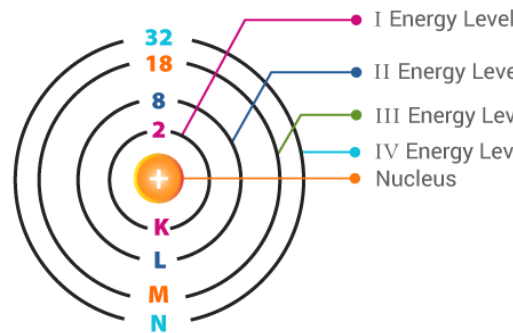
Único electrón

$L:$	0	1	2	3
	s	p	d	f

Varios electrones

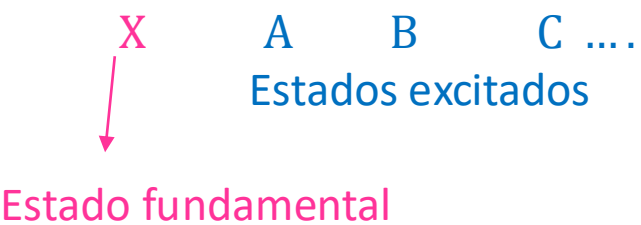
$L:$	0	1	2	3
	S	P	D	F

(configuración capas no completas). $^{2S+1}L_J$



Niveles electrónicos moleculares

Estados de energía

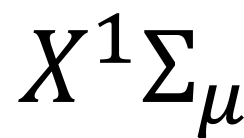


Paridad

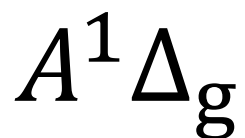
Par (gerade) $\rightarrow g$

Impar (ungerade) $\rightarrow \mu$

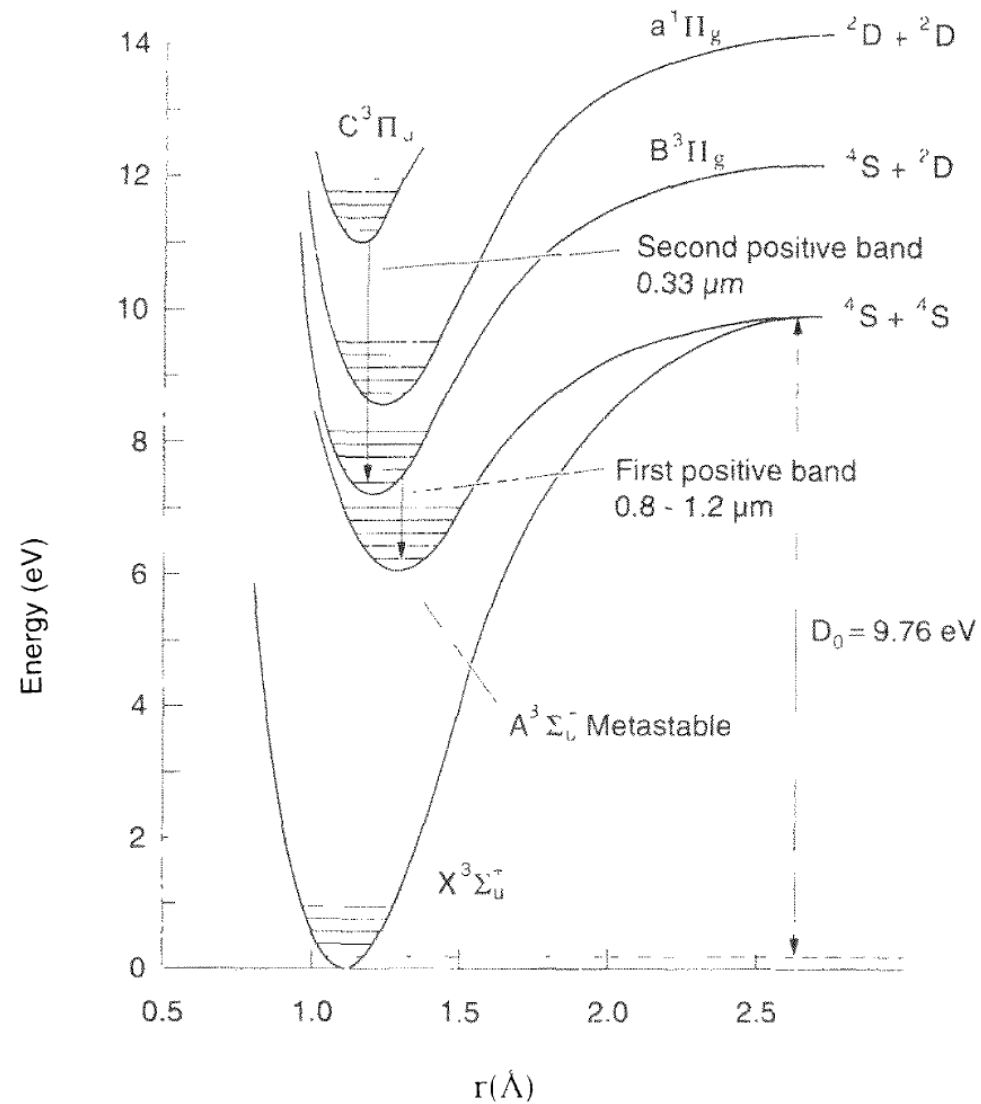
fundamental



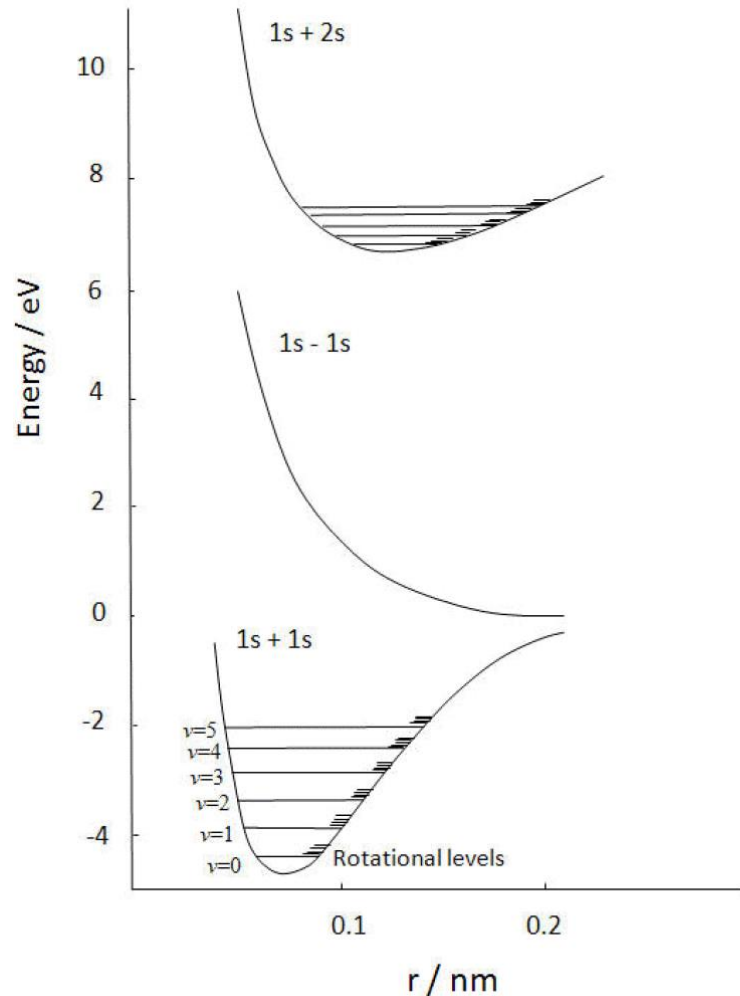
Excitado



Nitrógeno (N_2)



Ejemplo H2



No importa cual sea el nivel electrónico, la molécula vibra y rota

Transiciones electrónicas y reglas de selección

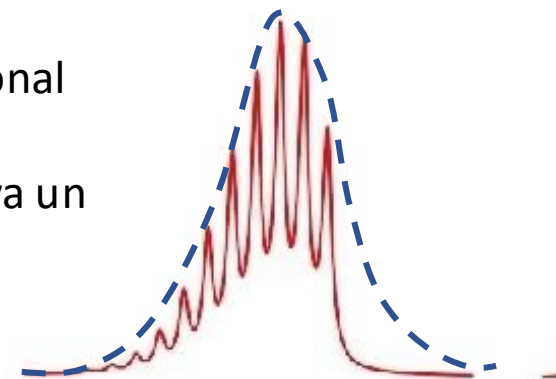
$$\Delta\Lambda = 0, \pm 1$$
$$\Delta S = 0$$

Ancho de línea

- Ancho de línea natural de la transición (homogéneo, Lorentziano)
- Ensanchamiento Doppler (inhomogéneo, gaussiano o Voigt)
- Ensanchamiento colisional (homogéneo, lorentziano)

Presión

- * $P < 50\text{Torr}$, domina el ensanchamiento Doppler.
- * $P > 50\text{Torr}$, empieza a dominar el ensanchamiento colisional (también llamado ensanchamiento por presión).
- * $P > 8\text{atm}$ ($\approx 6080\text{ Torr}$), las líneas se solapan y se observa un continuo.

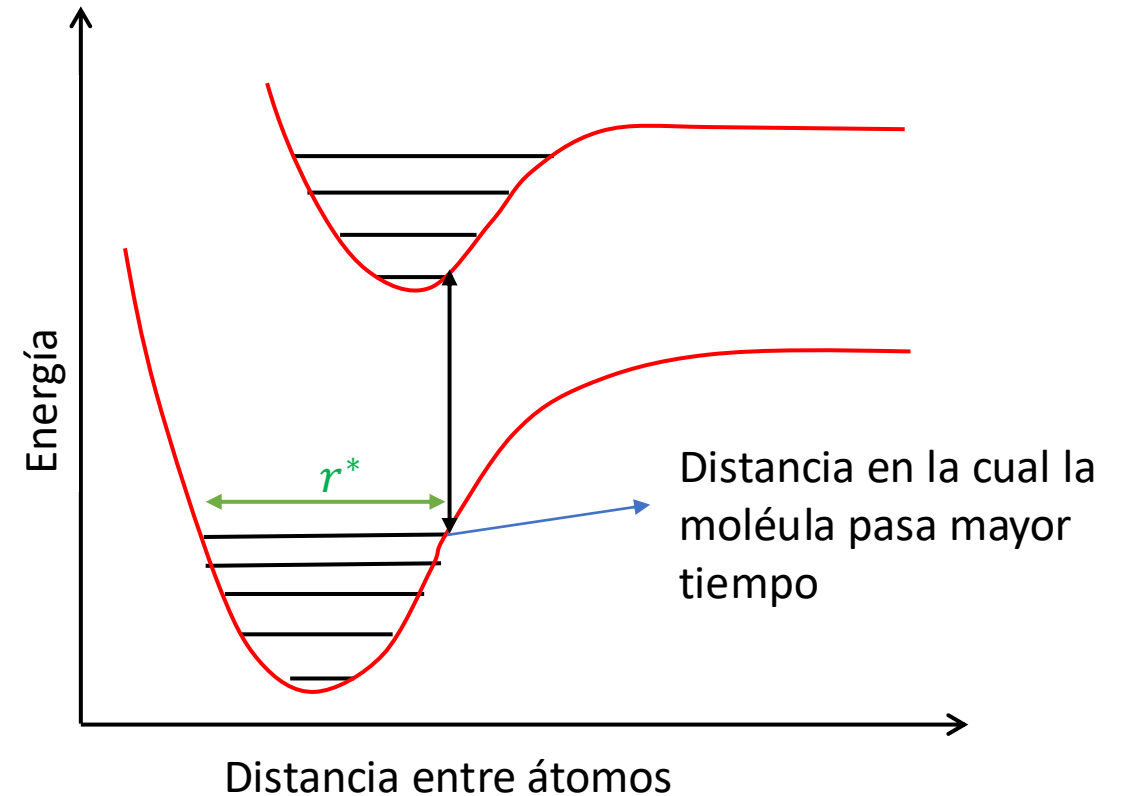
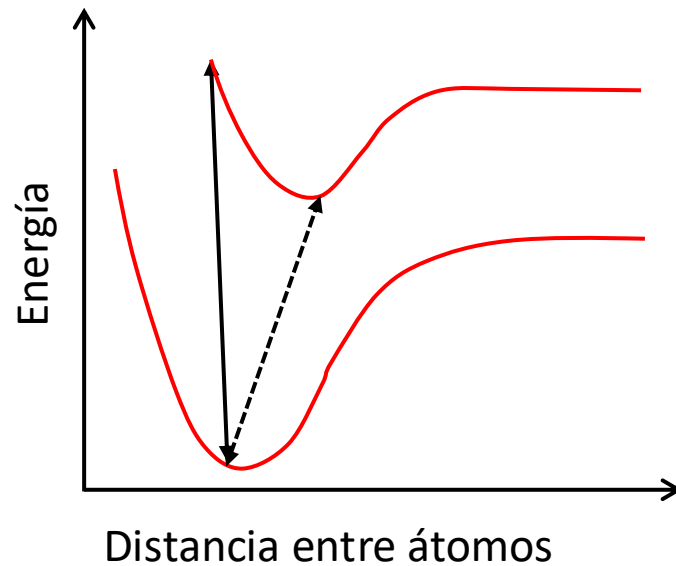


Niveles electrónicos moleculares



Principio de Franck-Condon

- Todas las transiciones electrónicas, ya sea por emisión de energía (radiación o colisiones) o por absorción (fotones, campo eléctrico, colisiones, etc.), pueden representarse como transiciones verticales en diagramas de energía molecular en función de la separación internuclear.
- Las transiciones electrónicas son tan rápidas (del orden de fs) que la distancia entre los núcleos no llega a cambiar durante la transición.



r^* distancia máxima de la excursión que hace la mlc en el nivel vibracional

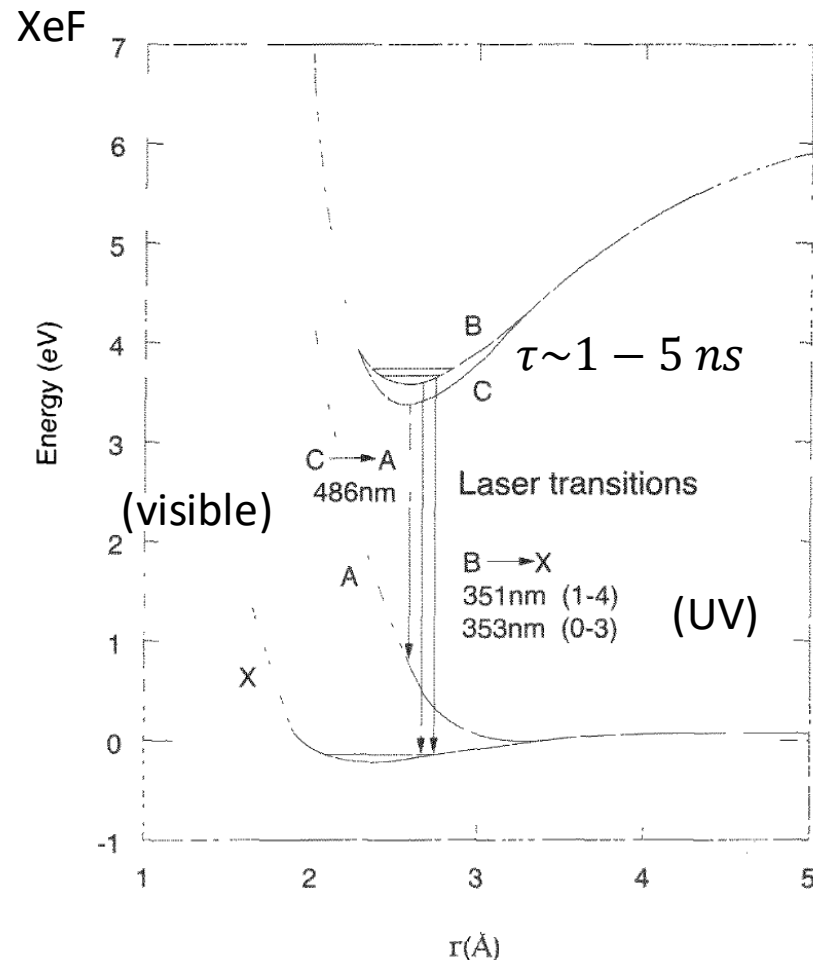
Ejemplos láseres gases moleculares



Laser de excímeros → medio activo: moléculas de excímeros

Moléculas de excímeros empleados en láseres: XeF (fluoruro de Xenón), XeCl, KrF, ArF, HgBr, Xe₂, Ar₂,

F₂ (VUV 153 nm): muy importante en la historia de la industria semiconductora!



Estado excitado estable (B,C)

Se excita al Flúor, luego se combina con Xe → XeF*

Estado fundamental inestable (A) o muy poco estable (X):
esta molécula no existe normalmente en la naturaleza

¡Muy favorable para láseres! (se logra inversión de población porque el nivel fundamental se vacía prácticamente al instante)

Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

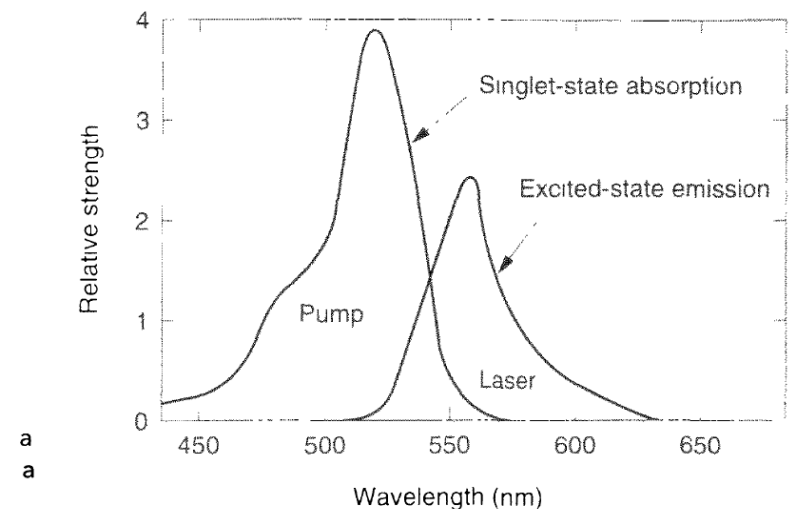
Láseres de colorantes (medios de alta densidad I) → medio activo moléculas de colorante MUY disueltas en solventes (casi aisladas)

colorante	emisión
Polimetinos	700-1500 nm (IR/rojo)
Xantanos	500-700 nm (verde/rojo)
Coumarinas	400-500 nm (azul/verde)
centelladores	320-400 nm (UV)

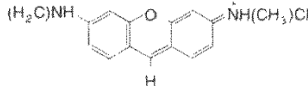
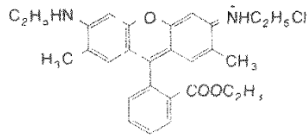
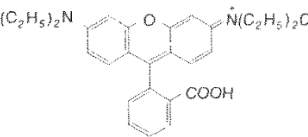
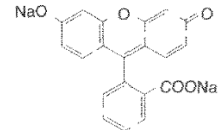
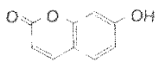
Solventes: solvente (agua, etilne glycol, alcohol) - transparentes al bombeo y emission laser

Concentracion en solvente: 1parte en 10000 (casi aisladas)

Bombeo óptico: láseres o lámparas flash



Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

Dye	Structure	Solvent	Wavelength
Acridine red		EtOH	Red 600 - 630 nm
Rhodamine 6G		EtOH MeOH H ₂ O DMSO Polymethyl- methacrylate	Yellow 570 - 610 nm
Rhodamine B		EtOH MeOH Polymethyl- methacrylate	Red 605 - 635 nm
Na-fluorescein		EtOH H ₂ O	Green 530 - 560 nm
7-Hydroxycoumarin		H ₂ O (pH -9)	Blue 450 - 470 nm

Cromóforo: solo una pequeña parte de la molécula emite, está apantallado del solvente,

Eficiencia cuántica

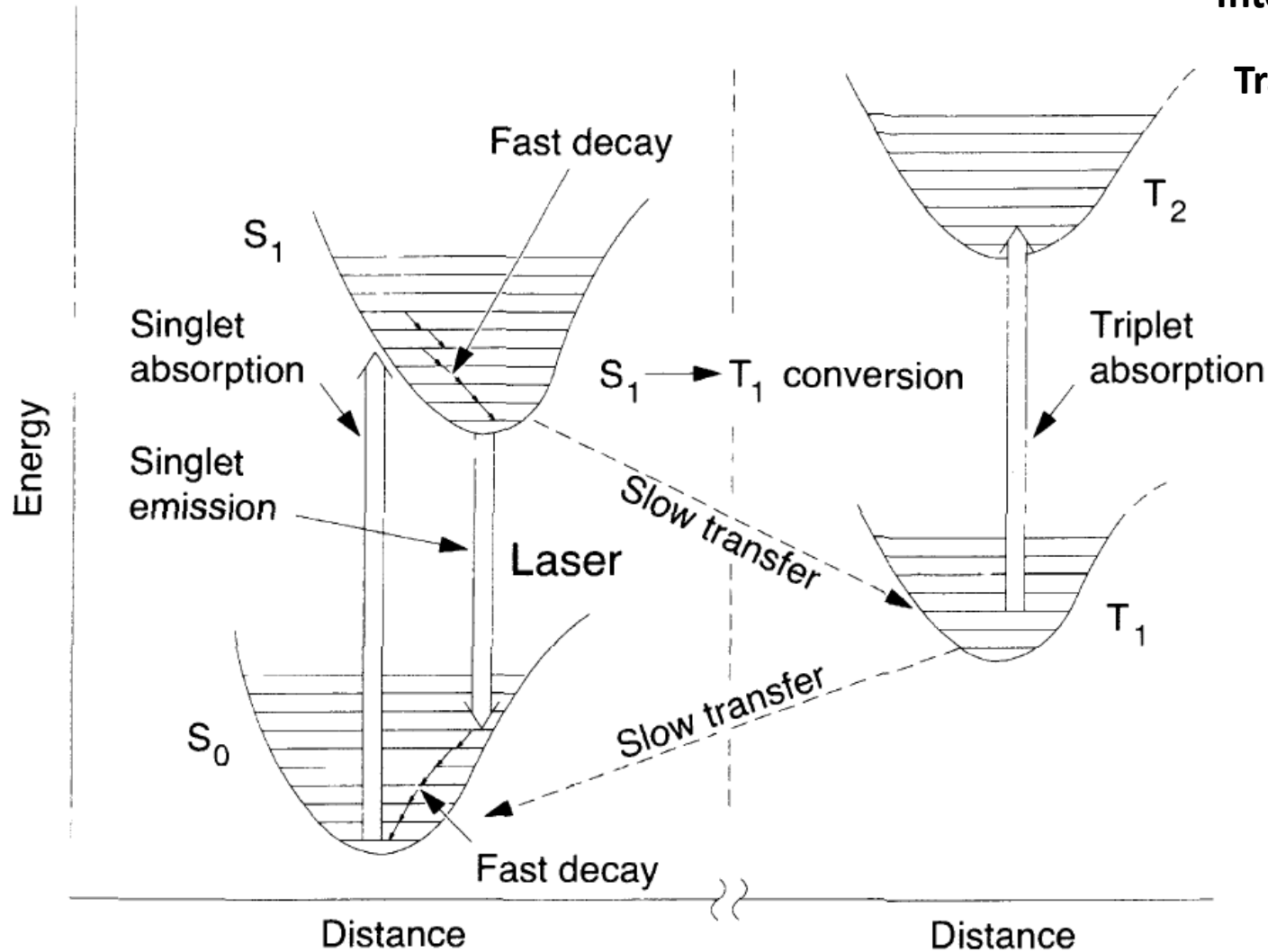
$$\eta = \frac{N^{\circ} \text{ transiciones radiativas}}{N^{\circ} \text{ total (radiativas + no radiativas)}} \sim 1$$

Figure 5-11 Molecular structure of several laser dyes, along with the laser wavelength range for each dye

Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

Intersystem crossings (ISC) (transiciones entre S y T)

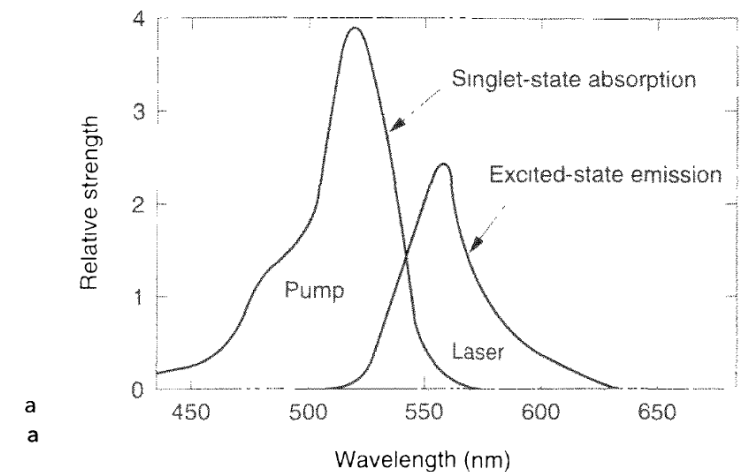
Transiciones eficientes: entre singletes o entre tripletes



$$\Delta E^{vib} \sim 0.1 - 0.15 \text{ eV } (8 - 10) \mu m$$

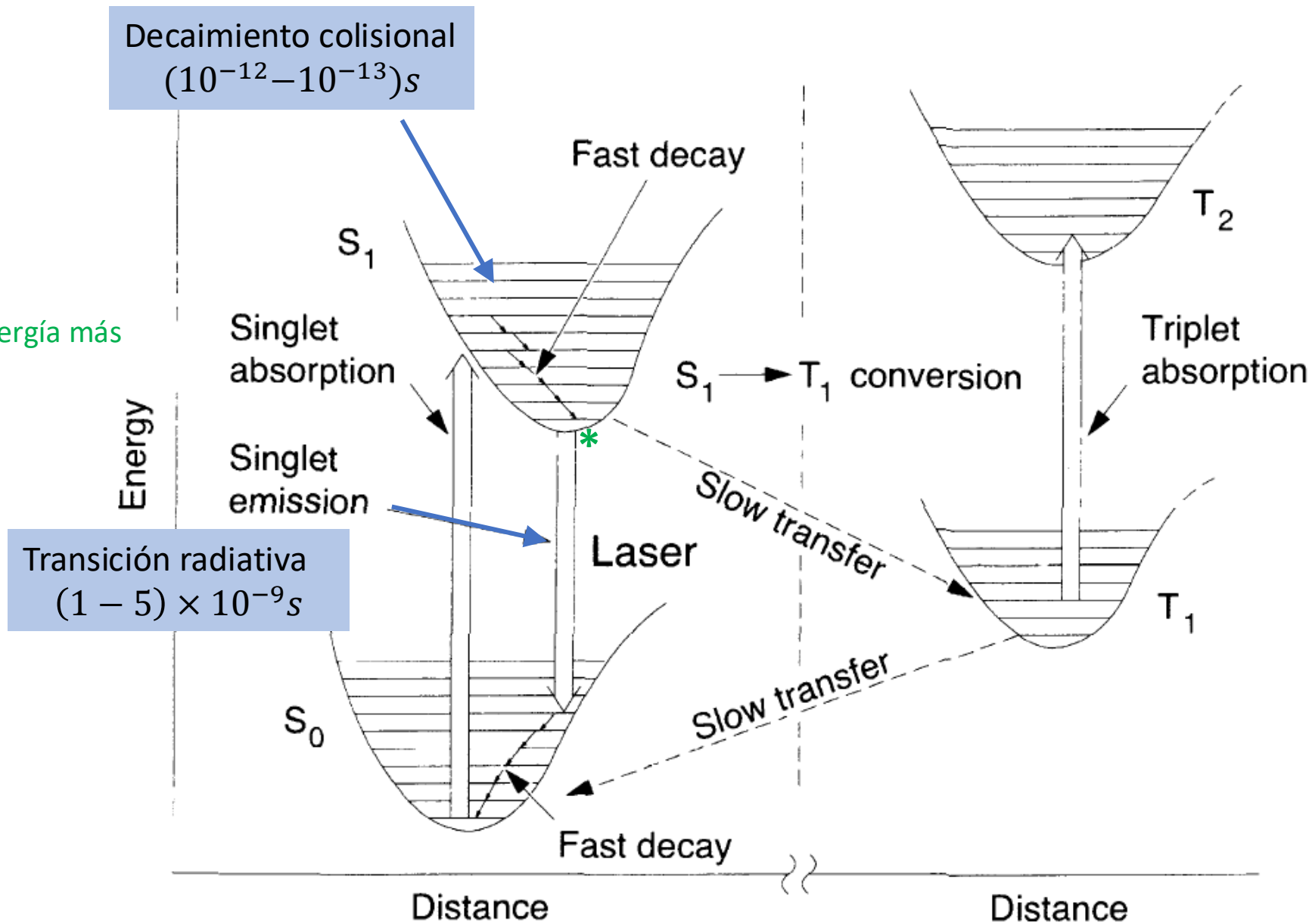
$$\Delta E^{rot} \sim \Delta E^{vib} / 100$$

Niveles ensanchados, se observa un continuo



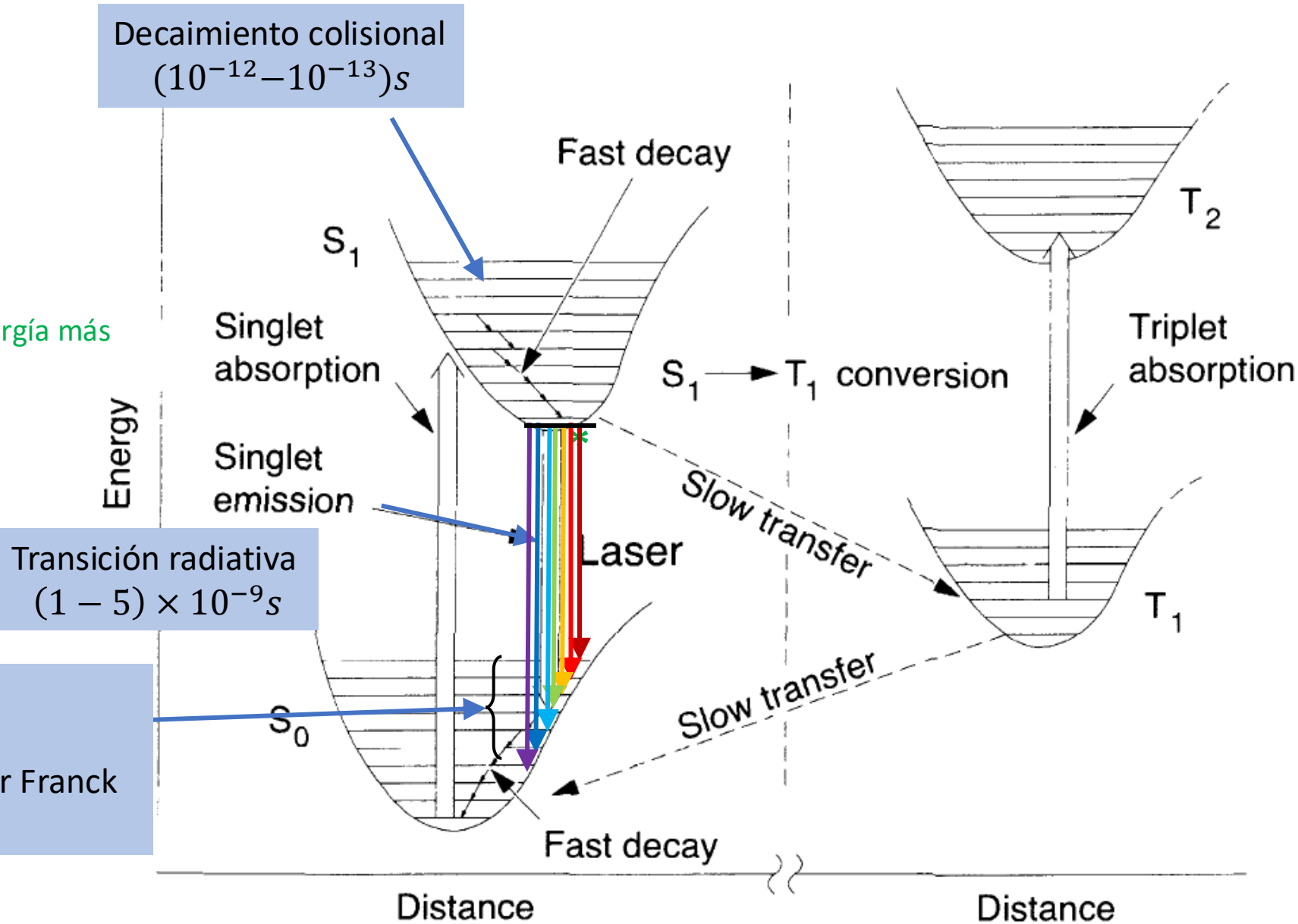
Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

* Nivel de energía más bajo de S₁

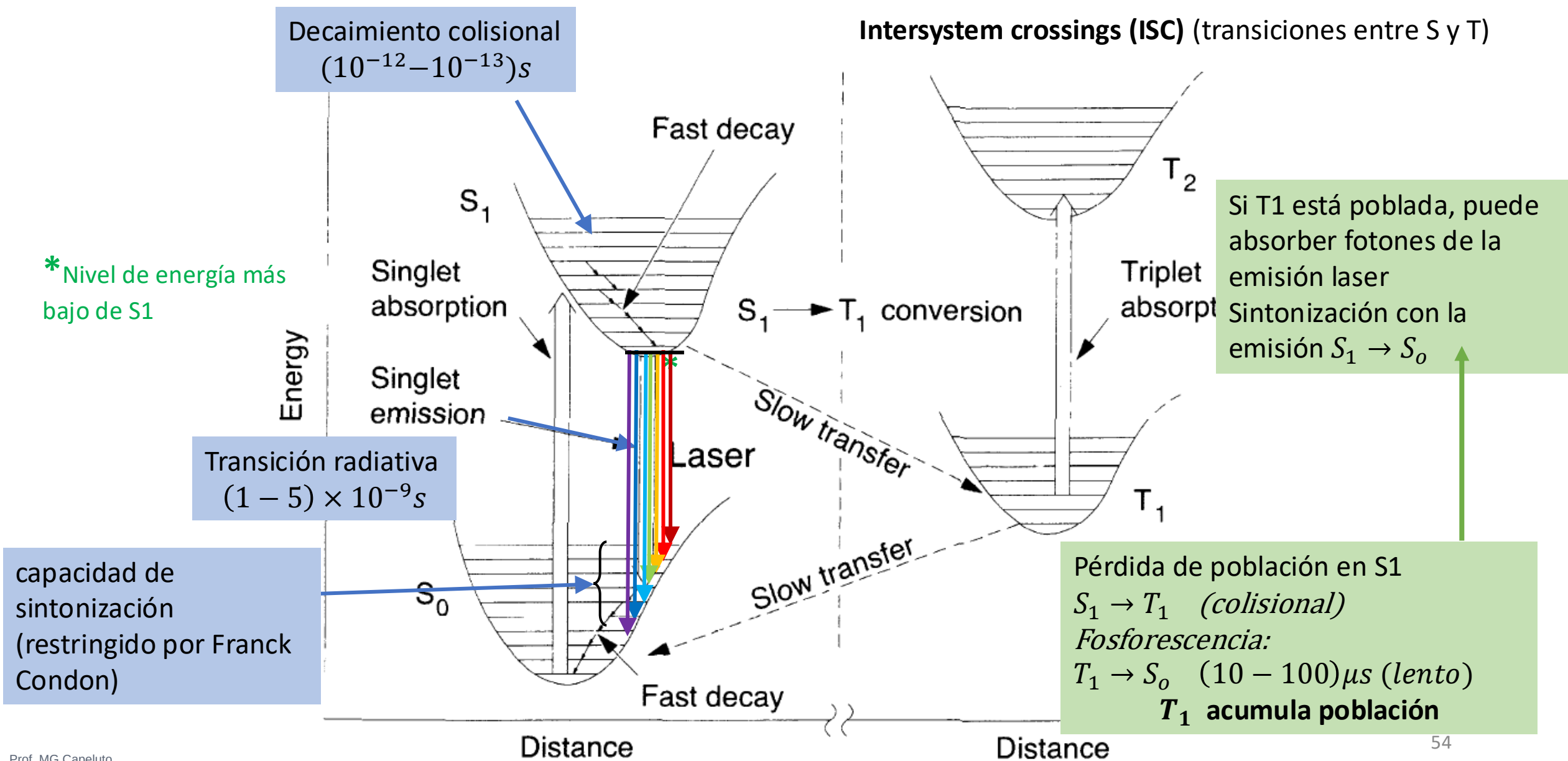


Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

* Nivel de energía más bajo de S₁



Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas



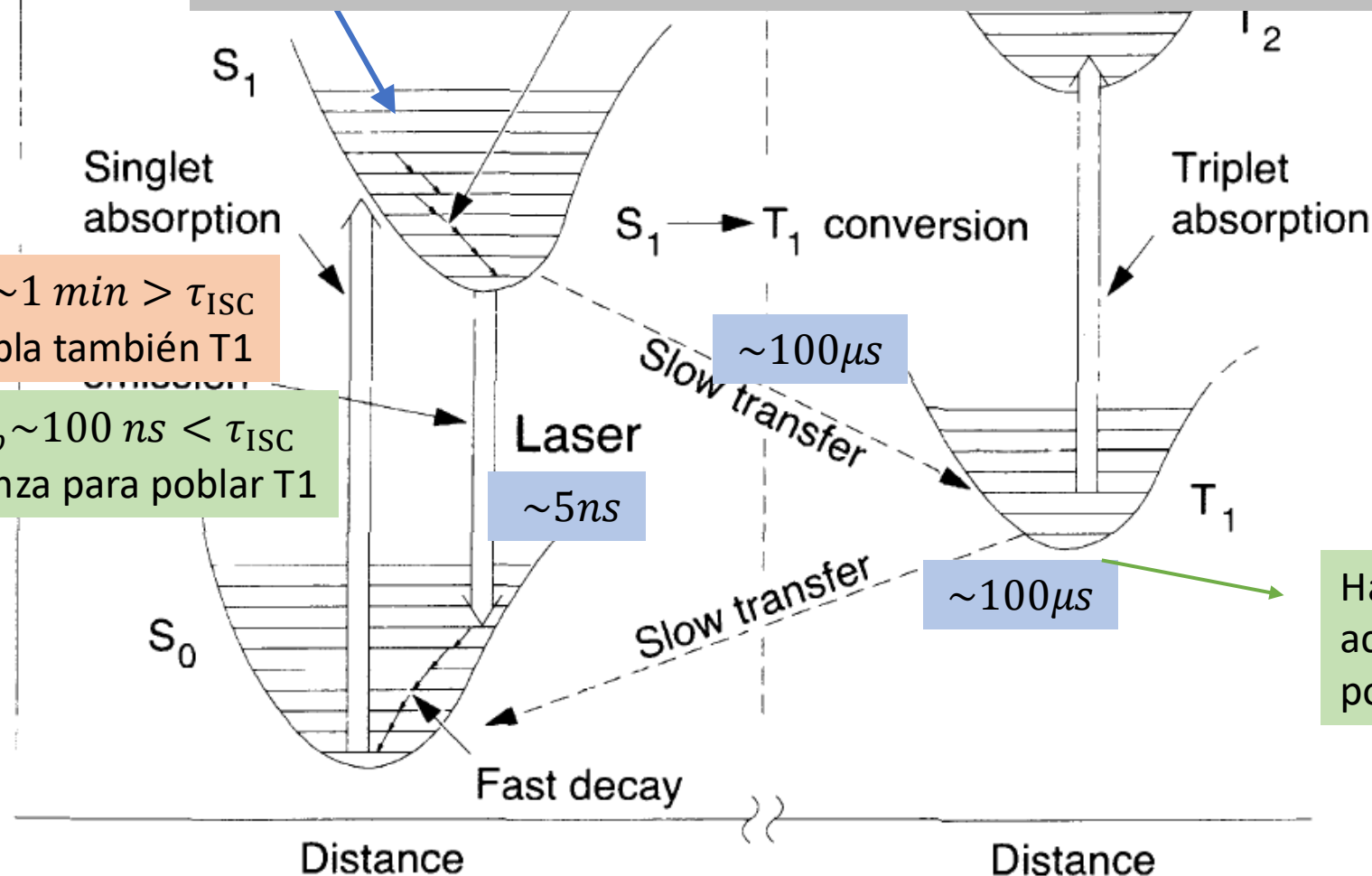
Niveles de energía en líquidos y propiedades radiativas

- Las transiciones $S_1 \rightarrow T_1$ y $T_1 \rightarrow T_2$ reducen la población útil de S_1
- Laser pulsado:** emite antes que se pueble T_1 (tiempos menores que ISC)
- Laser CW:** Tengo que renovar el líquido constantemente (flujo laminar de colorante remueve material en estado triplete)

Pump pulsado

$\tau_{pump} \sim 1 \text{ min} > \tau_{ISC}$
Se puebla también T_1

$\tau_{pump} \sim 100 \text{ ns} < \tau_{ISC}$
No alcanza para poblar T_1

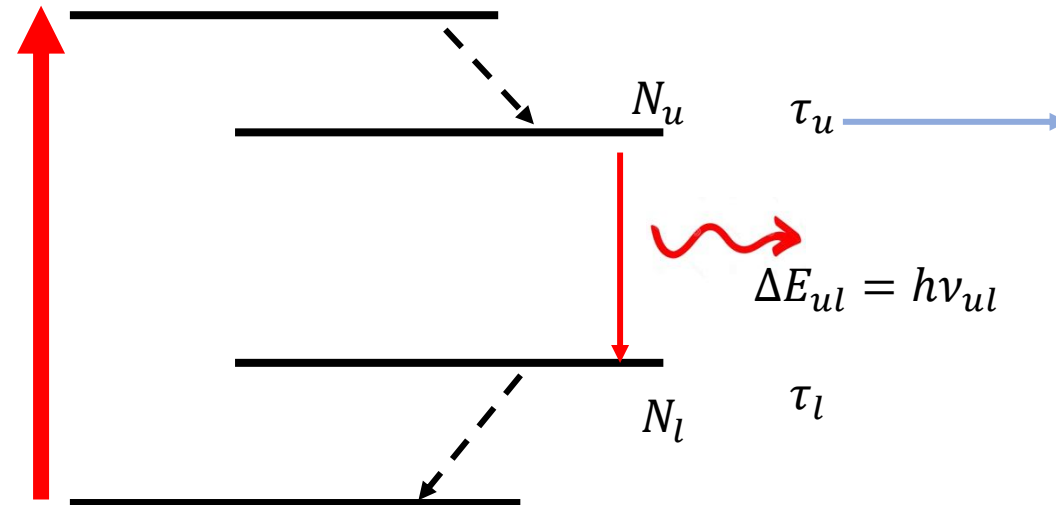


Hay que evitar la acumulación de población en T_1

Observemos un patrón en los medios activos vistos



Los medios activos láser que vimos hasta ahora tienen una característica común:



τ_u Largo:

Se busca almacenar energía para luego ser emitida en radiación láser

En general

$\tau_u < 10^{-6} s$

Excepto para láseres de estado sólido n donde $\tau_u < 10^{-3} s$

Medios dieléctricos (medios de alta densidad II)

ESPECIE ACTIVA	HOST
Cr^{3+} , Nd^{3+} , etc • ion que se dopa o crece en el host • en bajas concentraciones (0.1-10) % • <i>Tiempos de vida largos</i> $\tau_u \sim 10^{-6} s - 10^{-3} s$	Cristalinos: óxidos, fosfatos, silicatos, tungstates, molybdates, vanadatos, beeryllates, fluorides, cerámicas ópticas, <i>YAG</i> (Yttrium Aluminum Garnet)
	Amorfos: Al_2O_3 (zafiro), Vidrio, aluminates, oxysulfides

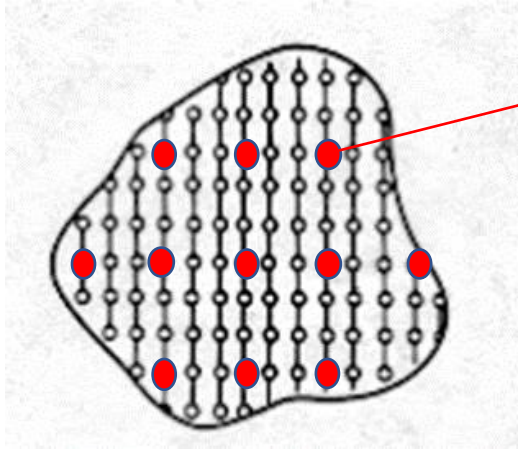
A estas bajas concentraciones, los dopantes quedan relativamente aislados entre sí, “congelados” en la red del material host y aproximadamente equidistantes. Como consecuencia, la interacción entre dopantes es pequeña y se reduce el decaimiento no radiativo por interacción mutua.

A diferencia de los láseres atómicos, los medios activos líquidos y sólidos pueden diseñarse para aplicaciones específicas, de modo de obtener líneas angostas o anchas, por ejemplo, en materiales sintonizables

Niveles de energía y propiedades radiativas en sólidos



Host Cristalino

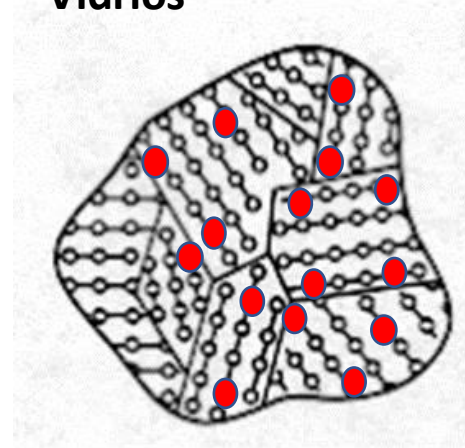


Dopantes:
Centros emisores,
iones activos
(comportamiento
dipolar)

Dopante ocupa sitios equivalentes en la red cristalina

- Ensanchamiento homogéneo
- + conductividad térmica
- + ancho de línea más angosto
- + mas duros y durables

Vidrios



Dopante distribuido en entornos locales no equivalentes dentro del vidrio

- Ensanchamiento inhomogéneo
- Se pueden crecer en tamaños muy grandes,
- Buena calidad óptica

Características de los Host

- Buena rigidez mecánica
- Buena conductividad térmica (para disipar calor en transiciones no radiativas, evitar fracturas o deformaciones)
- Buena calidad óptica (libre de aberraciones, variaciones de índice de refracción y scattering, transparente al bombeo)
- No debe modificar demasiado las propiedades del dopante (tiempo de vida y ancho de línea)

Niveles de energía y propiedades ra

Especies activas: tiempo de vida del nivel superior largo

- Apantallamiento de los niveles f^N
- Los iones están “aislados” evitando depoblación por colisiones (vibrónicos, fonones)

TABLE 5-1(a)

Rare-Earth Dopant Ions

Atomic number	Element	Laser ion	Outer electronic configuration	
			Neutral atom	Laser ion
57	Lanthanum (La)		5d6s ²	
58	Cerium (Ce)	Ce ³⁺	4f5d6s ²	4f ² F _{5/2} ^o
59	Praseodymium (Pr)	Pr ³⁺	4f ³ 6s ²	4f ² ³ H ₄
60	Neodymium (Nd)	Nd ³⁺	4f ⁴ 6s ²	4f ³ ⁴ I _{9/2} ^o
61	Promethium (Pm)		4f ⁵ 6s ²	
62	Samarium (Sm)	Sm ²⁺	4f ⁶ 6s ²	4f ⁶ ⁷ F ₀
63	Europium (Eu)	Eu ³⁺	4f ⁷ 6s ²	4f ⁶ ⁷ F ₀
64	Gadolinium (Gd)	Gd ³⁺	4f ⁷ 5d6s ²	4f ⁷ ⁸ S _{7/2} ^o
65	Terbium (Tb)		4f ⁹ 6s ²	
66	Dysprosium (Dy)	Dy ²⁺	4f ¹⁰ 6s ²	4f ¹⁰ ⁵ I ₈
67	Holmium (Ho)	Ho ³⁺	4f ¹¹ 6s ²	4f ¹⁰ ⁵ I ₈
68	Erbium (Er)	Er ³⁺	4f ¹² 6s ²	4f ¹¹ ⁴ I _{15/2} ^o
69	Thulium (Tm)	Tm ³⁺	4f ¹³ 6s ²	4f ¹² ³ H ₆
		Tm ²⁺		4f ¹³ ² F _{7/2} ^o
70	Ytterbium (Yb)	Yb ³⁺	4f ¹⁴ 6s ²	4f ¹³ ² F _{7/2} ^o
71	Lutetium (Lu)		5d6s ²	

TABLE 5-1(b)

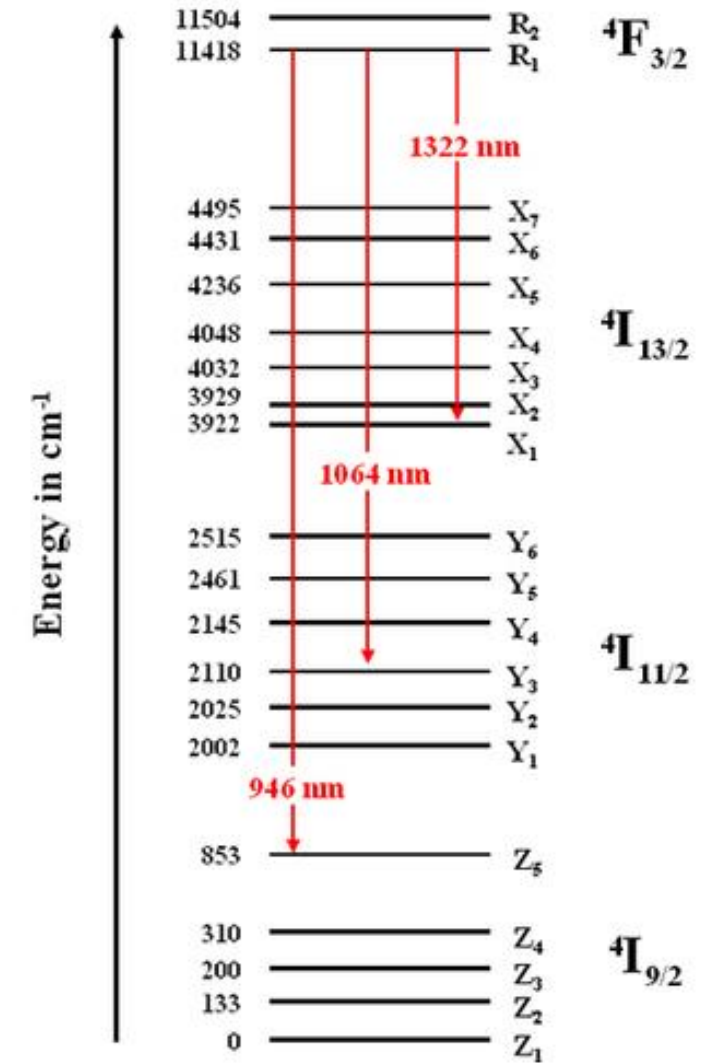
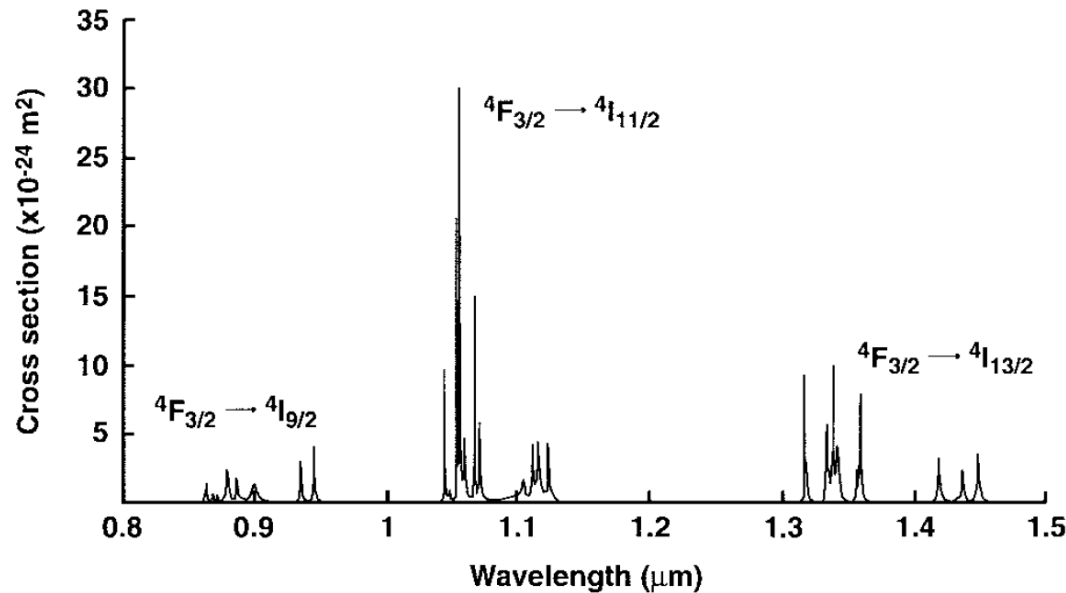
Transition Metal Dopant Ions

Atomic number	Element	Laser ion	Outer electronic configuration	
			Neutral atom	Laser ion
21	Scandium (Sc)		3d4s ²	
22	Titanium (Ti)	Ti ³⁺	3d ² 4s ²	3d ² D _{3/2}
23	Vanadium (V)		3d ³ 4s ²	
24	Chromium (Cr)	Cr ³⁺	3d ³ 4s	3d ³ ⁴ F _{3/2}
25	Manganese (Mn)		3d ⁵ 4s ²	
26	Iron (Fe)		3d ⁶ 4s ²	
27	Cobalt (Co)	Co ²⁺	3d ⁷ 4s ²	3d ⁷ ⁴ F _{9/2}
28	Nickel (Ni)	Ni ²⁺	3d ⁸ 4s ²	3d ⁸ ³ F ₄
29	Copper (Cu)		3d ⁹ 4s ²	
30	Zinc (Zn)		3d ¹⁰ 4s ²	

Láseres con ancho de línea angosto

Típicamente tierras raras (Nd^{3+}) y algunos metales de transición

Los electrones de las capas internas f o d están apantallados por las capas externas del entorno cristalino, por lo que emiten con anchos de línea muy chicos



Medios activos de estado sólido con ancho de línea angosto



Láseres con ancho de línea angosto: láser de Neodimio

Componente activa Nd^{3+}

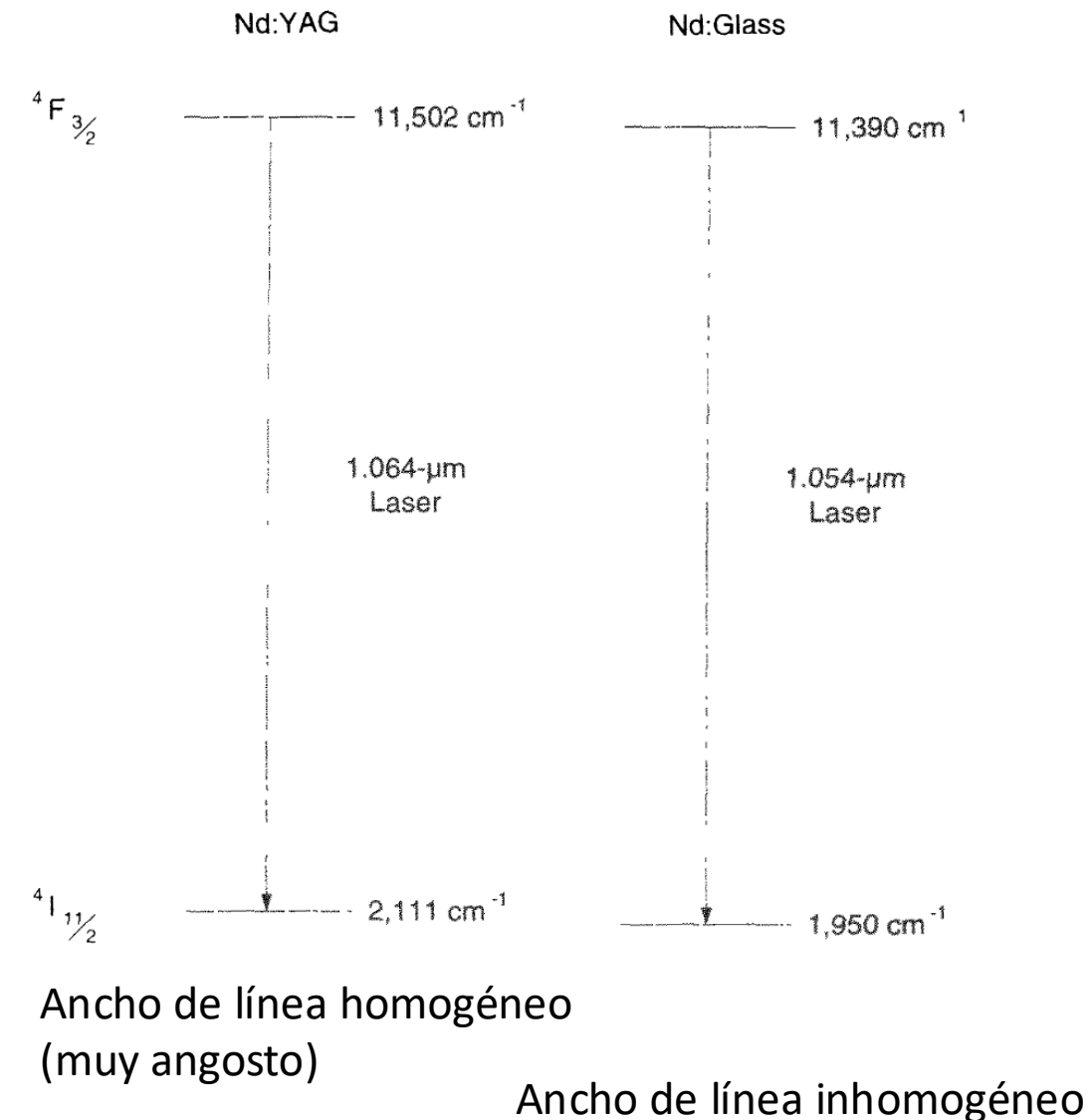
Host

YAG:

- máximo dopaje 1-1.5 %
- A concentraciones mayores aumentan las interacciones entre dopantes, lo que favorece decaimientos no radiativos y reduce el tiempo de vida del nivel superior
- se crecen en volúmenes pequeños (diámetro 1 cm , largo 10 cm)
- Buena conductividad térmica

VIDRIO

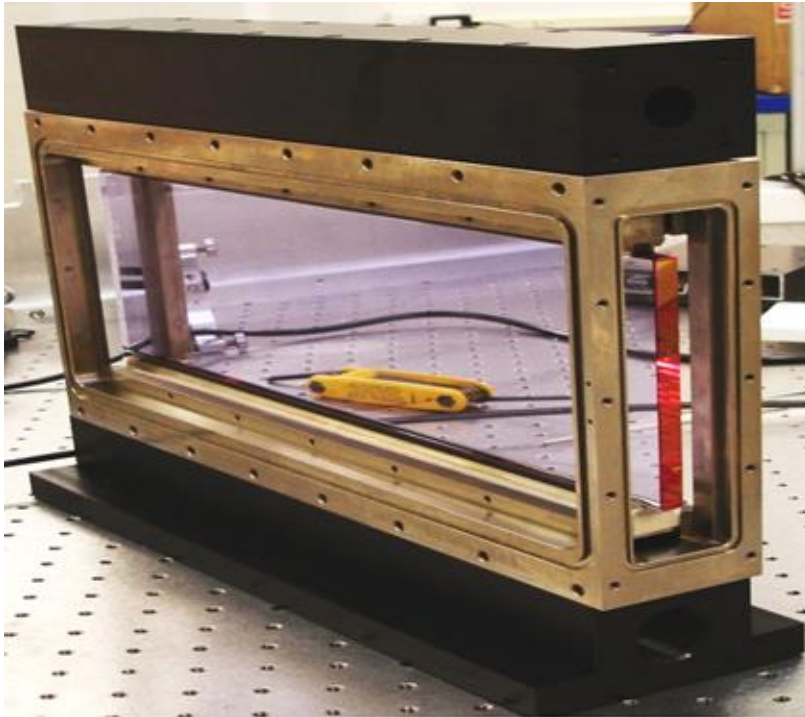
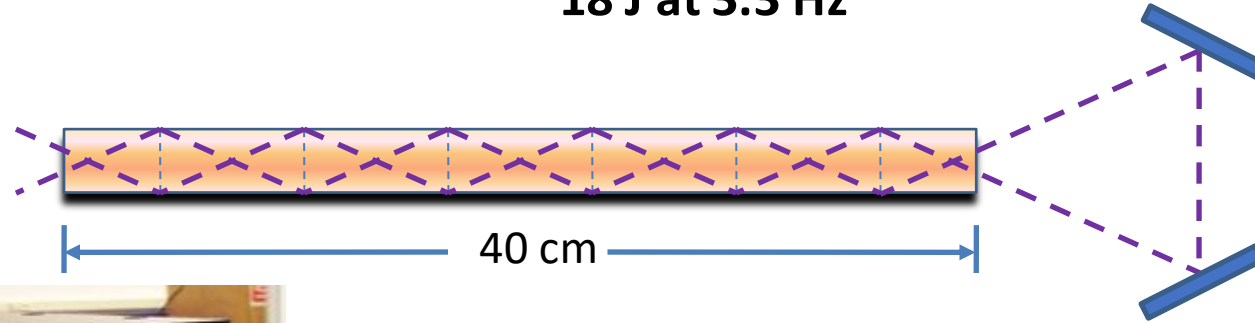
- Se puede dopar en concentraciones más altas
- $\tau_u \sim 300 \mu s$, $\Delta \nu = (4.8 - 7.5) \times 10^{12} Hz$ (18 – 28 nm)
- Menor conductividad térmica que Nd:Yag: opera a menor potencia en CW y a menor repetición en pulsado
- Mejor calidad óptica en volúmenes grandes: slab amplifiers en láseres de alta potencia



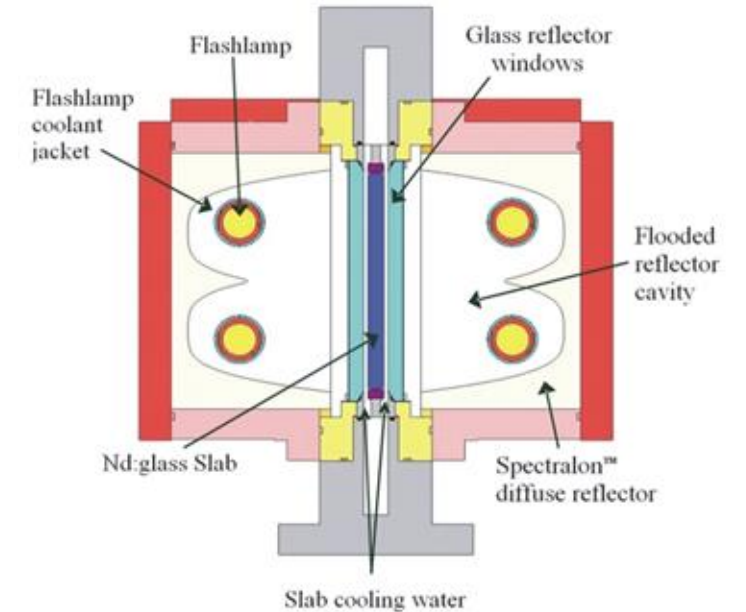
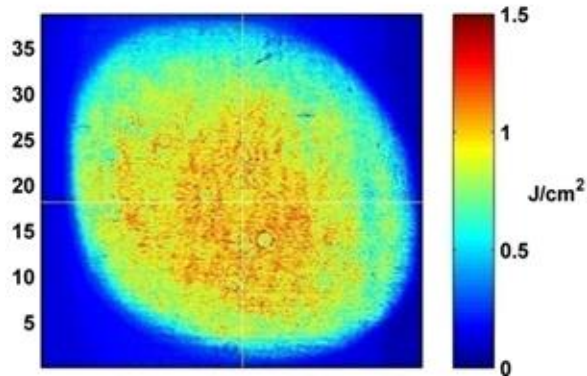
Slab amplifier in configuration double passage



18 J at 3.3 Hz



Good beam uniformity



Medios activos de estado sólido con ancho de línea angosto



Supongamos que tenemos 1 cm^3 de medio activo, Nd:YAG

Nd^{3+} dopados al 1% concentración atómica, Densidad de átomos de $\text{Nd} = 1.38 \times 10^{26} / \text{m}^3$

¿Cual es la energía máxima posible de radiar (en condiciones ideales)?

$$1 \text{ fotón} \rightarrow E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1240 \frac{\text{eV}}{\lambda(\text{nm})} = 1.165 \text{ eV}$$

$$E = (1.165 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 1.87 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Si todos los átomos en el volumen emiten un fotón

$$E_T = (1.87 \times 10^{-19} \text{ J})(1.38 \times 10^{26} / \text{m}^3) = 2.58 \times 10^7 \text{ J/m}^3$$

Potencia total radiada (en condiciones ideales).

$$\tau_u = 230 \mu\text{s} \text{ tiempo de vida}$$

$$A_{ul} = \frac{1}{230 \mu\text{s}} = 4.35 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \text{ tasa de transición}$$

$$P_R = \frac{E_T}{\tau_u} = (2.58 \times 10^7 \text{ J/m}^3)(4.35 \times 10^3 \text{ s}^{-1}) = 1.12 \times 10^{11} \text{ W/m}^3$$

$$V_{\text{activo}} = 1 \text{ cm}^3 \rightarrow P_R = 1.12 \times 10^5 \text{ W} \quad [W = J/s]$$

Enfoco con lente en un spot de 1mm de diámetro

$$A = \pi(0.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

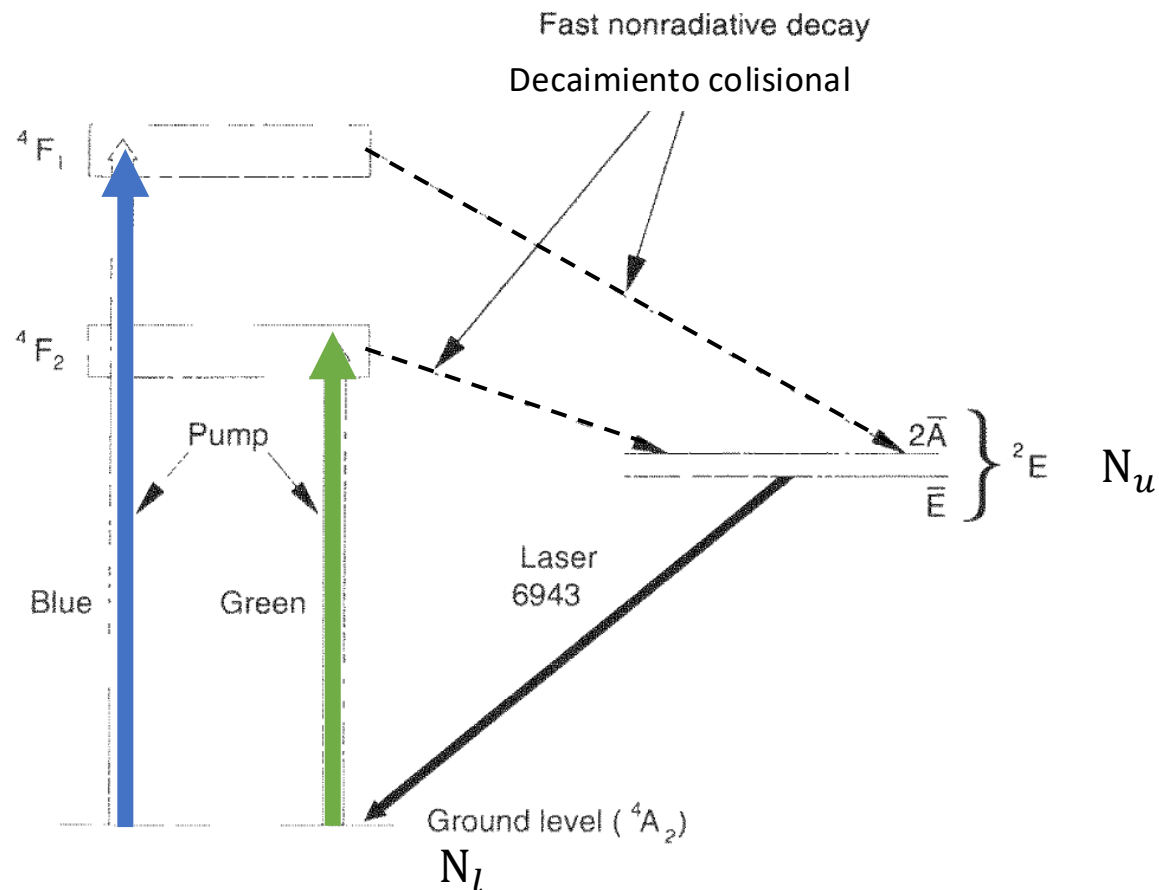
$$I = \frac{P_R}{A} = \frac{1.12 \times 10^5 \text{ W}}{7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 1.43 \times 10^{11} \text{ W/m}^2$$

El volúmen importa: Extraigo más potencia a mayor volumen

Láseres con ancho de línea angosto: el láser de Rubí

iones de Cr^{3+} en zafiro: $Cr:Al_2O_3$

Concentración 1%



Bombeo espectro ancho

Niveles 4F_1 y 4F_2 anchos y en visible $\rightarrow$ bombeo con lámpara flash de espectro ancho

Emisión láser

$^2E \rightarrow ^4A_2$ muy angosta



Ventajas de los medios activos de gran ancho de banda

- Láseres sintonizables
- Láseres de pulsos ultracortos (mode-locking)

Características generales

- Ancho de banda: 100-400nm
- Longitudes de onda en el IR
- Ensanchamiento homogéneo (interacción de electrones con vibraciones o fonones del cristal)

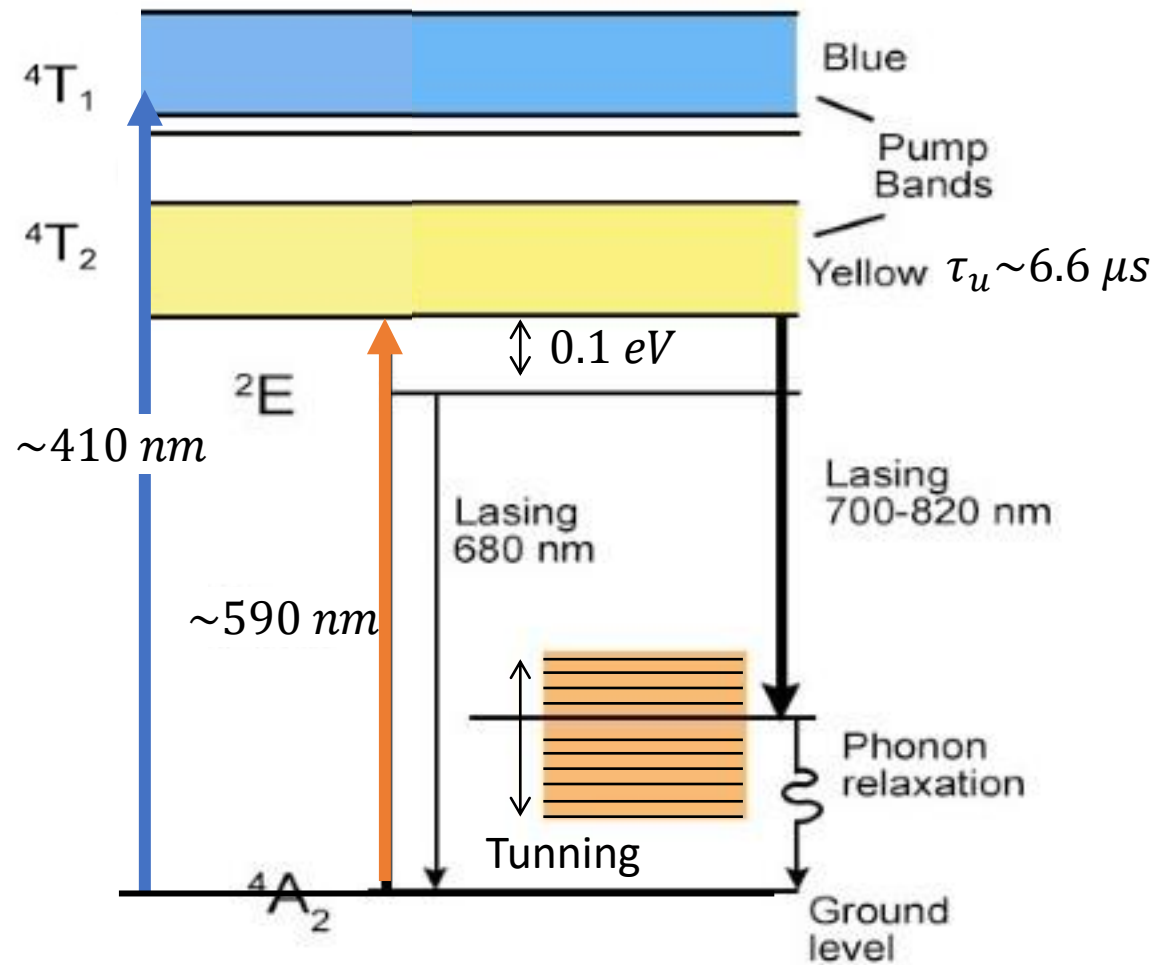
Transiciones vibrónicas: acoplamiento de estados electrónicos y vibracionales

Medios activos de estado sólido con ancho de línea grande

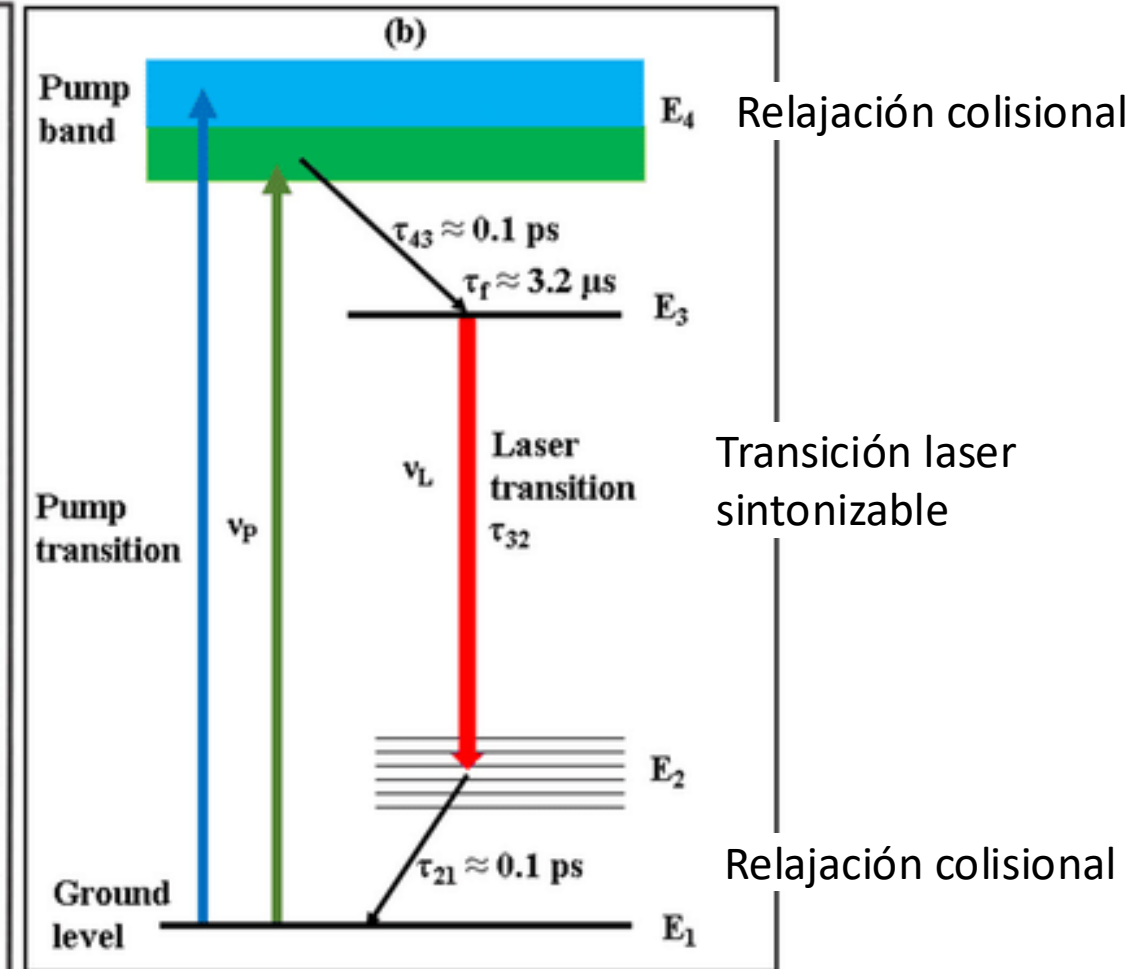
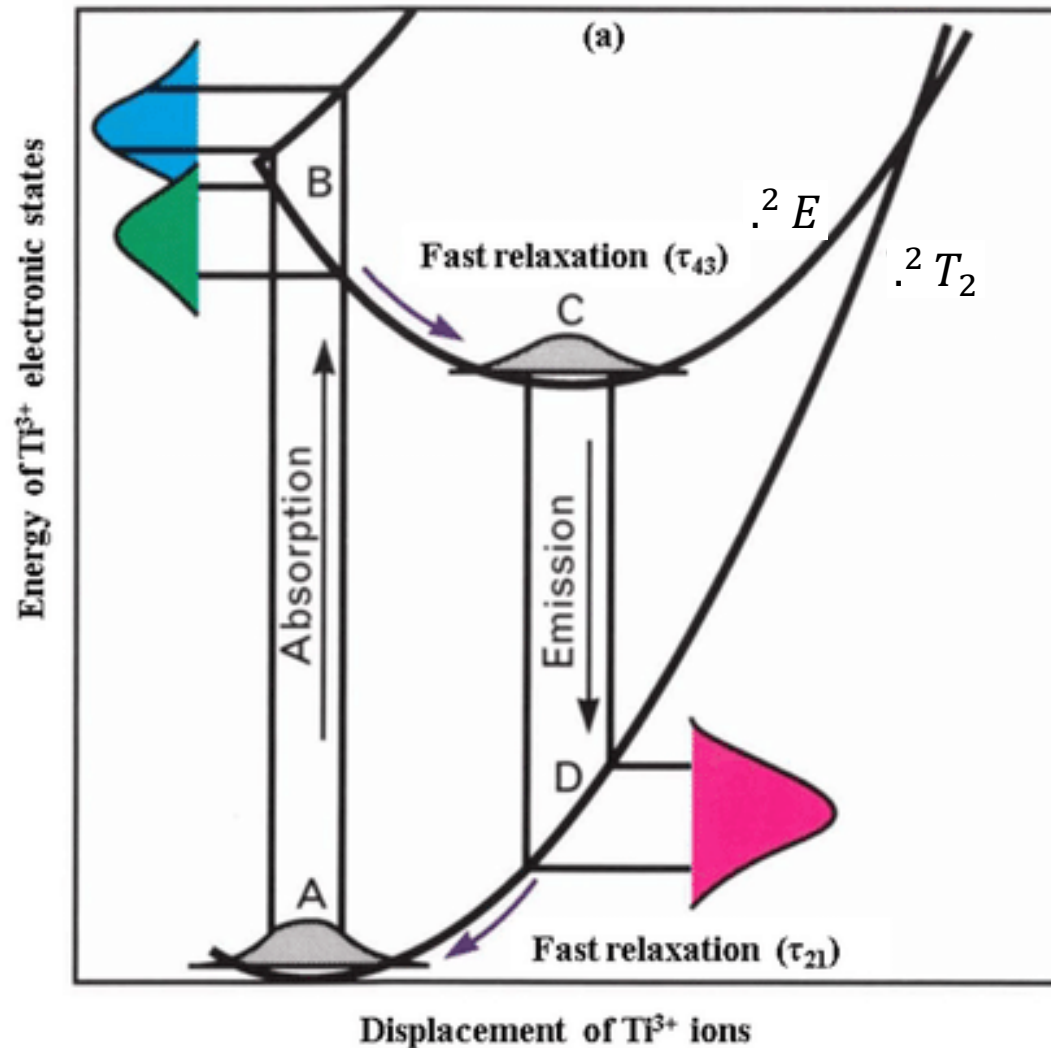


	Bombeo	emisión	τ_u
Alejadrita (Cr: $BeAl_2O_4$) Cr^{3+} dopado al 0.4%	Absorción: 380 nm a 630 nm (máximos en 410 nm y 590 nm) - Lampara flash o laseres	$\Delta\lambda = 120\text{nm}$ 780 nm-818 nm	$120\ \mu s$
Titanio Zafiro (Ti: Al_2O_3)	Absorción: 400 nm-600 nm - laser Ar ion - Nd:YAG doblado en frecuencia - Diodos láser en el azul/verde	$\Delta\lambda = 400\text{ nm}$ 660 nm -1180 nm Máximo ~800nm	$3.2\ \mu s$ (bombeo con lámpara flash no es efectivo)
Cr: $LiSrAlF_6$ (LISAF) Se puede crecer en grandes volúmenes	Absorción: 300-720 nm - Láseres de semiconductores	$\Delta\lambda = 250\text{ nm}$ 800 nm-1050 nm	$67\ \mu s$
Cr: $LiCaF_6$ (LICAF)	Absorción: 630–680 nm -láseres de semiconductores	$\Delta\lambda = 200\text{ nm}$ 700nm-900nm	$190\ \mu s$

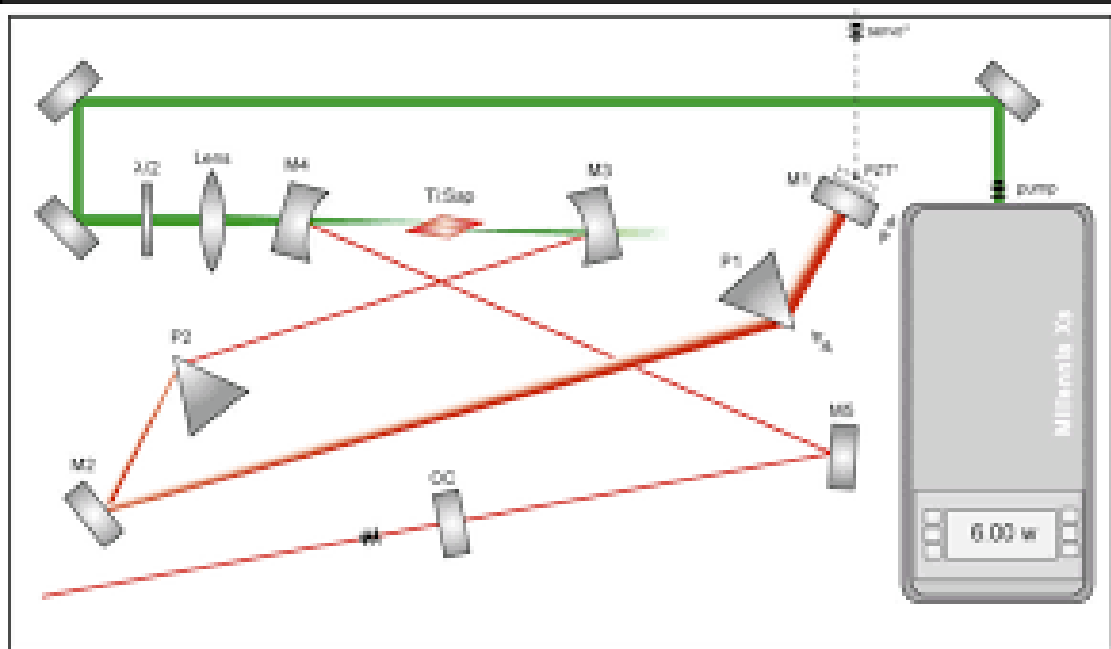
Alejandrita



Medios activos de estado sólido con ancho de línea grande



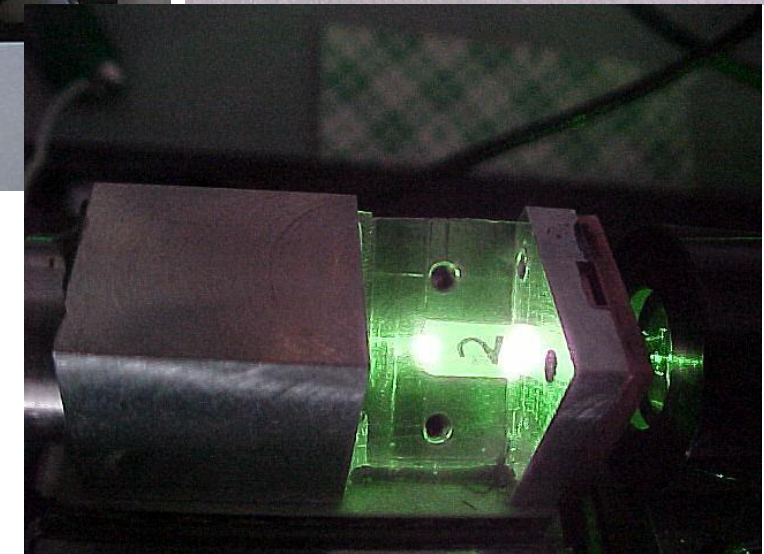
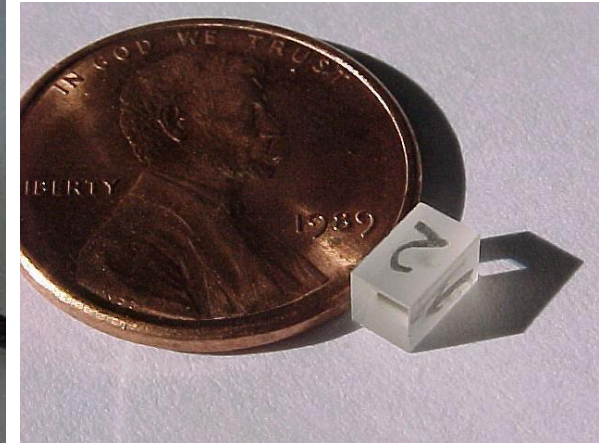
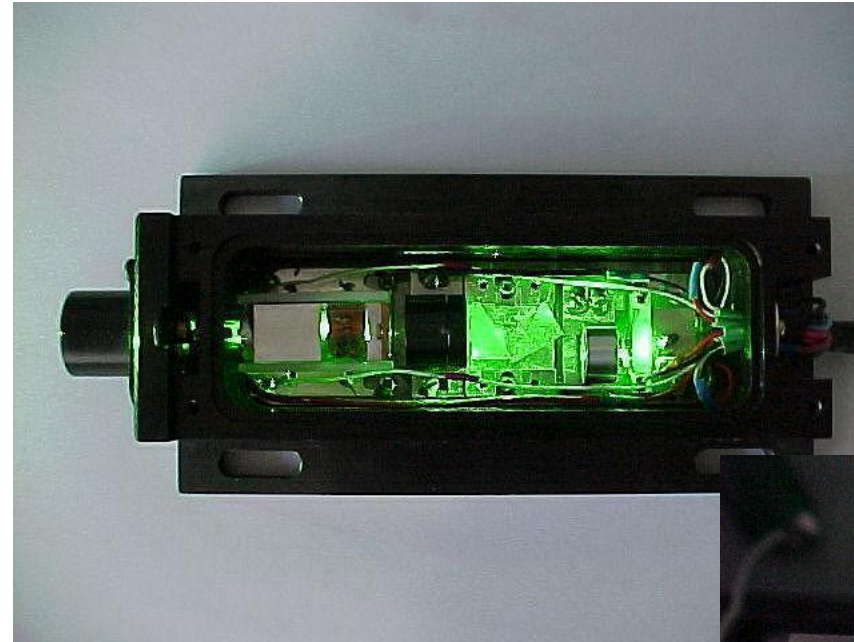
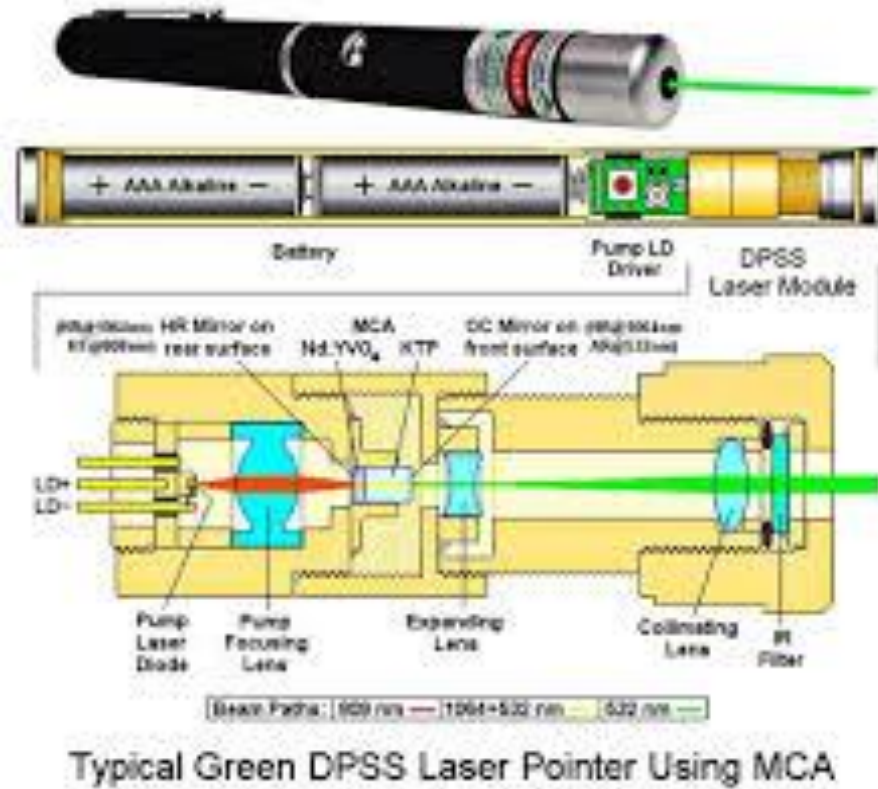
Laser de Titanio Zafiro (o en general los de estado sólido)



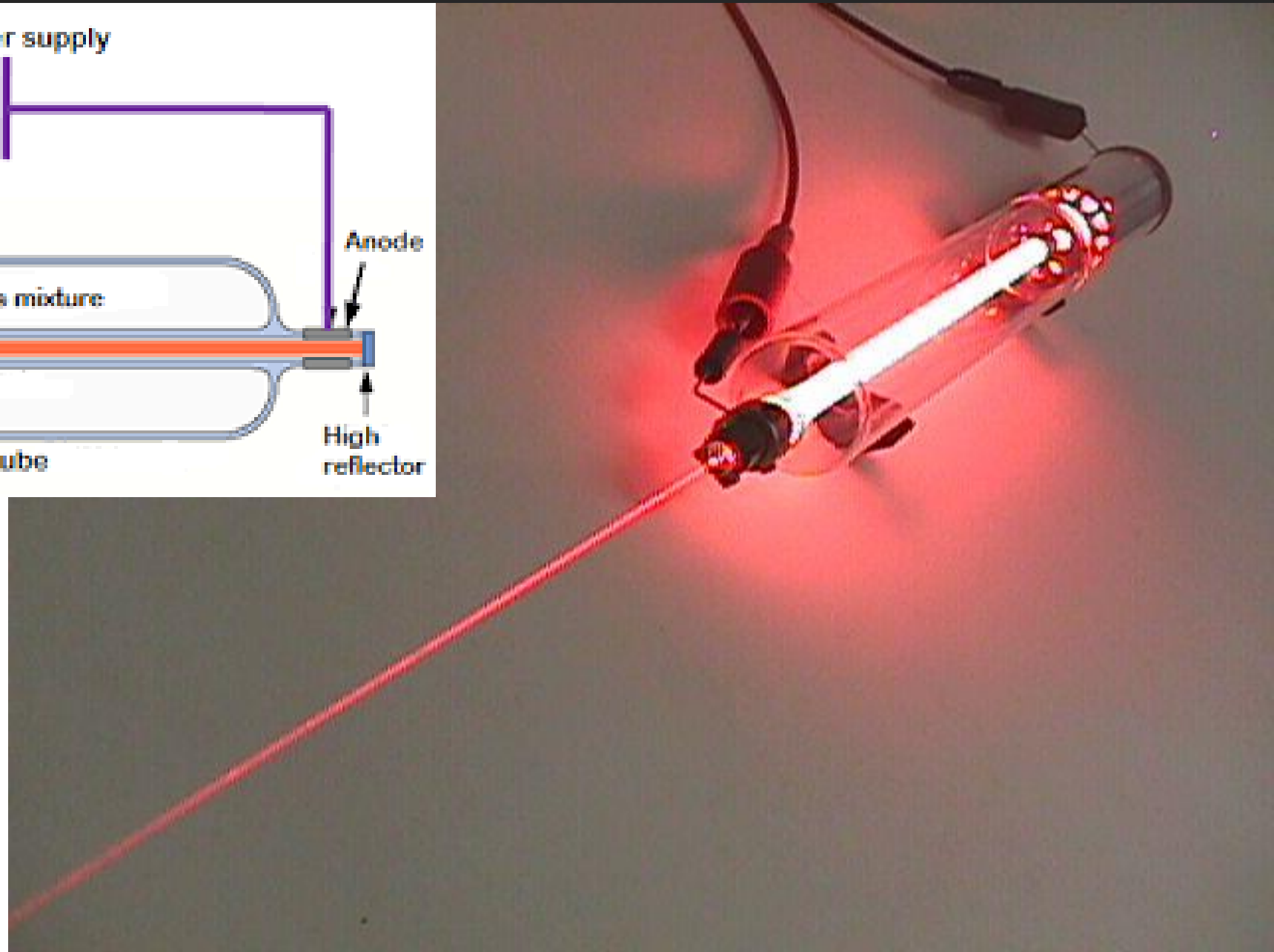
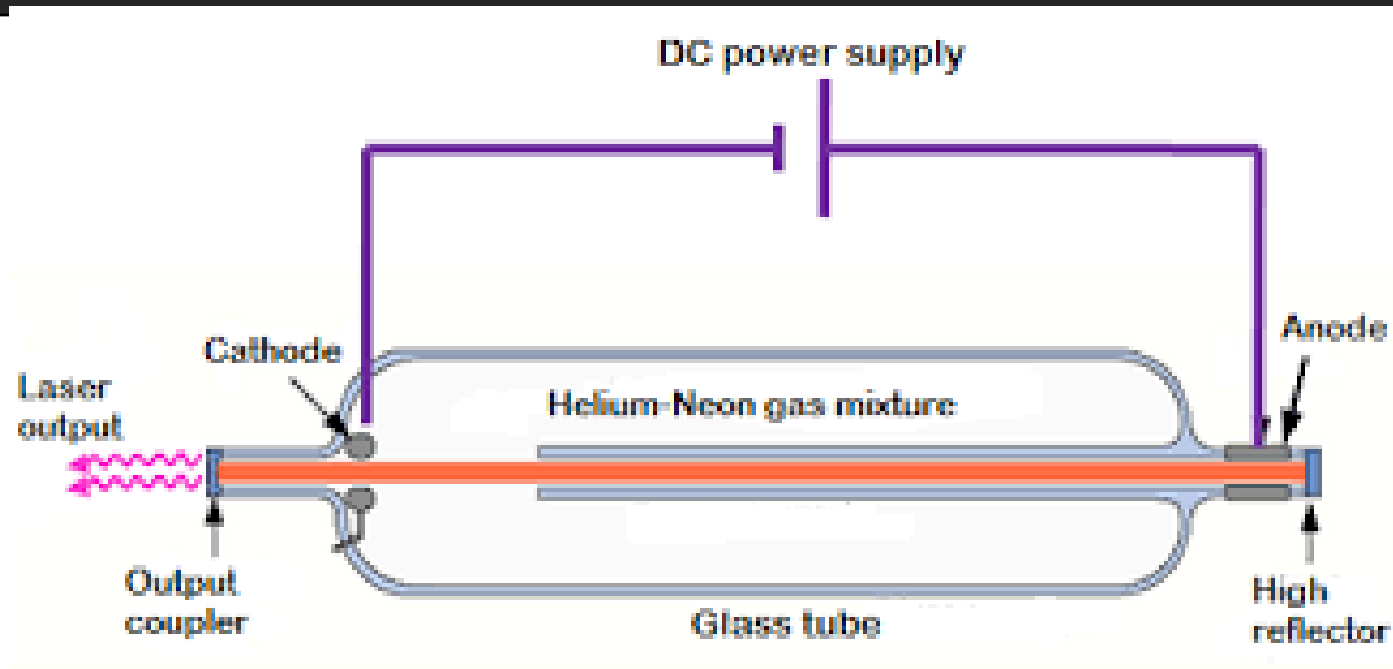
Diode pumped Solid State Laser (DPSSL)



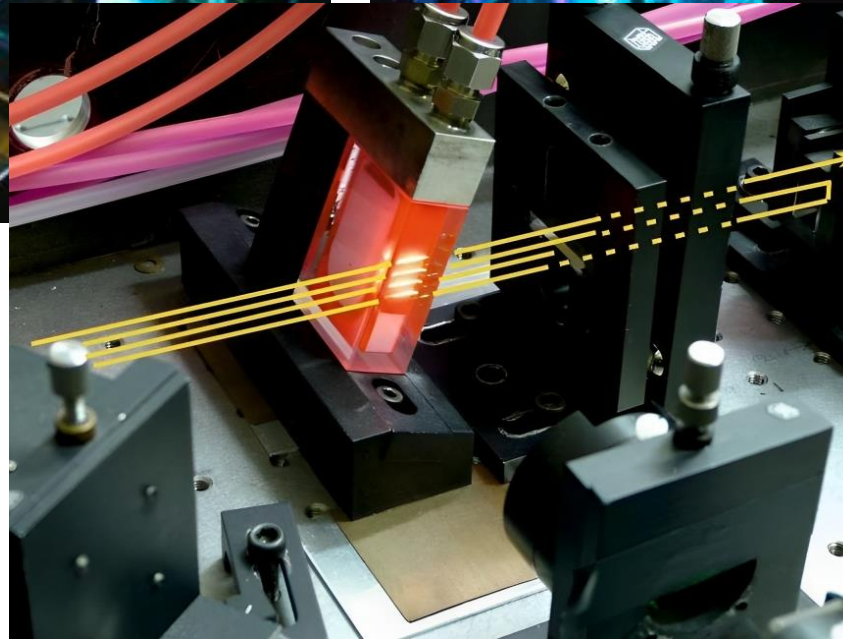
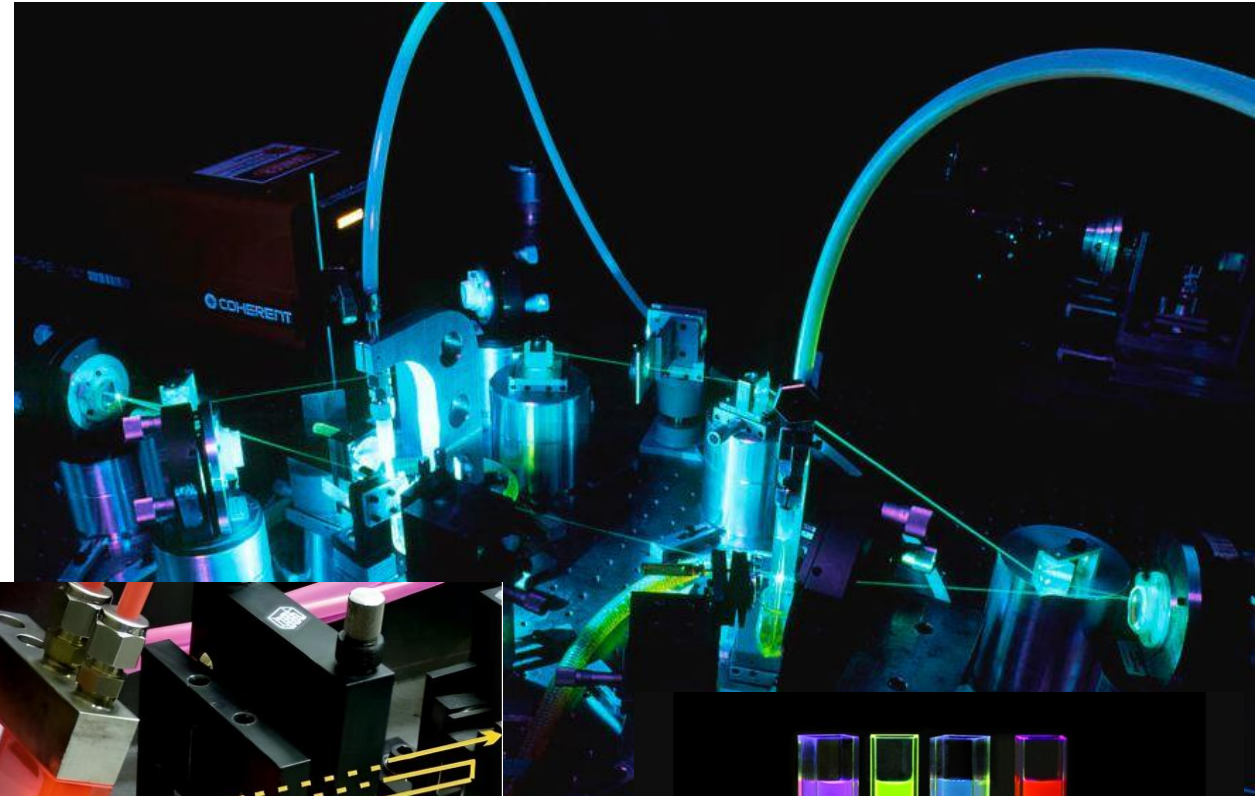
CONSTRUCTION OF A LASER POINTER



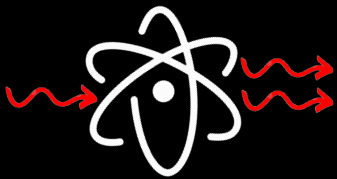
Laser de He-Ne (o en general los de gases)



Laser de colorantes



Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto



universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

Medios activos semiconductores: otro mundo distinto

Qué vimos

- La atracción entre electrones y núcleo da lugar a estados ligados y niveles de energía discretos.
- En moléculas, colorantes orgánicos en solución e iones en medios dieléctricos, los niveles también son discretos.
- En moléculas aparecen niveles **electrónicos, vibracionales y rotacionales**.
- En láseres moleculares, las transiciones ópticas están asociadas con moléculas aisladas.
- En colorantes e iones dopantes, la especie activa está distribuida uniformemente en bajas concentraciones (**0,01–10 %**).

Qué se viene

- En los semiconductores, la especie activa no es un dopante aislado.
- La especie activa es el **propio material cristalino**.
- Por eso, los semiconductores constituyen un medio activo muy diferente de los vistos hasta ahora.

Láseres de semiconductores



El medio activo es un semiconductor y el bombeo suele ser eléctrico.

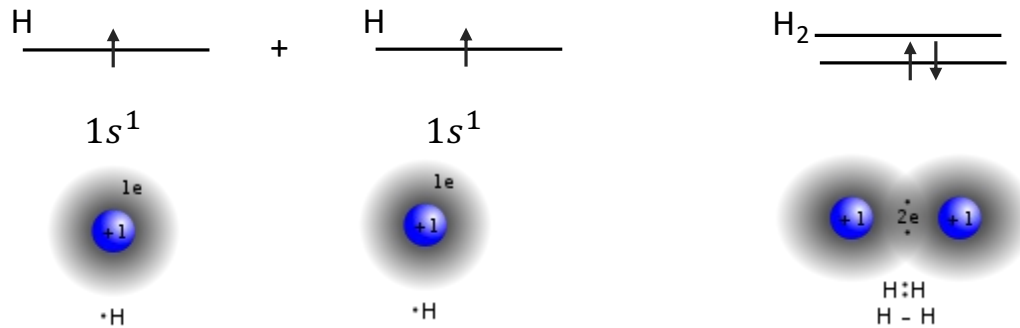
Características generales:

- Son compactos, eficientes, baratos y muy importantes tecnológicamente.
- Se usan en telecomunicaciones, lectores ópticos, punteros, impresión, sensores y bombeo de otros láseres.
- A diferencia de muchos láseres de gas o de estado sólido, acá la excitación eléctrica está integrada en el propio dispositivo.

Niveles de energía en sólidos

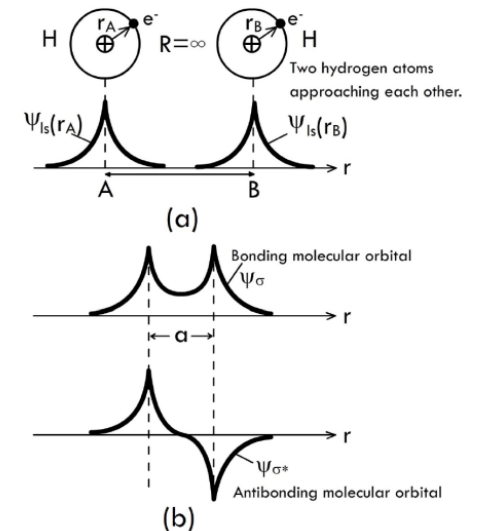
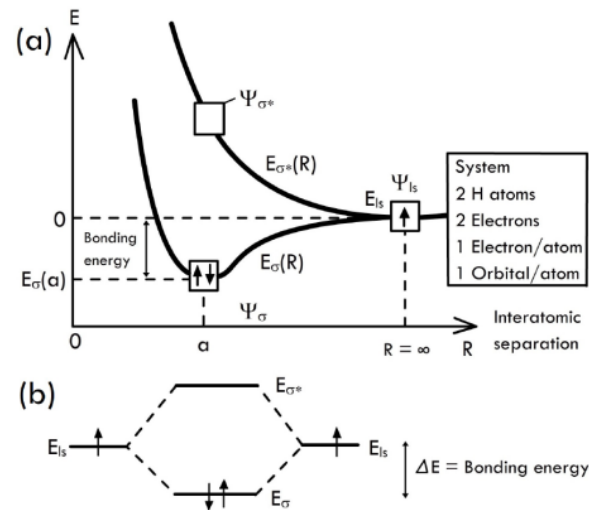


Dos átomos de H se combinan para formar H₂

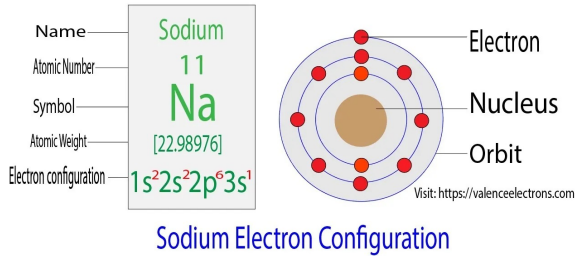


La función de onda se solapa, los electrones ya no están asociados a un átomo específico

Átomos aislados, niveles de energía muy angostos

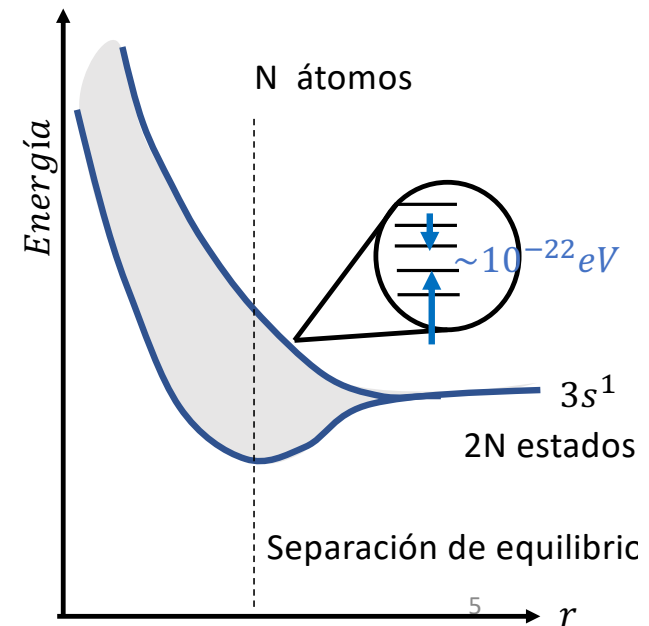
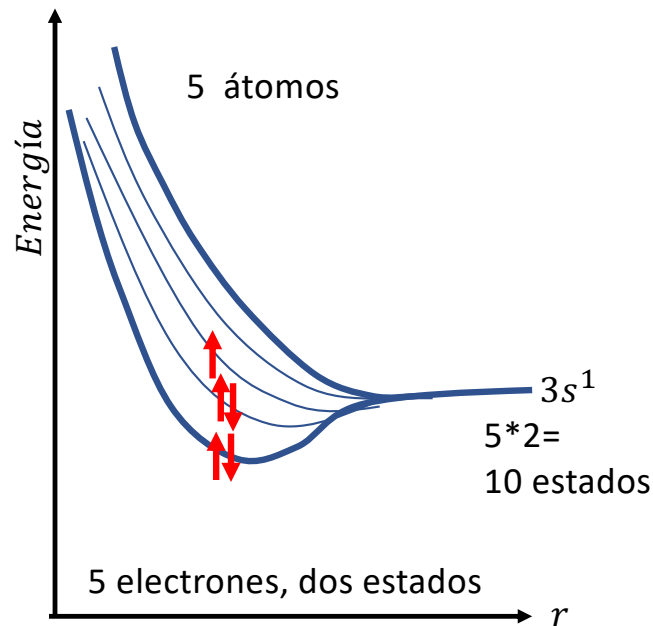
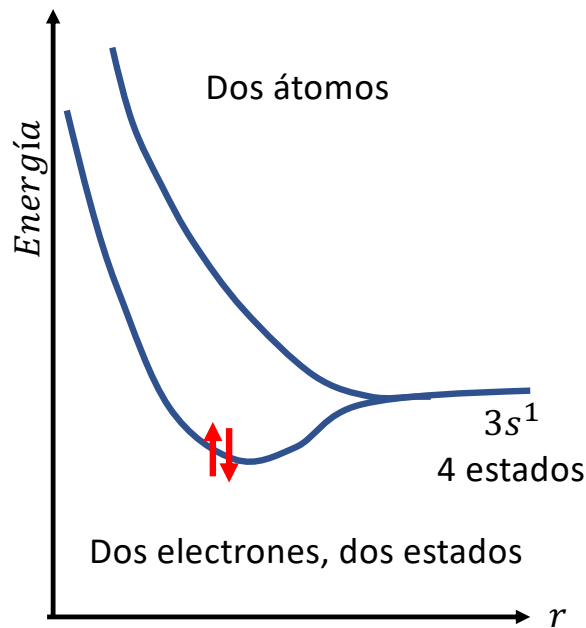


Niveles de energía en sólidos



El electrón en el último orbital
 $3s^1 \rightarrow 2$ estados posibles por degeneración *de spin* (spin up o down)

Los electrones se ubican en los niveles de energía más bajo (minimizan la energía total) respetando del principio de exclusión de Pauli



Niveles de energía en sólidos



Lo mismo ocurre con todos los orbitales, los primeros en solapar son los más externos.

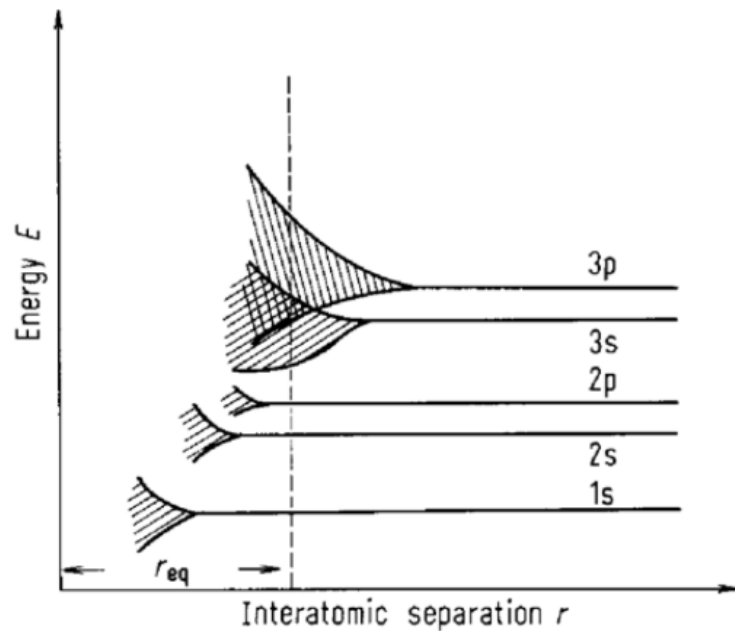
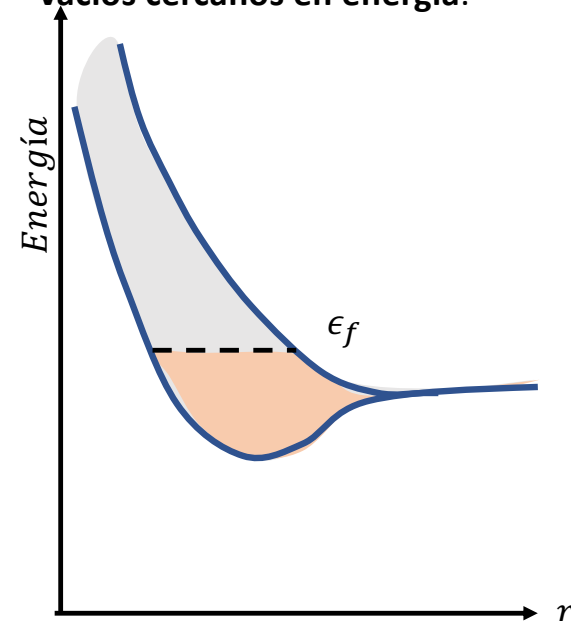


Figure 1.7(b)
ELECTRONIC ENERGY STATES FOR Mg

Nivel parcialmente lleno

- A 0 K, la **energía de Fermi** es la energía del nivel máximo ocupado.
- Para que haya conducción, deben existir **estados vacíos cercanos en energía**.

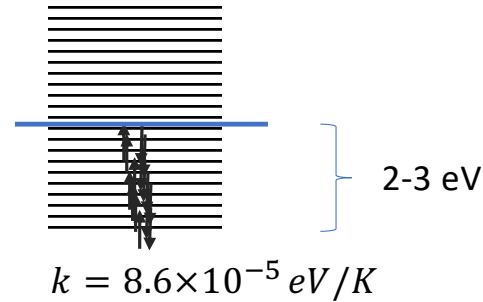
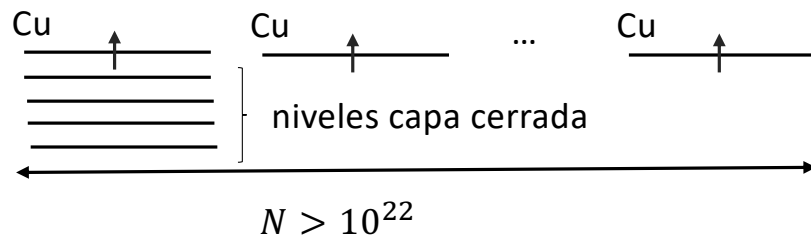


Niveles de energía en sólidos



Átomos de Cu (metal)

[Ar] 3d¹⁰ 4s¹



$T = 0 \text{ K}$
Energía del nivel máximo ocupado
 ϵ_f : Energía de Fermi

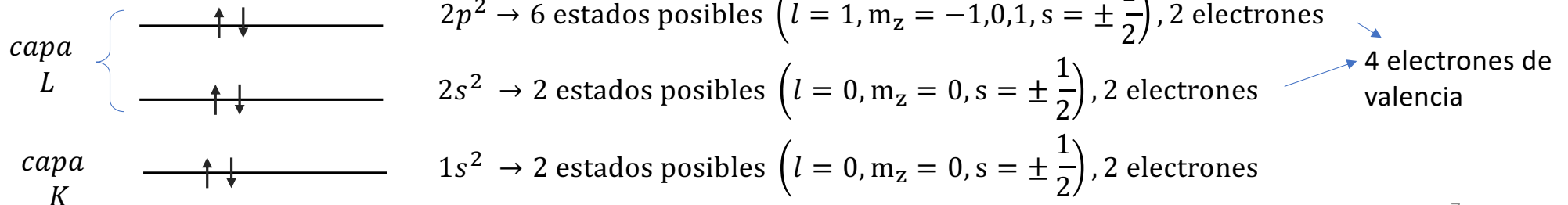
$T = 300 \text{ K}$

$kT \sim 26 \text{ meV} \ll 2 \text{ eV}$

Solo los electrones con $\epsilon \sim \epsilon_f$ pueden ser excitados térmicamente

Átomos de C en diamante (aislante)

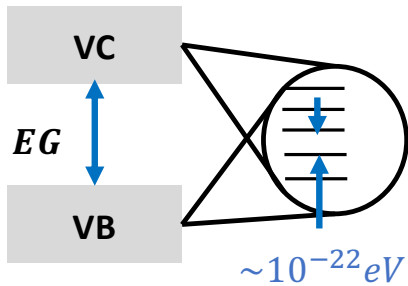
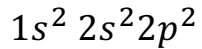
$1s^2 2s^2 2p^2$



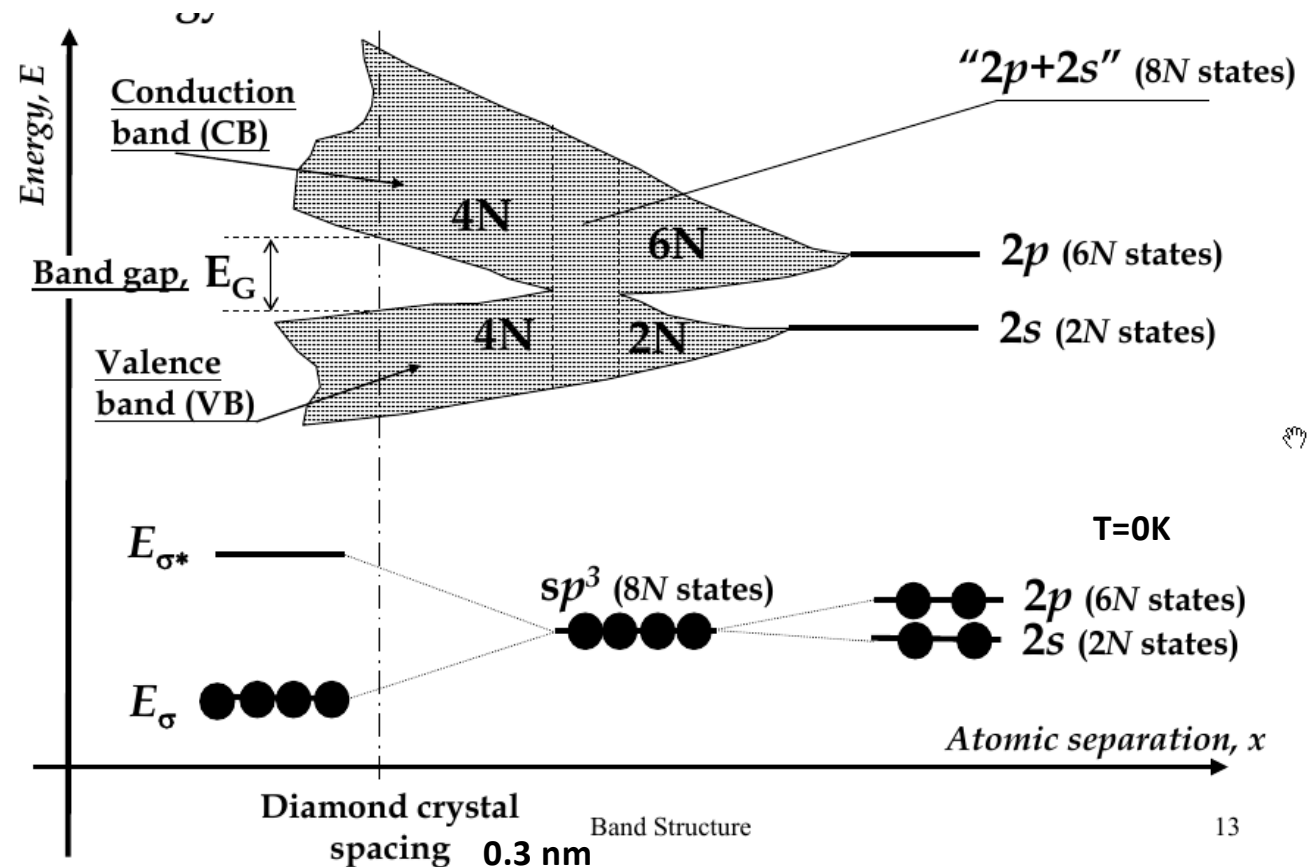
Niveles de energía en semiconductores y aislantes



Átomos de C en diamante

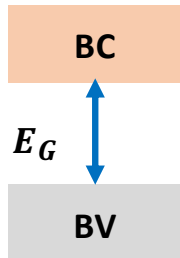


En diamante: $2s$ y $2p$ se hibridan en sp^3 y se separan en estados ligantes (VB) y antiligantes (CB).



<https://csclub.uwaterloo.ca/~matedesc/ece209-notes.html>

Niveles de energía en semiconductores



Para el diamante

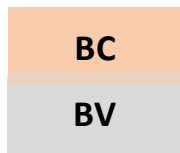
$$E_G \sim 5.6 \text{ eV} \quad \lambda_g = 221 \text{ nm}$$

$$\beta = kT \sim 26 \text{ meV} \ll 6 \text{ eV}$$

A temperatura ambiente todos los electrones en la banda de valencia

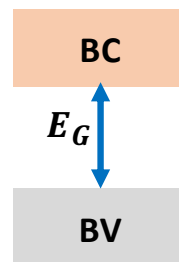
El diamante es aislante, no conduce electrones para los campos ordinarios

Conductor



Bandas superpuestas o
BC parcialmente llena

Aislante

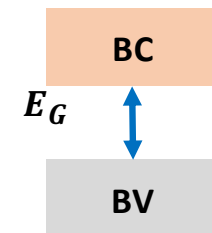


BC Vacía
BV Llena

$$E_G > 3.5 \text{ eV}$$

Se necesita mucha energía
para excitar a los e a la BC

Semiconductor

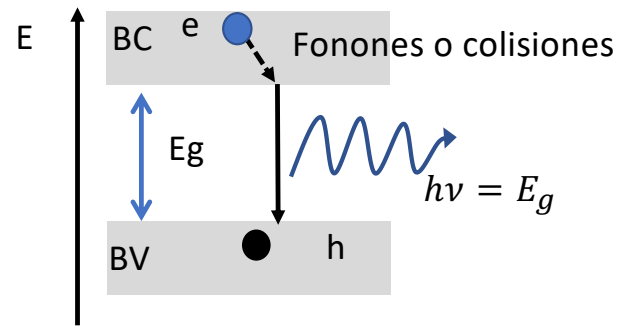
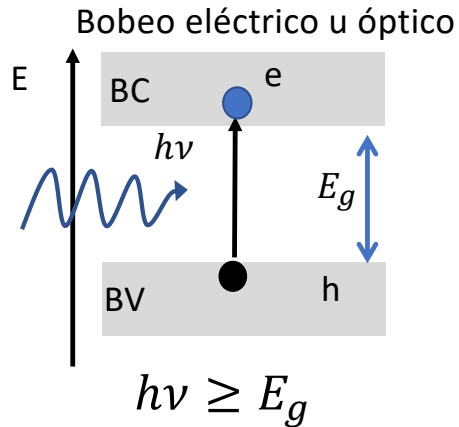


BC Vacía
BV Llena

$$E_G < 3.5 \text{ eV}$$

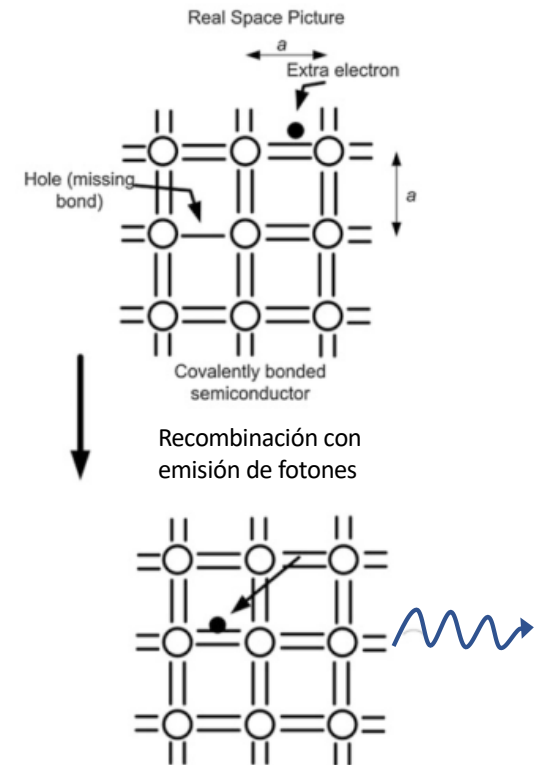
El gap de tamaño moderado permite llevar
electrones a la BC para volverlo parcialmente
conductor (la base de la optoelectrónica)

Transiciones electrónicas en semiconductores



e-h Se recombinan por atracción electrostática

- emite fotón (recombinación radiativa)
- cede la energía a la red por colisiones, excitando fonones o vibraciones en la red



Los **electrones** se mueven cuasilibremente (onda plana) en la **banda de conducción** al aplicar campo eléctrico

Los **huecos** se mueven cuasilibremente (onda plana) en la **banda de valencia** al aplicar campo eléctrico

Niveles de energía en semiconductores



Los niveles de energía se obtienen a partir de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi + (E - V)\psi = 0$$

Electrones en átomos

$$V \sim -\frac{1}{r}$$

- atracción coulombiana
- Energías negativas, estados ligados

Electrones libres

$$V = 0$$

$$\psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ onda plana}$$

Reemplazo en ec. de Schrödinger

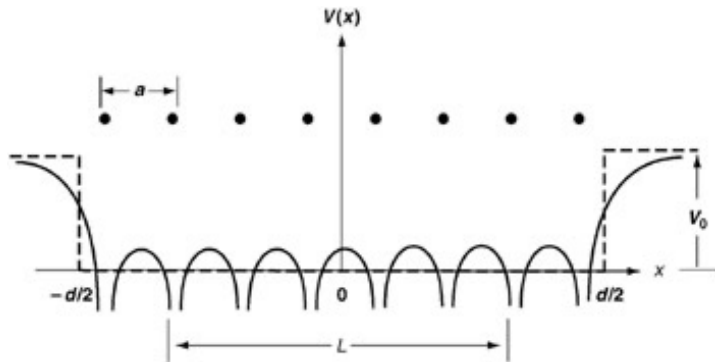
$$E = E_k + E_p = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} + V$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \rightarrow p = \hbar k$$

Niveles de energía en semiconductores



Los cristales son estructuras periódicas, entonces el potencial es periódico



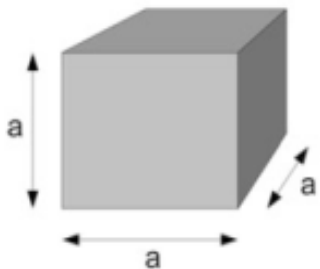
$$V(x) = V(x + na)$$

$$\psi = u_k(x + na)e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

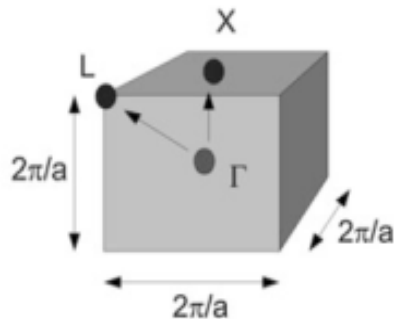
u_k : función periódica asociada al número cuántico k

En un cristal, los electrones pueden propagarse en distintas direcciones cristalográficas

Red cúbica GaAs



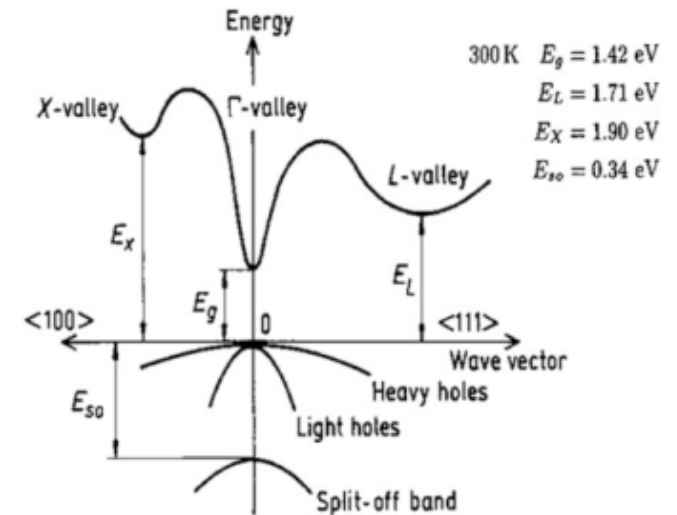
Espacio recíproco ($\vec{k}$)



Direcciones más importantes

$\Gamma \rightarrow X$ (100)

$\Gamma \rightarrow L$ (111)

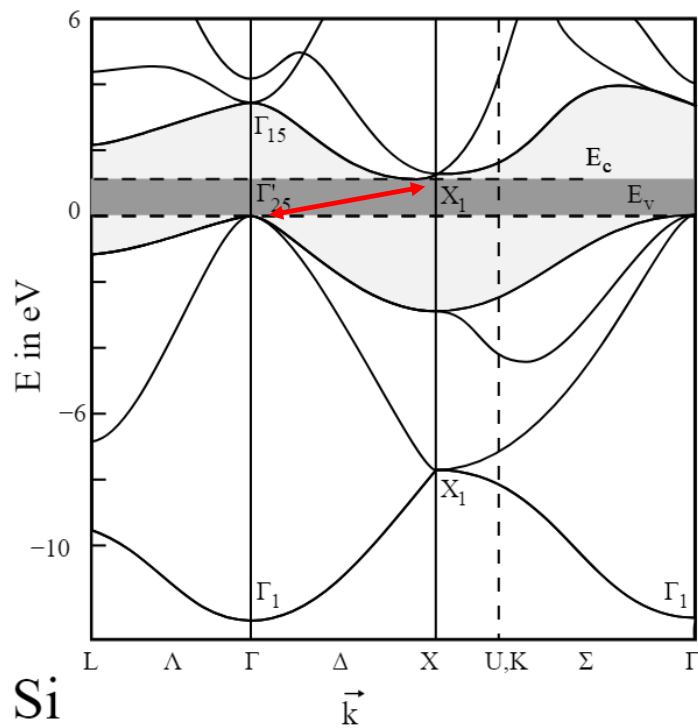


Ejemplos de bandas de energía prohibida



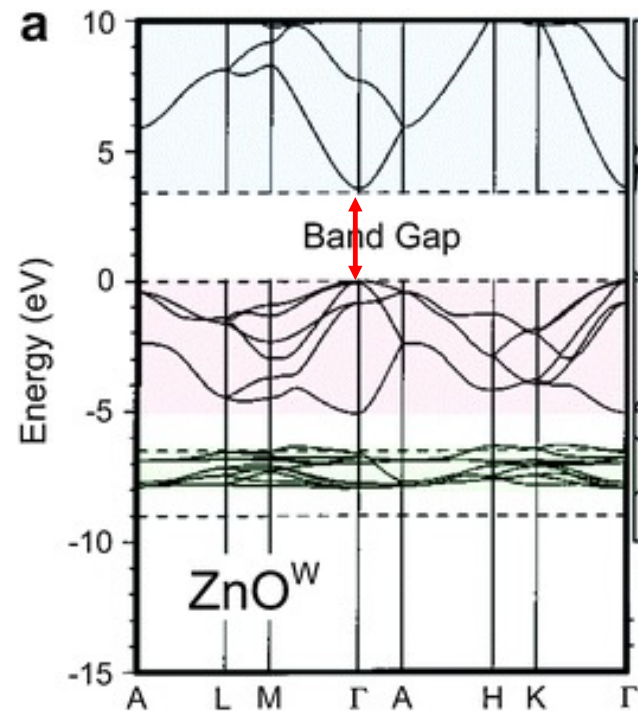
Si:

- aislante
- banda indirecta



ZnO:

- semiconductor
- banda directa

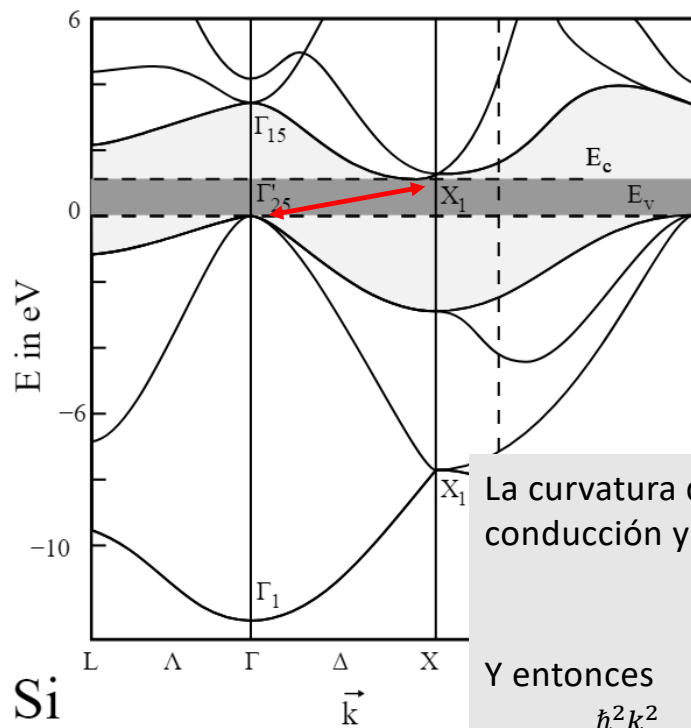


Ejemplos de bandas de energía en sólidos



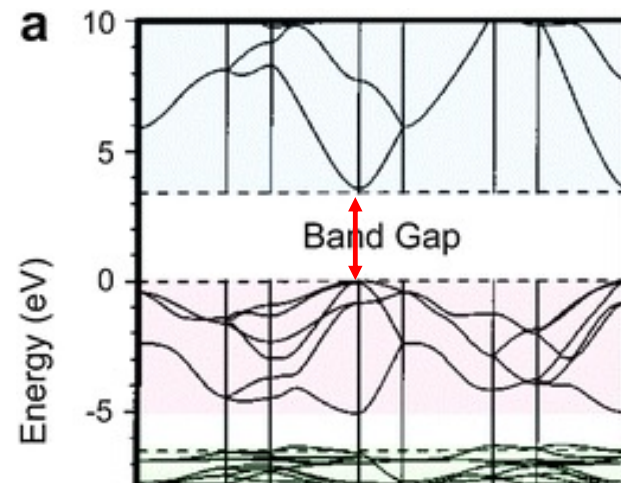
Si:

- semiconductor
- banda indirecta



ZnO:

- semiconductor
- banda directa



La curvatura de la banda en la región del mínimo (máximo) no es igual para la banda de conducción y de valencia. La curvatura se puede calcular como

$$\frac{d^2 E_{c/v}}{dk^2}$$

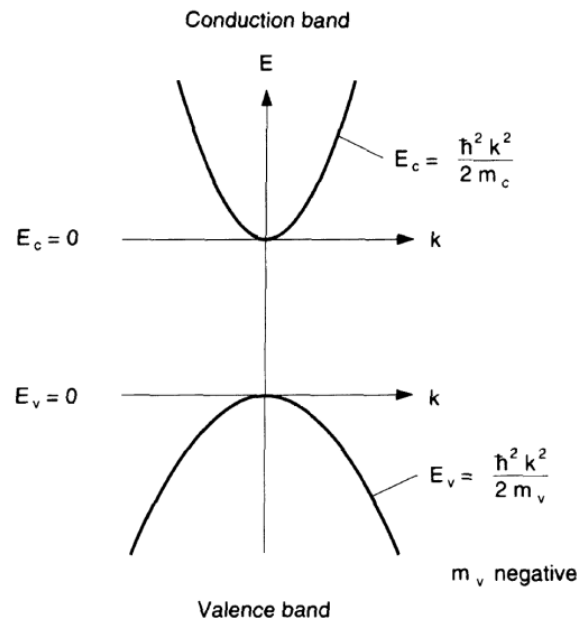
Y entonces

$$E_{c/v} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{c/v}^*} \quad \text{con} \quad \frac{1}{m_{c/v}^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E_{c/v}}{dk^2}$$

Niveles de energía en semiconductores



Para un semiconductor banda directa



m_c y m_v masas efectivas del electrón y hueco $m_{eff} = \frac{\hbar^2}{\left(\frac{d^2 E}{dk^2}\right)}$

GaAs $m_c = 0.067 m_e$ y $m_v = 0.48 m_e$

$E > E_c$ los electrones se pueden mover libres en el material

$E < E_v$ los electrones no se pueden mover fácilmente, la banda por lo general esta completa

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_{eff}}$$

discretizado en el cristal, L tamaño del cristal

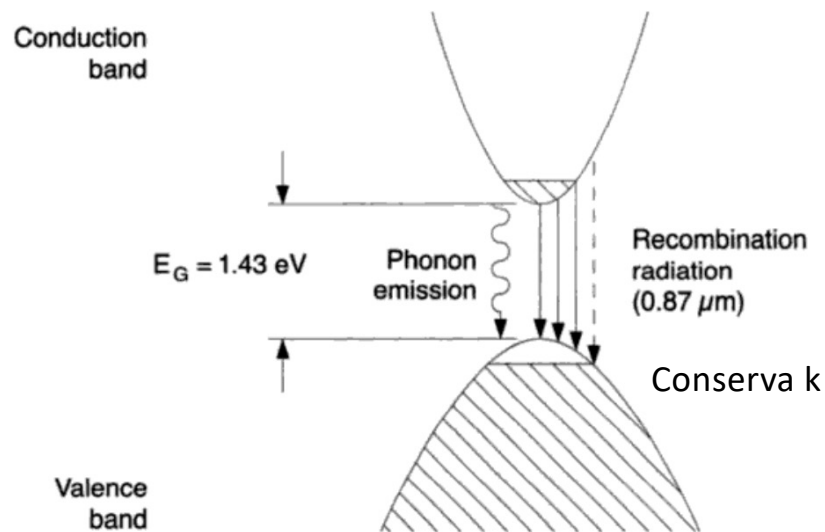
$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2 m_{eff}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Transiciones electrónicas en semiconductores



Ejemplo GaAs



$$\begin{aligned} h &= 6,626 \times 10^{-34} \text{ J/s} \\ &= 6,626 \times 10^{-34} \text{ Kg m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

- La recombinación radiativa es un proceso equivalente a la emisión espontánea en átomos
- Las colisiones no radiativas o relajación de fonones reducen la eficiencia cuántica y transforman energía en calor u ondas acústicas

$$\text{GaAs } m_c = 0.067 m_e \text{ y } m_v = 0.48 m_e$$

$$e^- + h \rightarrow h\nu$$

$$\hbar k_e^f + \hbar k_{foton}^f = \hbar k_e^i$$

$$T=300\text{K} \quad \frac{1}{2} m_c v_e^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\hbar k_e = m_c v_e = 1.59 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}$$

$$\hbar k_{foton} = \frac{h}{\lambda} = 7.6 \times 10^{-28} \text{ kg m/s} \ll \hbar k_e$$

$$\hbar k_{foton} \text{ despreciable} \rightarrow \text{transición vertical}$$

$$\hbar \Delta k_e \approx 0$$

Transiciones electrónicas en semiconductores



$$e^- + h \rightarrow h\nu$$

Conserva Energía

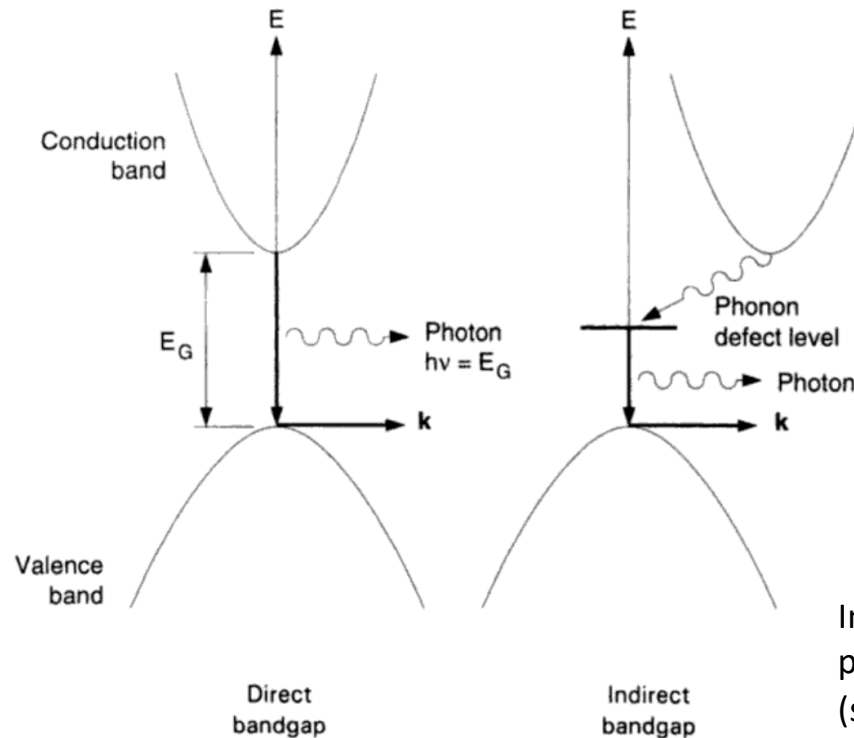
$$E_g = h\nu$$

Conserva momento

$$\hbar k_e^f + \hbar k_{foton}^f = \hbar k_e^i$$

$$\hbar \Delta k_e \approx 0$$

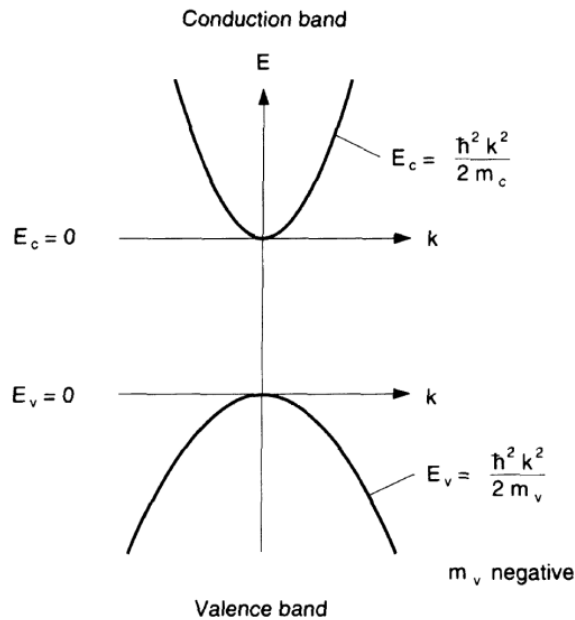
El electrón realiza una transición vertical



$$e^- + h + f_{onon} \rightarrow h\nu$$
$$\hbar k_e^f + \hbar k_{foton}^f + \hbar k_{fonon}^f = \hbar k_e^i$$

Ineficientes como fuentes, eficientes para aplicaciones en microelectrónica (switches, transistores, etc)

Población de bandas de energía en semiconductores



Cuál es la concentración de electrones N_e por unidad de volumen con energías entre E y $E + dE$

$$N_e dE = f(E) \rho(E) dE$$

Probabilidad de ocupación

Densidad de estados:

de estados con energías entre E y $E + dE$ por unidad de volumen

Número total de electrones por unidad de volumen en la banda de conducción

$$n_c = \int_{E_c}^{\infty} N_e dE = \int_{E_c}^{\infty} f(E) \rho(E) dE$$

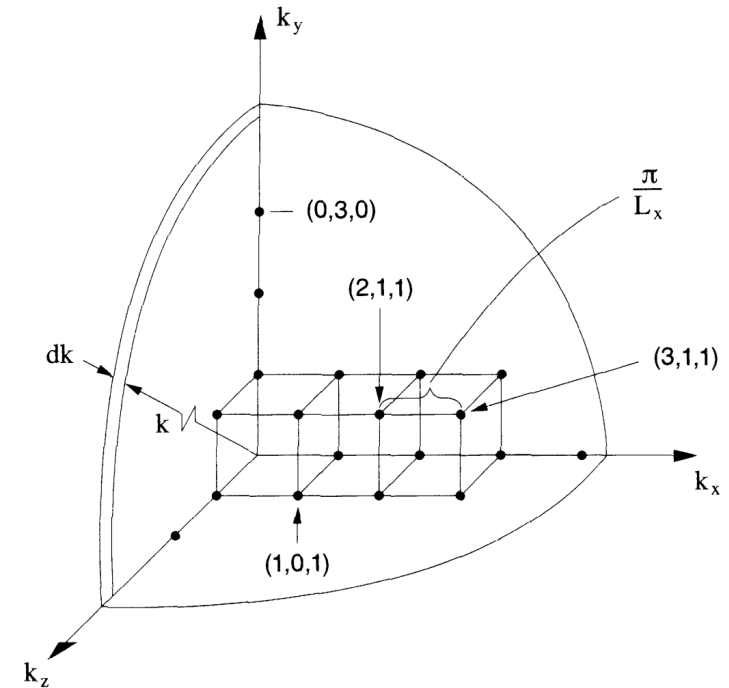
$$E = E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_c}$$

Población de bandas de energía en semiconductores



1. Los valores de k están discretizados;
2. Cada punto permitido en k -espacio representa un estado;
3. Densidad de estados: número de “puntos” entre k y $k + dk$

$$\rho(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$$



Población de bandas de energía en semiconductores



Densidad de estados

$$\psi = u_k(x + na)e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}$$

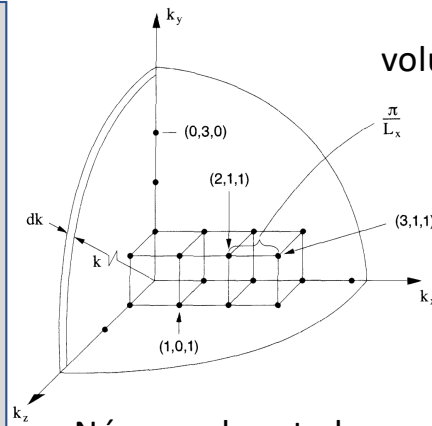
k discretizado en el cristal

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L_i}, \quad i = x, y, z$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_{eff}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$k = \sqrt{\frac{2m_{eff}E}{\hbar^2}}$$

Número de estados con una combinación única de n_x, n_y, n_z



$$\text{volumen del modo } n_x, n_y, n_z \rightarrow V_k = dk_x dk_y dk_z = \frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z}$$

$$\text{Densidad de modos } \frac{1}{V_k} = \frac{L_x L_y L_z}{\pi^3}$$

Número de estados posibles con k y $k + dk$

$$N(k)dk = \text{densidad de modos} \times \text{volumen de la cascara en } k - \text{espacio} \times g_{spin}$$

$$N(k)dk = \left(\frac{L_x L_y L_z}{\pi^3} \right) \left(\frac{4\pi k^2 dk}{8 (k \text{ positivo})} \right) (2 \text{ spin}) = L_x L_y L_z \frac{k^2 dk}{\pi^2}$$

Densidad de estados= número de estados por unidad de volumen

$$\rho(k)dk = \frac{N(k)dk}{L_x L_y L_z} = \frac{k^2 dk}{\pi^2}$$

Población de bandas de energía en semiconductores



Densidad de estados: número de estados por unidad de volumen

$$N_e dE = f(E) \rho(E) dE$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}$$

$$\rho(E) dE = \rho(k) dk = \frac{k^2}{\pi^2} dk = \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \frac{m_{eff}}{\hbar^2 k} dE = \frac{k}{\pi^2} \cdot \frac{m_{eff}}{\hbar^2} dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_{eff}}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE$$

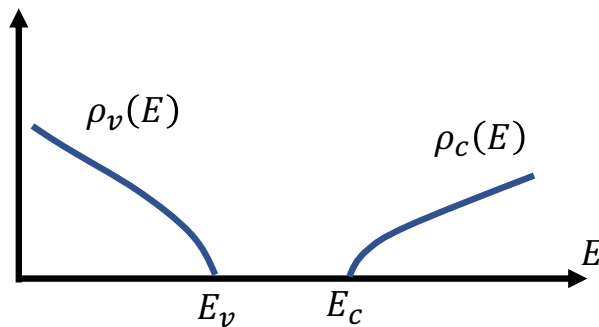
$\swarrow$ $k = \sqrt{\frac{2m_{eff}E}{\hbar^2}}$
 $\searrow$ $dE = \frac{\hbar^2 k}{m_{eff}} dk$

$$E > E_c$$

$$\rho_c(E) dE = \left(\frac{1}{2\pi^2} \right) \left(\frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} dE$$

$$E < E_v$$

$$\rho_v(E) dE = \left(\frac{1}{2\pi^2} \right) \left(\frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_v - E)^{1/2} dE$$

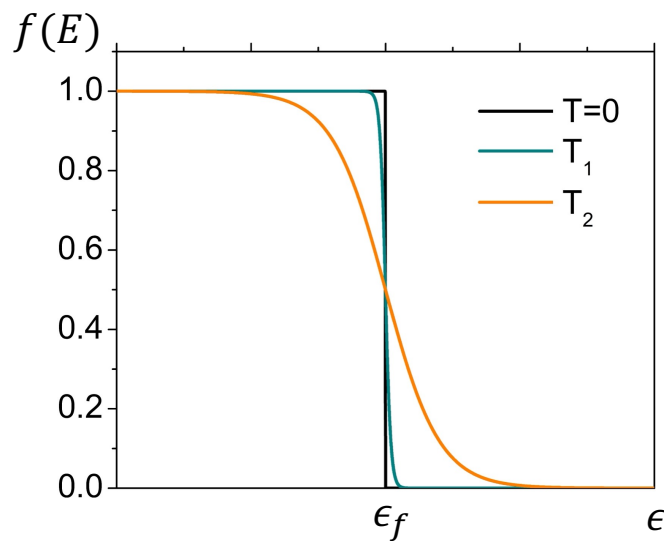


Población de bandas de energía en semiconductores



Probabilidad de ocupación

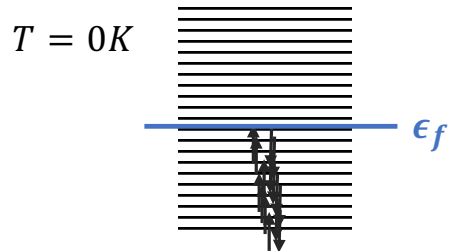
$$N_e dE = f(E) \rho(E) dE$$



Probabilidad de encontrar un electrón en un estado de energía E a temperatura $\beta = 1/K_b T$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_f)} + 1}$$

- $0 < f(E) \leq 1$ por el principio de Pauli
- Al aumentar T , aumenta la probabilidad de que fermiones ocupen niveles de energía más altos, y que los de energía más baja sean promovidos.
- $\epsilon = \epsilon_f, f(E) = 0.5$ para cualquier T

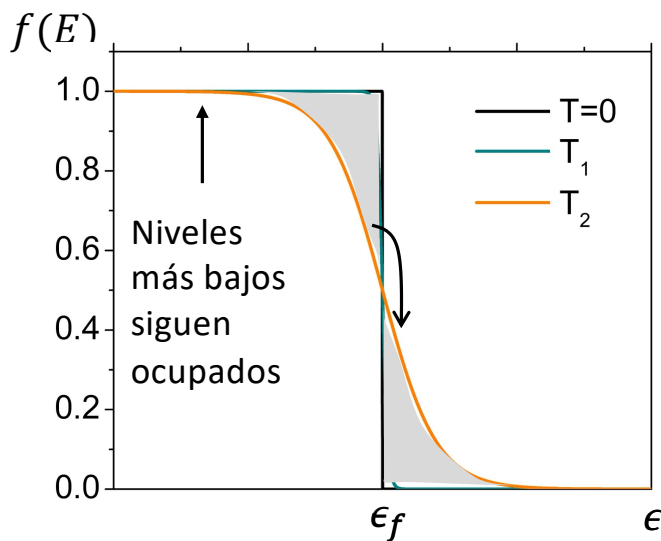


Población de bandas de energía en semiconductores



Probabilidad de ocupación

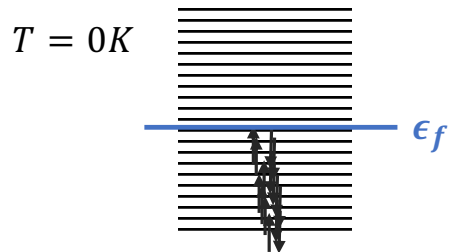
$$N_e dE = f(E) \rho(E) dE$$



Probabilidad de encontrar un electrón en un estado de energía E a temperatura $\beta = 1/K_b T$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-E_f)} + 1}$$

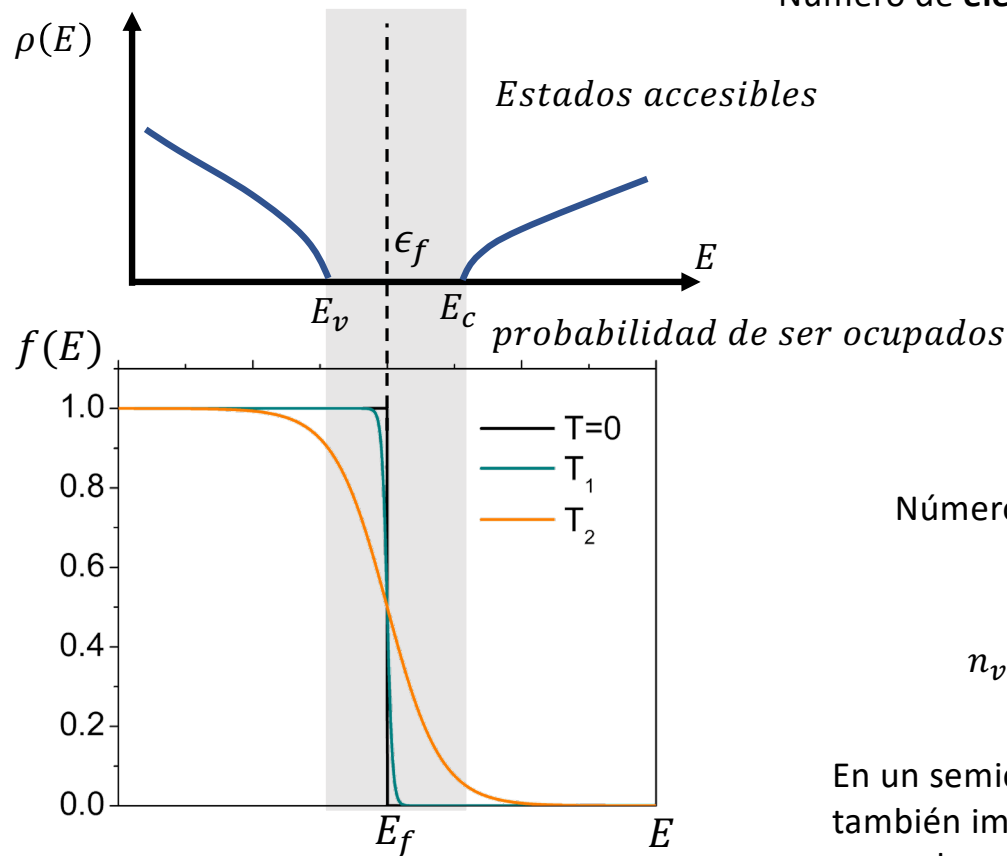
- $0 < f(E) \leq 1$ por el principio de Pauli
- Al aumentar T , aumenta la probabilidad de que fermiones ocupen niveles de energía más altos, y que los de energía más baja sean promovidos.
- $E = E_f$ $f(E) = 0.5$ para cualquier T



Población de bandas de energía en semiconductores



Densidad de estados



Número de **electrones** por unidad de volumen en la banda de **conducción**

$$n_c = \int_{E_c}^{\infty} f(E) \rho(E) dE \approx 2 \left(\frac{2\pi m_c k_b T}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{(E_F - E_c)/k_b T}$$

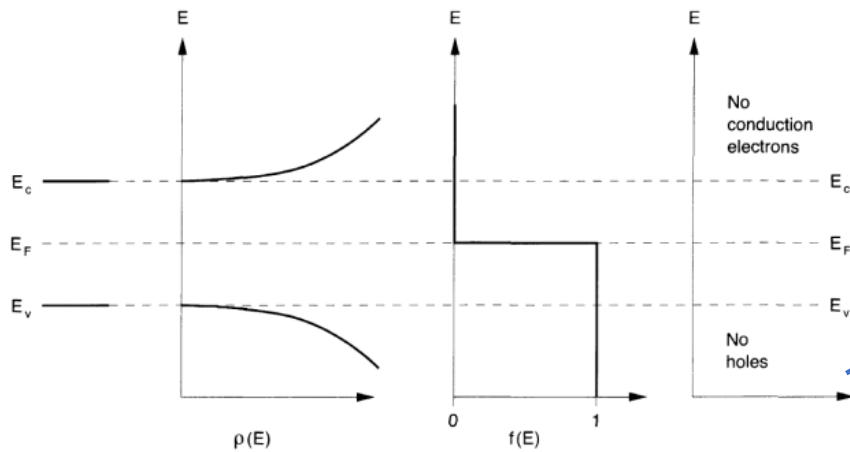
n_c aumenta exponencialmente cuando E_F se acerca a E_c

Número de **huecos** por unidad de volumen en la banda de **valencia**

$$n_v = \int_{-\infty}^{E_v} (1 - f(E)) \rho(E) dE \approx 2 \left(\frac{2\pi m_v k_b T}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-(E_F - E_c)/k_b T}$$

En un semiconductor, no alcanza con saber dónde están las bandas: también importa cuántos estados hay cerca de sus bordes y cómo los ocupa la estadística de Fermi-Dirac.

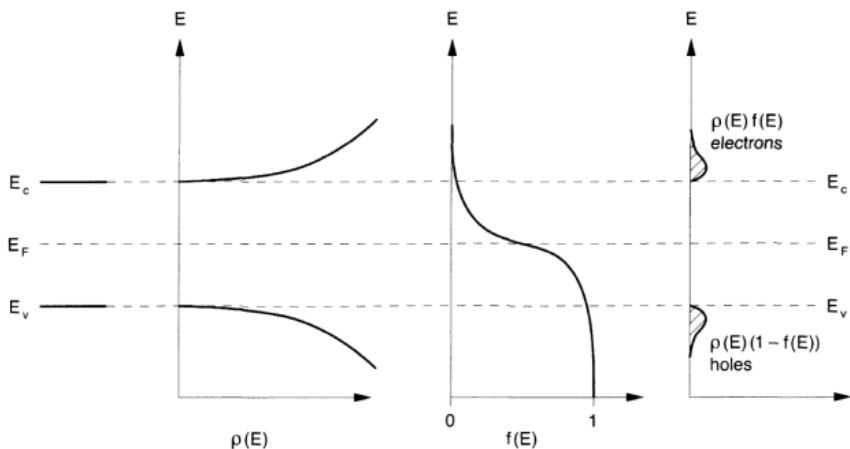
Población de bandas de energía en semiconductores



Semiconductores intrínsecos (puros sin defectos ni impurezas)

A $T = 0$, la banda de valencia está llena y la de conducción vacía; por eso no hay portadores libres para conducir.

(b) $T \gg 0$



En equilibrio térmico, la tasa de recombinación e-h radiativa es igual a la excitación térmica, de modo que el Sistema se encuentra en un estacionario

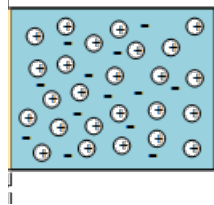
La concentración de portadores es muy baja como para obtener una conductividad significativa.

Intrínseco → pocos portadores **térmicos**, baja conductividad y baja eficiencia radiativa.

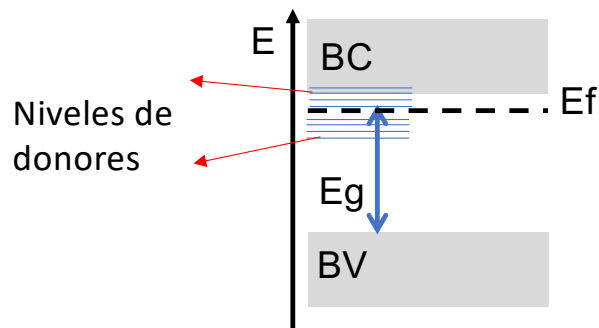
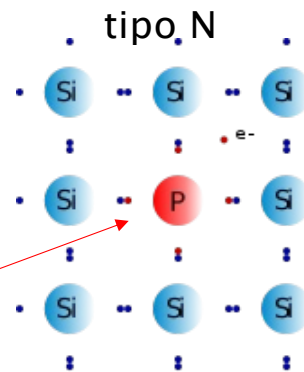
Población de bandas de energía en semiconductores



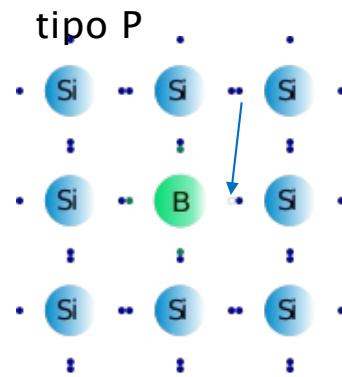
Semiconductores extrínsecos (dopados): para aumentar la población de portadores, se dopa el semiconductor.



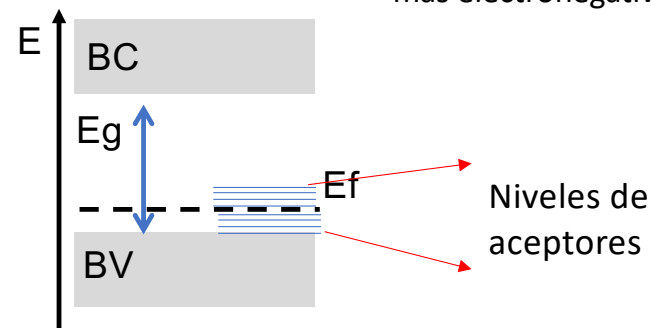
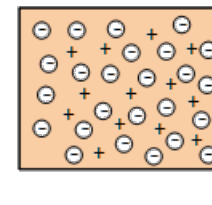
El fósforo dona un electrón al cristal y queda ionizado positivamente (P^+)



Exceso de electrones en banda de conducción



- El Boro tiene 3 e- en la última capa, falta un e- para que Si forme unión
- Un electrón de unión vecina llena el espacio vacante (hueco) y el Boro se vuelve más electronegativo, se ioniza (B^-)

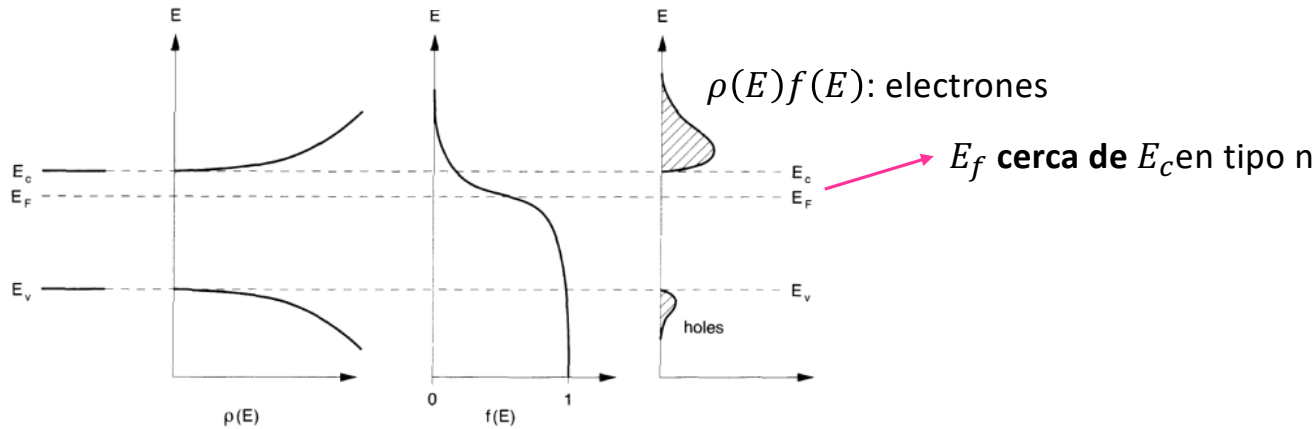


Exceso de huecos en la banda de valencia

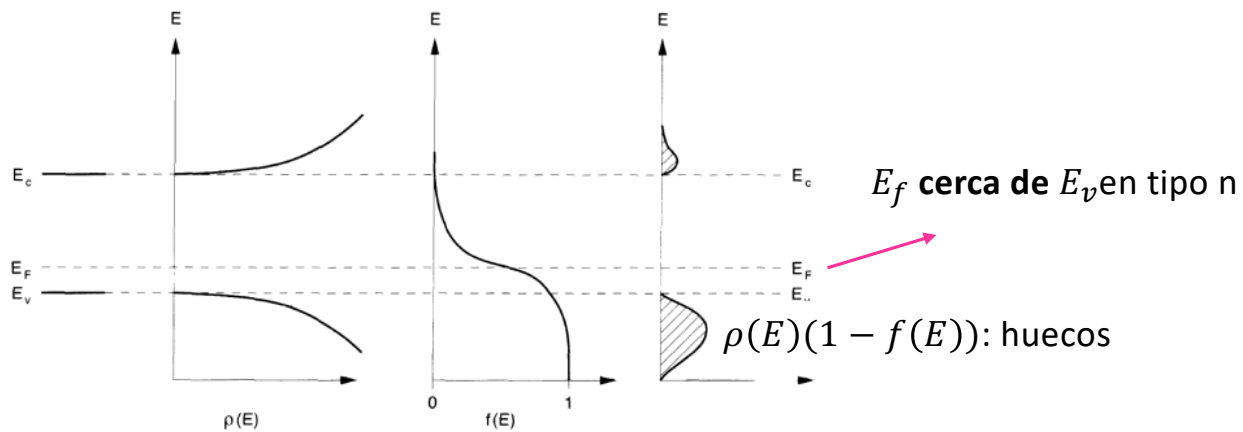
Población de bandas de energía en semiconductores



semiconductor tipo n



semiconductor tipo p



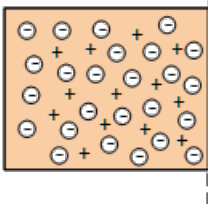
Dispositivos semiconductores optoelectrónicos



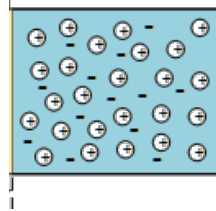
Para que la recombinación radiativa sea significativa, se necesita un gap directo y una alta densidad de electrones y huecos

La juntura PN

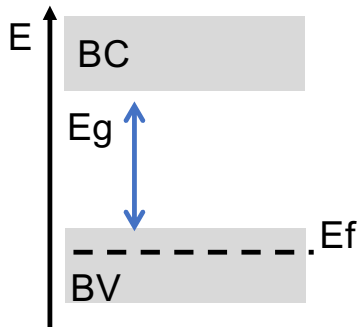
Tipo P



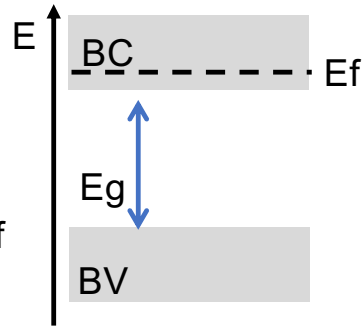
Tipo N



- free electrons
- ⊕ Positive Donor ion
- ⊖ Negative Acceptor ion
- + Holes



Sobran huecos

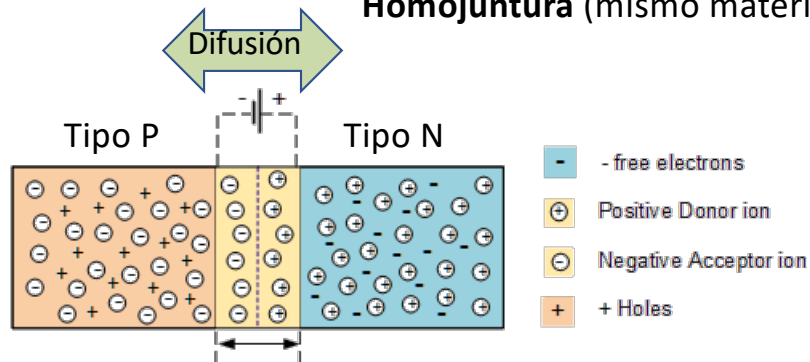


Sobran electrones

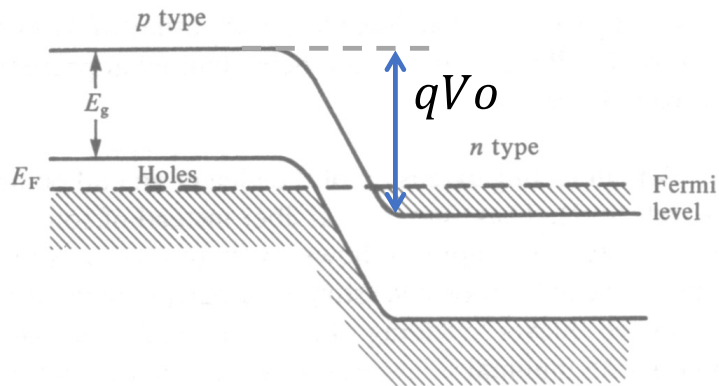
Dispositivos semiconductores optoelectrónicos



Homojuntura (mismo material, distinto dopaje)

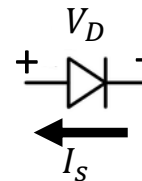


region de empobrecimiento

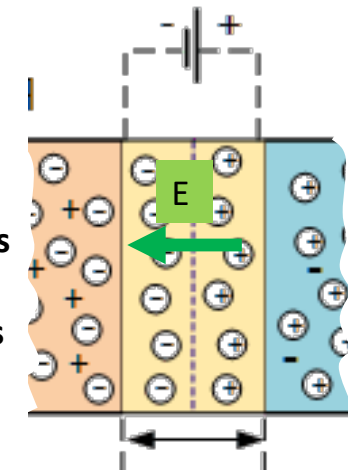


Equilibrio termodinámico

$$C \sim A/d \quad \tau \sim RC$$



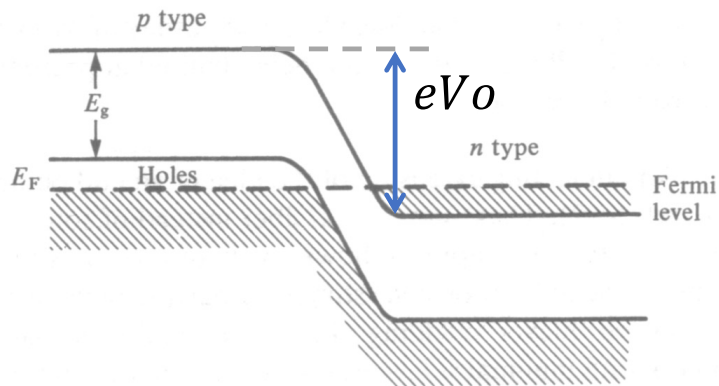
Región P
Mayoritarios
h(+)
Minoritarios
e(-)



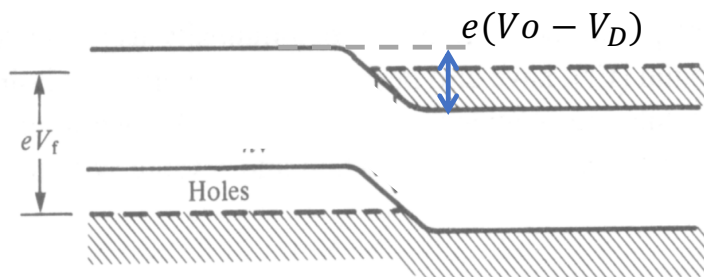
Región N
Mayoritarios
e(-)
Minoritarios
h(+)

$$I_s \quad I_s + I_{DIF} = 0$$

Dispositivos semiconductores optoelectrónicos

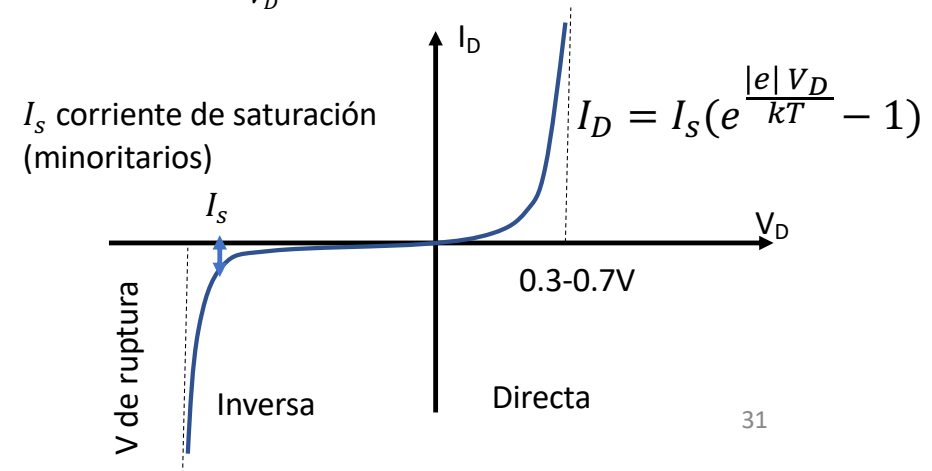
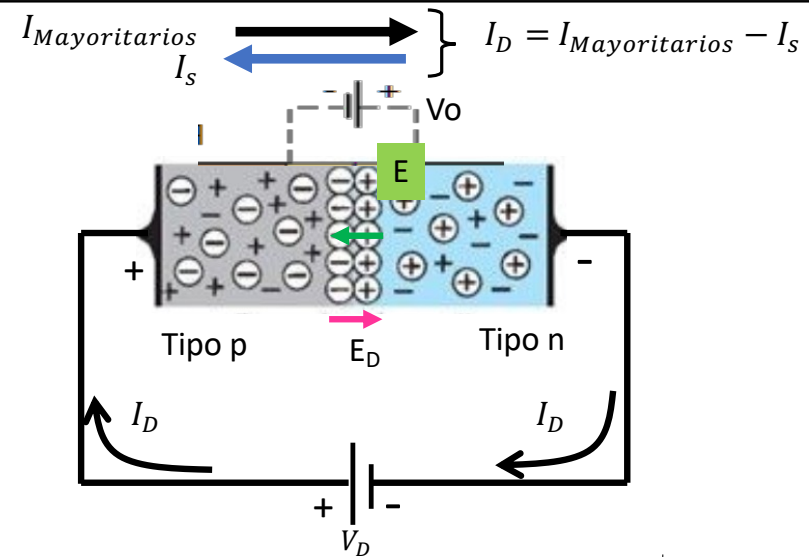


Conducción directa

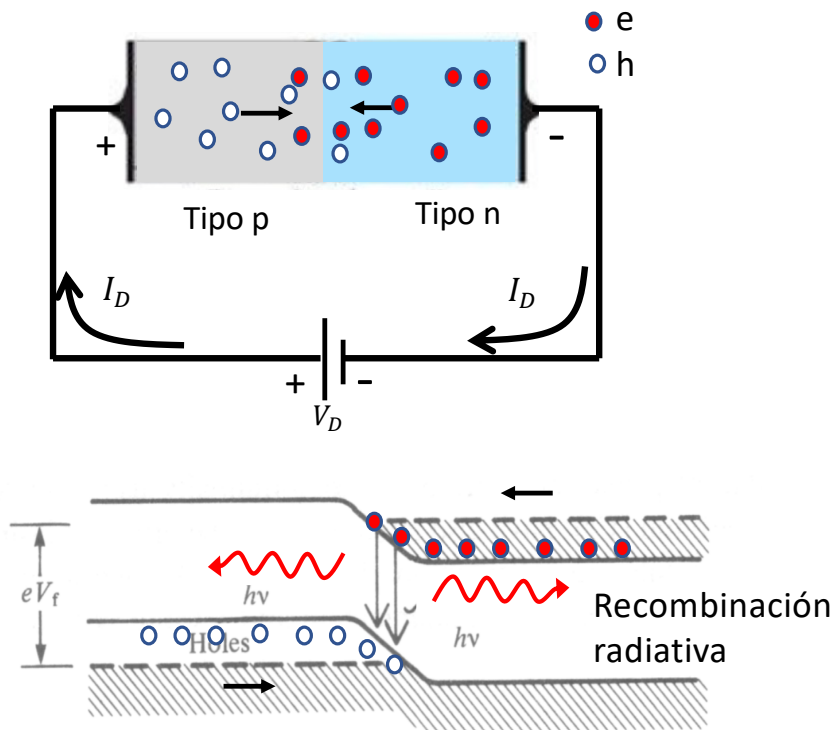


Situación fuera del equilibrio

Se inyectan electrones en la banda de conducción desde n
Y huecos en la banda de valencia desde p



Dispositivos semiconductores optoelectrónicos



LED:

- La emisión es espontánea
- principalmente se emite desde la juntura (También llamada zona activa)

$d \sim \sqrt{D\tau}$ tamaño de la región de recombinación

τ tiempo de recombinación (tiempo en que un electrón en la juntura tarda en recombinarse)

$D = \frac{k_b T \mu}{e}$ coeficiente de difusión (Einstein)

μ movilidad de los electrones o agujeros

$$v_D = -\mu_e E$$

$$v_D = \mu_h E$$

ArGa:

$$\mu_n = 600 \text{ cm}^2/\text{Vs},$$

$$\mu_p = 30 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

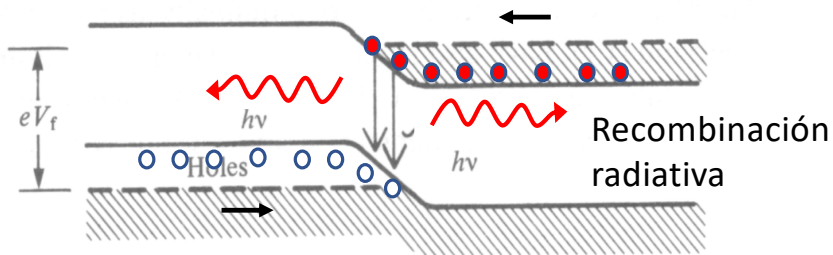
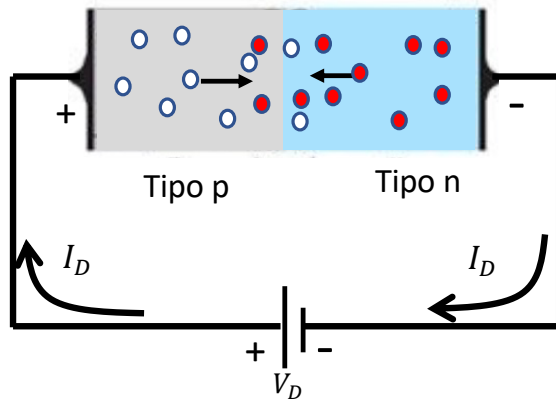
$$D_n = 15 \text{ cm}^2/\text{s},$$

$$D_p = 0.78 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\tau \sim 0.56 \text{ ns}$$

$d = 0.93 \text{ } \mu\text{m} \sim 1 \text{ } \mu\text{m}$ muy grande.....por que?

Dispositivos semiconductores optoelectrónicos



LED:

- La emisión es espontánea
- principalmente se emite desde la juntura (También llamada zona activa)

$$\tau \sim 0.56 \text{ ns}$$

$$d = 0.93 \mu\text{m} \sim 1 \mu\text{m}$$

Queremos tener población de portadores en la homojuntura (estar por encima de la energía de Fermi)

$$\Delta E = E - E_F = 0.05 \text{ eV}$$

Los huecos son el número de transiciones posibles

$$n = 1.2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$J = ne \frac{d}{\tau} = 30 \text{ kA cm}^{-2}$$

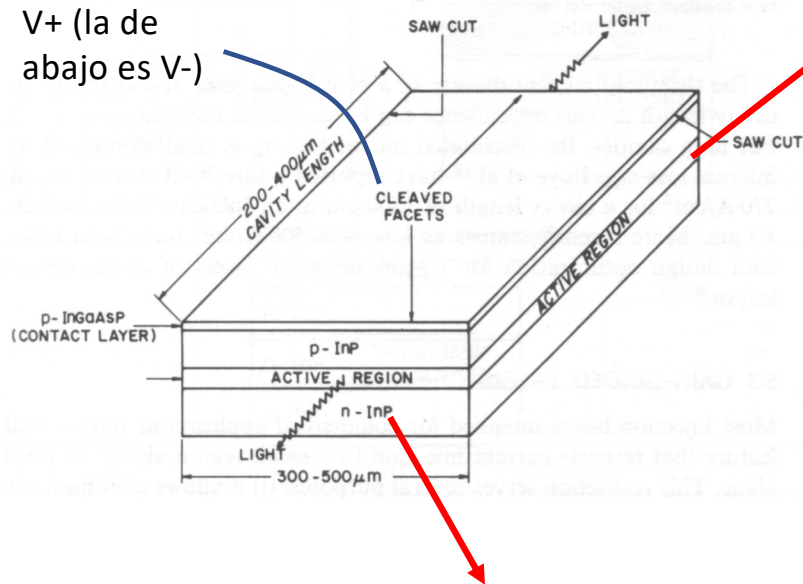
- d muy grande $\rightarrow$ portadores no localizados
- Si quiero n grande para tener ganancia $\rightarrow$ corriente demasiado grande
- Calentamiento por joule es muy grande

Láser de homojuntura: opera a temperaturas criogénicas



Láser de homojuntura (edge emitter)

V+ (la de
abajo es V-)



Cara clivada (y la
paralela)

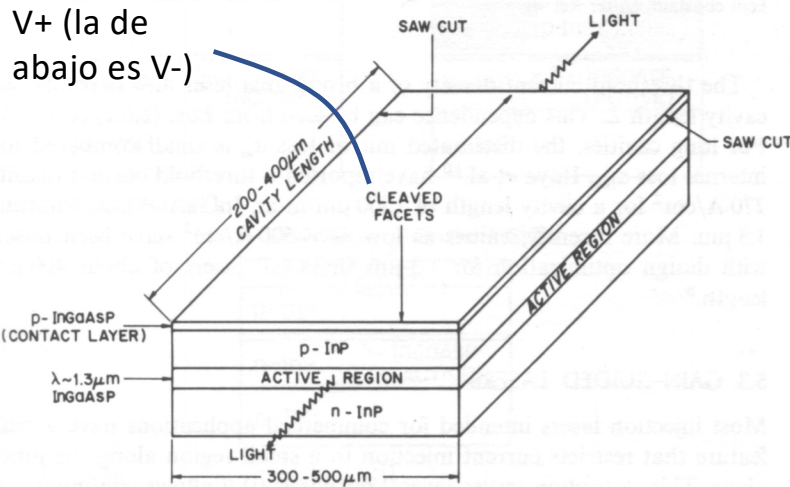
Medio active: juntura pn.

Espejos: se clivan las caras del semiconductor (30-60% de reflectividad) (También se usan redes de difracción)

Transición radiativa: aprox. el band gap

Láser de homojuntura: opera a temperaturas criogénicas

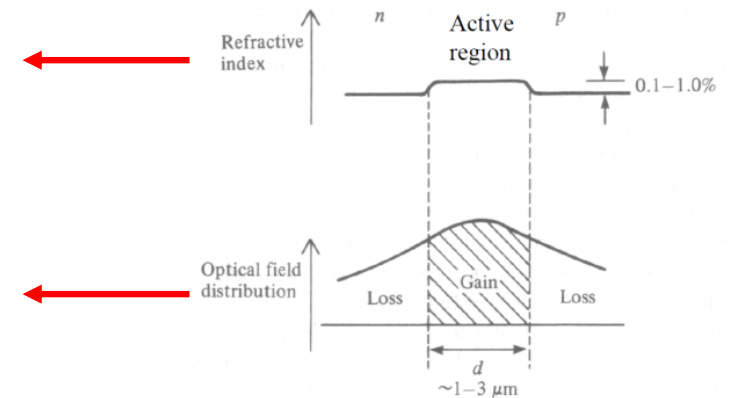
Láser de homojuntura (edge emitter)



Algunos inconvenientes

- $d \sim \lambda \rightarrow$ mucha difracción en la dirección perpendicular a la juntura
- Se necesita mucha corriente para que lasee
- No se puede controlar el tamaño de la juntura (intrínseco de los materiales- determinado por difusión e inyección)
- La luz no está confinada en la región de ganancia

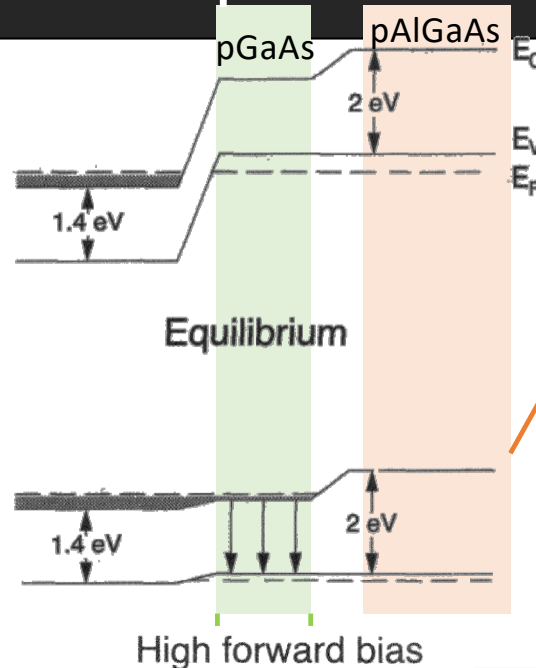
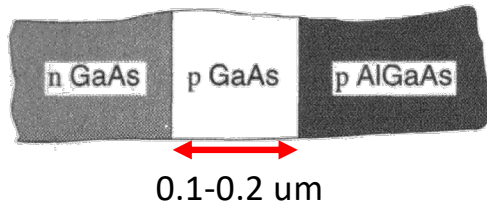
Guiado de ondas



Pérdidas en calor

El primer láser de semiconductor fue de homojuntura (1962). Sólo funcionaba en modo pulsado y a temperaturas criogénicas; en continua, el calentamiento lo volvía inestable.

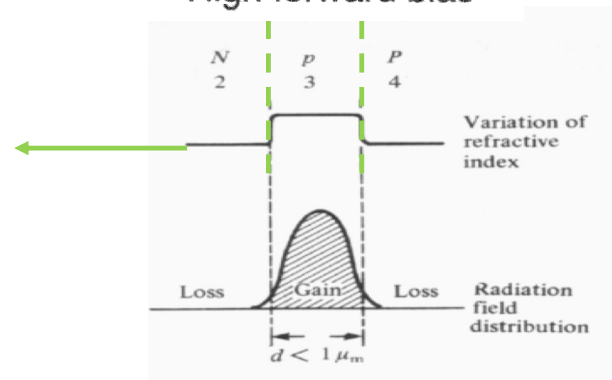
Láser de heterojuntura: opera a temperatura ambiente



1) **zona activa:** Su espesor queda determinado por el proceso de fabricación y no por procesos difusivos.

2) **Confinamiento de portadores**
pAlGaAs: barrera de potencial para los portadores nivel de conducción siempre vacío

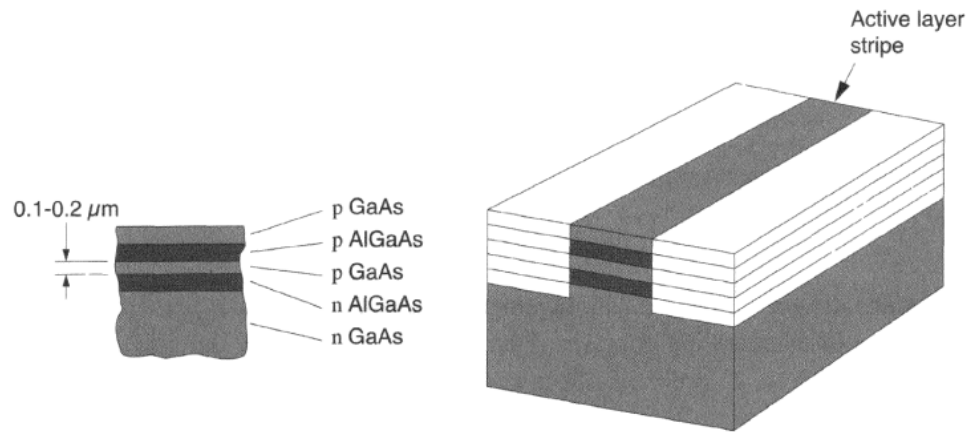
pGaAs: Los portadores se confinan preferentemente en la zona activa de GaAs, no pueden escapar de la zona activa, solo pueden recombinar



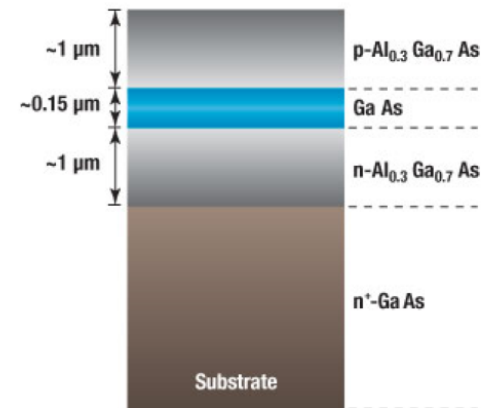
3) **Confinamiento del campo óptico**
el modo óptico se superpone mejor con la región de ganancia, disminuyen las pérdidas fuera de la zona activa y se reduce el volumen de excitación necesario para obtener emisión láser.

Forma guía de ondas por reflexión total interna (como fibra óptica)

Láser de doble heteroestructura



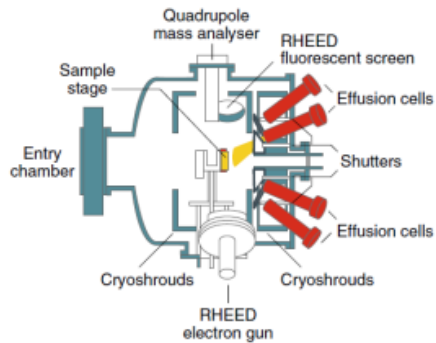
- Mayor confinamiento de campo óptico por guiado de modos
Índices de refracción: GaAs $n \sim 3.6$, cladding p y n $n \sim 3.4$
- Mejor confinamiento de portadores
Band gap: GaAs $\sim 1.4 - 1.5 \text{ eV}$; cladding $\sim 1.8 \text{ eV}$



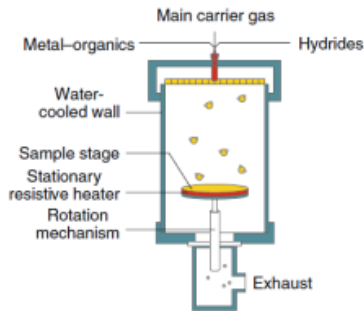
Crecimiento epitaxial de multicapas semiconductoras



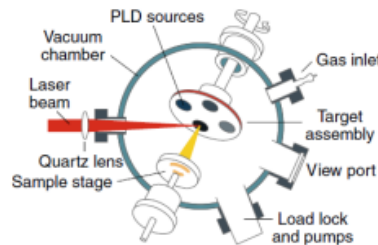
a Molecular beam epitaxy



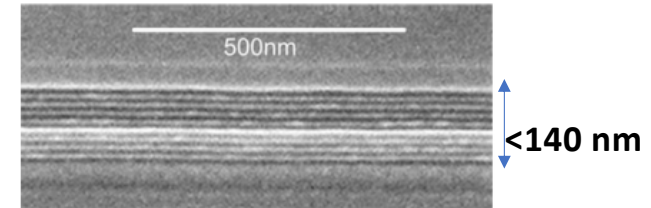
b Metal-organic chemical vapour deposition



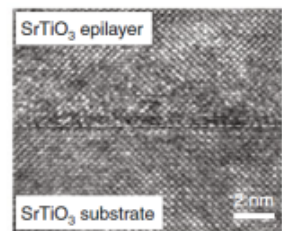
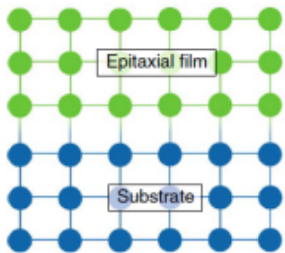
c Pulsed laser deposition



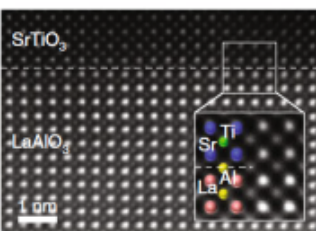
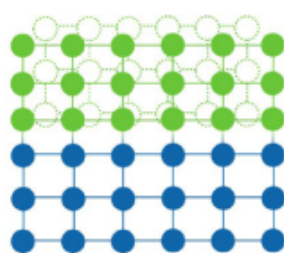
Quantum well laser



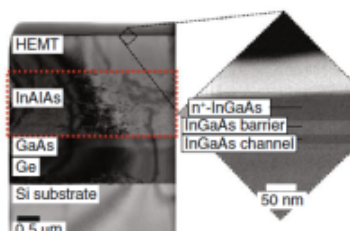
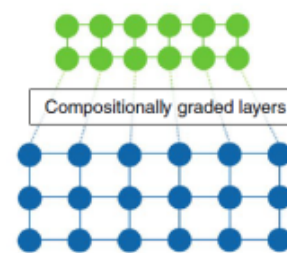
a Homoepitaxy



b Pseudomorphic (heteroepitaxy)



c Metamorphic



d

a) La constante de la red del film epitaxial coincide con la del sustrato. La interfase entre los materiales no se puede distinguir

b) La constante de red del film y del sustrato son distintas. **El resultado es deformación elástica (strain).**
Si la capa epitaxial crece a un espesor mayor que el **espesor crítico (depende del mismatch)**, el stress se relaja formando dislocaciones, rotura o pérdida de enlaces atómicos.

c) Se usa un buffer (InAlAs) para adaptar gradualmente la constante de red entre el sustrato y la capa epitaxial

Epitaxia, mismatch de red y defectos en multicapas semiconductoras

Para que los dispositivos funcionen eficientemente como emisores, las capas delgadas semiconductoras deben tener una constante de red muy cercana a la del sustrato. Los defectos cristalinos, como dislocaciones o vacancias, actúan como centros de recombinación no radiativa, de modo que la energía se disipa en calor en lugar de emitirse como luz.

$$\text{Strain} = \frac{a_{\text{film}} - a_{\text{sustrato}}}{a_{\text{sustrato}}} < 1\% \quad a \text{ parametron de red}$$

Espesor crítico (aproximación muy grosera)

$$t_c = \frac{a_{\text{film}}}{2 \text{ Strain}}$$

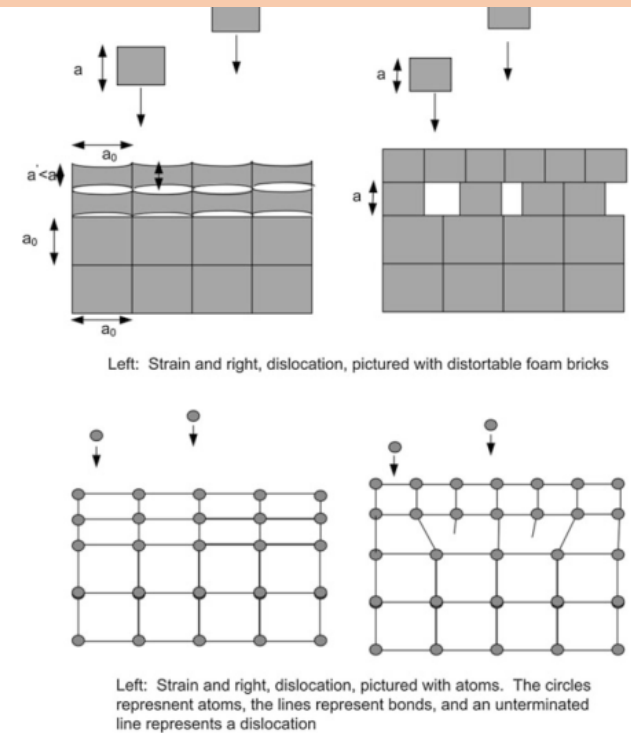
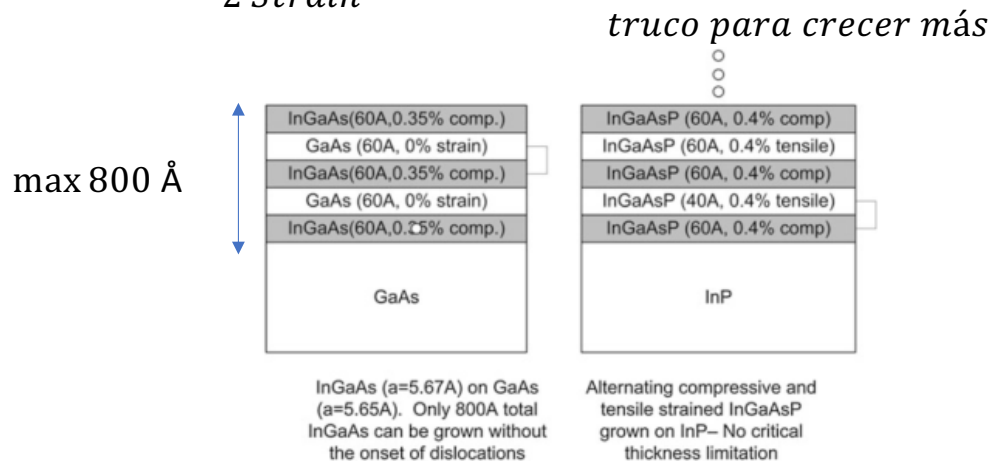
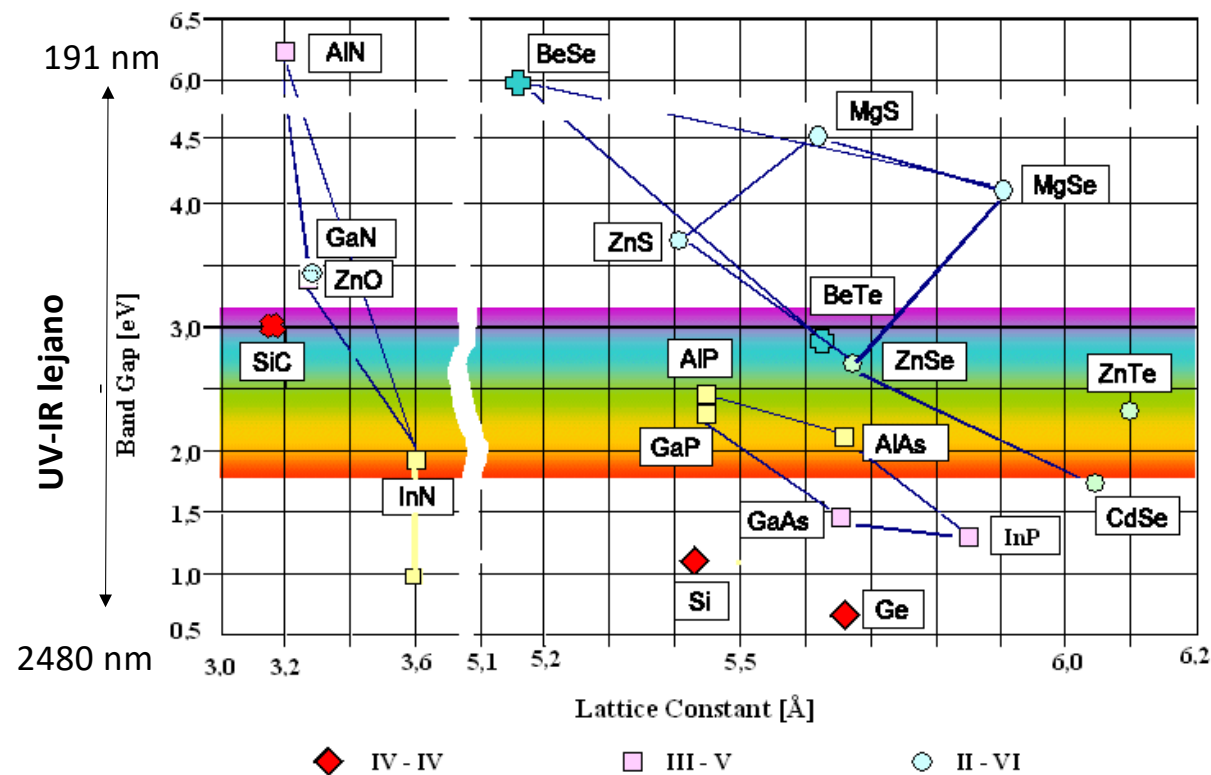


Fig. 3.5 Strain and dislocation. The *left* side shows that strain results in a distortion (stress) distributed on each of the unit cells (or foam bricks) deposited. On the *right*, dislocations suffer some energy penalty from missing bonds at the interface but thereafter are perfect crystals. These dislocations at the interface act as nonradiative recombination sites and are deleterious to lasers

Selección de materiales



Se pueden diseñar dispositivos optoelectrónicos empleando una gran variedad de semiconductores



Materiales, Longitudes de onda y aplicaciones



- **UV/azul (445nm-488nm)**

- GaInN
- In aumenta lambda
- Blue-ray (405 nm), LED iluminación (460nm), ciencias bio

- **Verde (515-525 nm)**

- Materiales III-V : InGaN sobre GaN
- Materiales II-VI ZnSe
- pico proyectores, ciencias bio

- **Rojo (625-700 nm)**

- $Al_yGa_xIn_{1-x-y}P/GaAs$
- Al disminuye lambda
- DVD (650 nm), punteros (635 nm), scanners (635 nm)

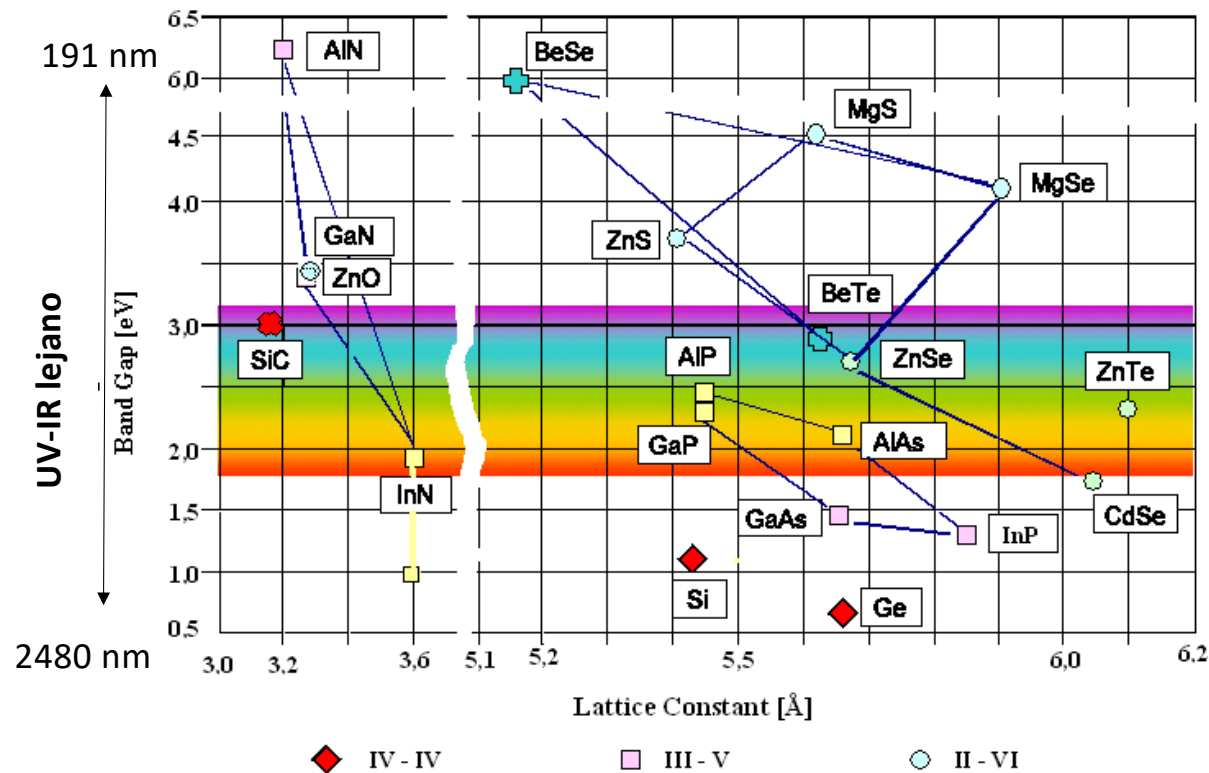
Infrarrojos

- **GaAlAs 750-904 nm**
 - A decrece lambda
 - reproductores de CD, aplicaciones altas potencias
- **InGaAs/GaAs (915-1050 nm)**
 - In aumenta lambda
 - láseres de bombeo (915 nm Yb-fiber, 940 nm Er, Yb; 980 nm Er fiber)
- **InGaAsP/InP (1100-1050 nm)**
 - Comunicaciones por fibras ópticas

Selección de materiales: ejemplo grupo III-V



Se pueden diseñar dispositivos optoelectrónicos empleando una gran variedad de semiconductores

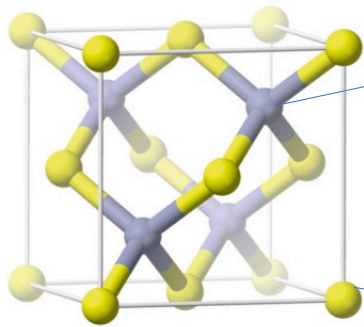


semiconductores III-V



Los semiconductores III-V son fundamentales en optoelectrónica; los basados en InP son especialmente importantes en telecomunicaciones

Estructura Zinc Blende
InP, GaAs



Grupo III
(ej Ga)

Grupo V
(ej As)

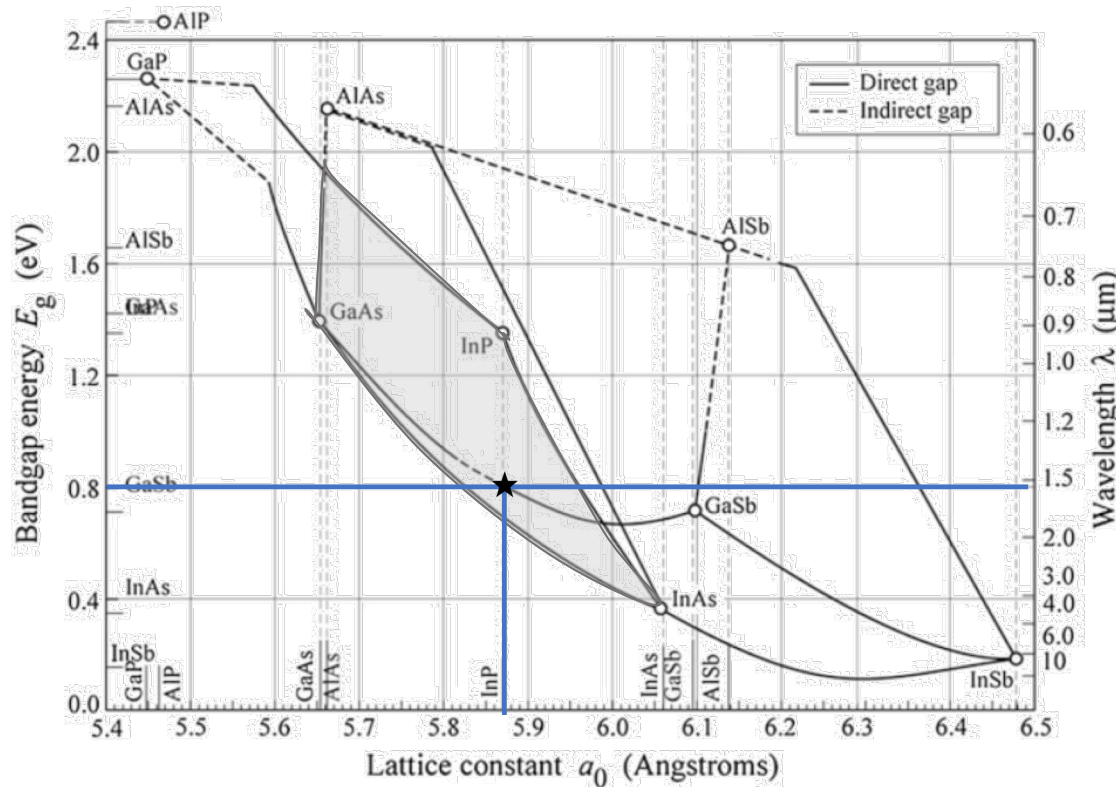
a (parámetro de red)

										18 VIIIA
										2 He Helium 4.002602
		13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA				
		5 B Boron 10.81	6 C Carbon 12.011	7 N Nitrogen 14.007	8 O Oxygen 15.999	9 F Fluorine 18.998403163	10 Ne Neon 20.1797			
		13 Al Aluminum 26.9815385	14 Si Silicon 28.085	15 P Phosphorus 30.973761998	16 S Sulfur 32.06	17 Cl Chlorine 35.45	18 Ar Argon 39.948			
28 VIII B	11 IB	12 IIB								
28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.38	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge Germanium 72.630	33 As Arsenic 74.921595	34 Se Selenium 78.971	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.798		
46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.414	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.29		
78 Pt Platinum 195.084	79 Au Gold 196.966569	80 Hg Mercury 200.592	81 Tl Thallium 204.38	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98040	84 Po Polonium (209)	85 At Astatine (210)	86 Rn Radon (222)		
110 Ds Darmstadtium (281)	111 Rg Roentgenium (282)	112 Cn Copernicium (285)	113 Nh Nihonium (286)	114 Fl Flerovium (289)	115 Mc Moscovium (289)	116 Lv Livermorium (293)	117 Ts Tennessine (294)	118 Og Oganesson (294)		

Diseño de láseres sobre InP: longitud de onda y parámetro de red



Compuestos III-V

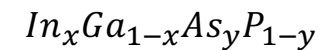


Laser en sustrato de InP que emita en 1.55 μm

Parámetro de red de InP

$$a = 5.8686 \text{ \AA}$$

Algún **compuesto cuaternario** del tipo



(x, y fracciones molares)

Va a tener la misma constante de red que InP y emitir en 1.55 μm

Ajuste de gap y parámetro de red mediante aleaciones

Ley de Vegard para compuestos ternarios

$$Q(A_{1-x}B_xC) = (1-x)Q(AC) + xQ(BC)$$

Ley de Vegard para compuestos cuaternarios

$$Q(A_{1-x}B_xC_yD_{1-y}) = xyQ(BC) + x(1-y)Q(BD) + (1-x)yQ(AC) + (1-x)(1-y)Q(AD)$$

x, y fracción molar

Q propiedad (band gap, constante de red, índice de refracción)

Corrección término superior

$$E_g(x) = (1-x)E_g(A) + xE_g(B) - b x(1-x)$$

donde b es el **parámetro de bowing**.

Ejemplo calcular x para que $In_xGa_{1-x}As$ tenga band gap en $1 \mu m$ ($1.24 eV$)

En este caso: $BC = InAs$ y $AC = GaAs$

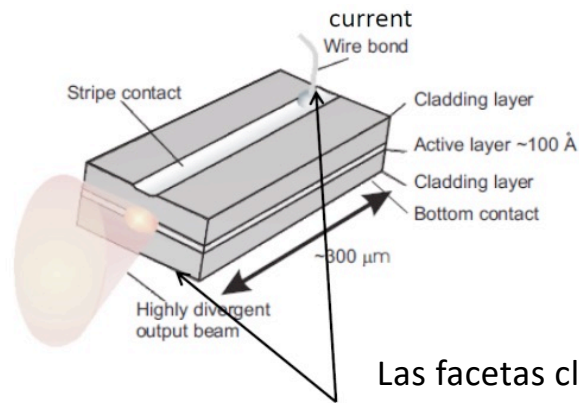
Asumimos que, en primera aproximación, $Q = E_g$ es lineal

$$\begin{aligned} E_g(In_xGa_{1-x}As) &= 1.24 eV = (1-x)E_g(GaAs) + xE_g(InAs) \\ 1.24 eV &= (1-x)(1.43 eV) + x(0.36 eV) \\ x &= 0.17 \end{aligned}$$

Cavidades ópticas y selección modal en láseres de semiconductor



EEL: edge emitting laser

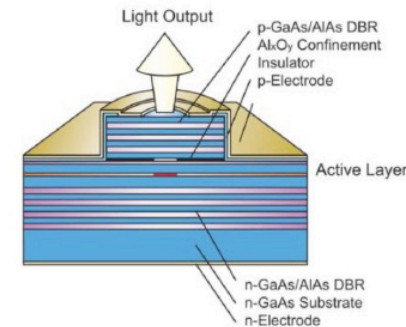


Las facetas clivadas son los espejos

EEL

- Umbral moderado
- Volumen activo grande
 - más potencia
 - eficiencia hasta 60%
- Área de emisión muy angosta
 - Gran divergencia
 - Calidad del haz pobre
- Cavity larga
 - multimodo longitudinal
 - espejos DBF o DBR para emitir en monomodo

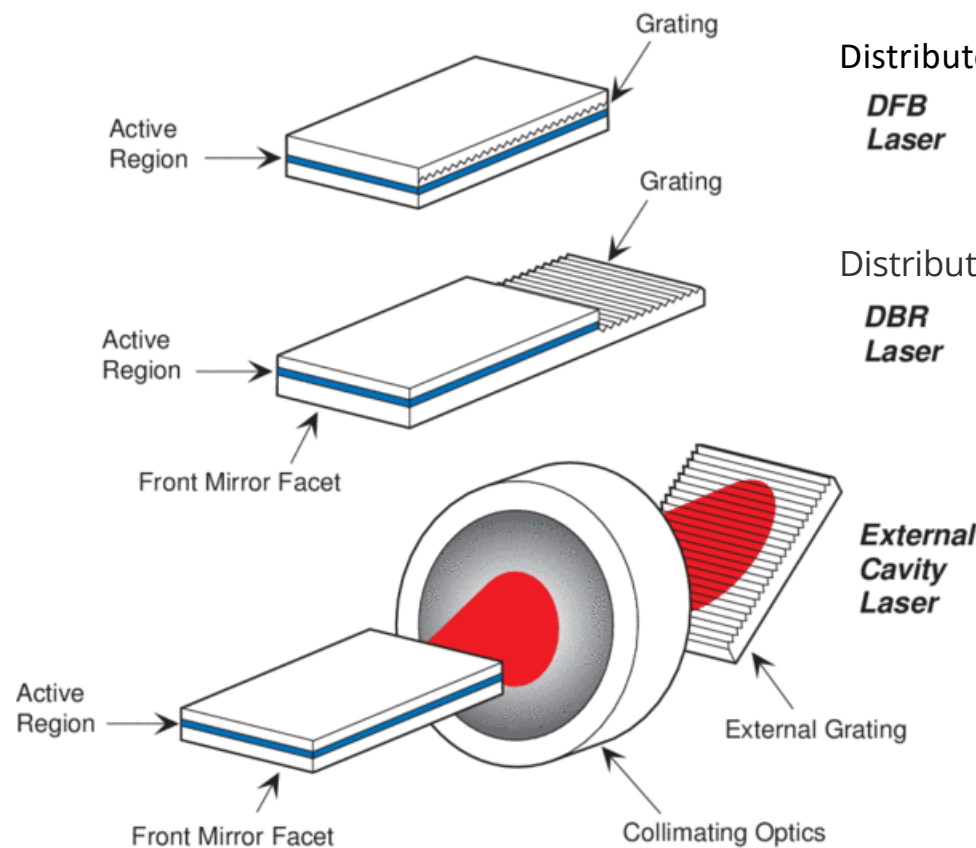
VCSEL Vertical Cavity Surface Emitting Laser



VCSEL

- Bajo umbral
- Volumen de la capa active chico (~15% eficiencia)
- Área de emisión circular
 - 2-100 μm
 - mejor calidad del haz
- Cavity corta (~1-10 μm) $\Delta\lambda = \lambda_o^2/2nL$
 - monomodo longitudinal
 - longitud de onda estable
 - longitud de coherencia larga

Cavidades ópticas y selección modal en láseres de semiconductor



Distributed Feedback laser

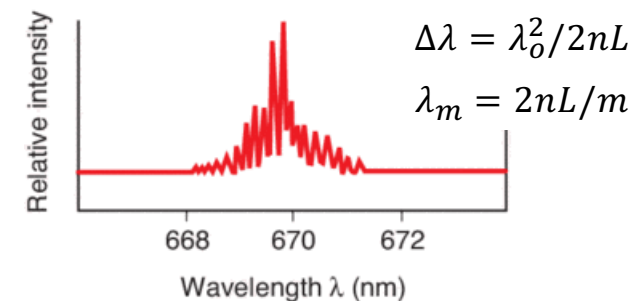
**DFB
Laser**

Distributed Bragg reflector

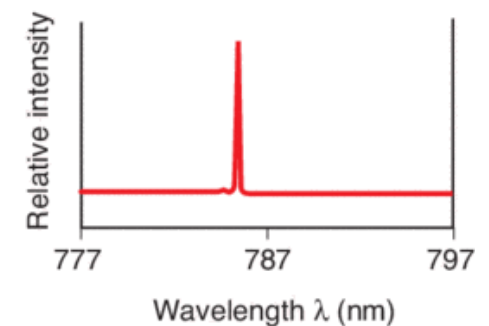
**DBR
Laser**

**External
Cavity
Laser**

Multimode gain guided
670 nm laser diode

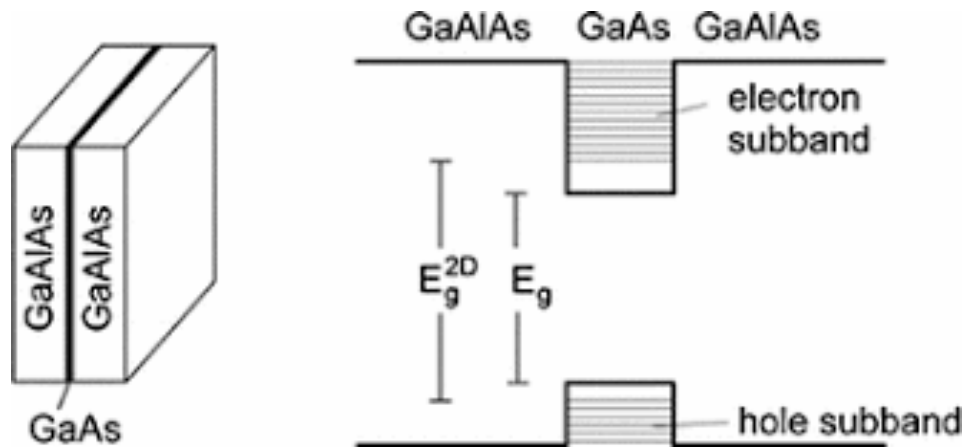


Single-mode index guided
780 nm laser diode



<https://www.newport.com/t/laser-diode-technology>

Laser de pozos cuánticos múltiples

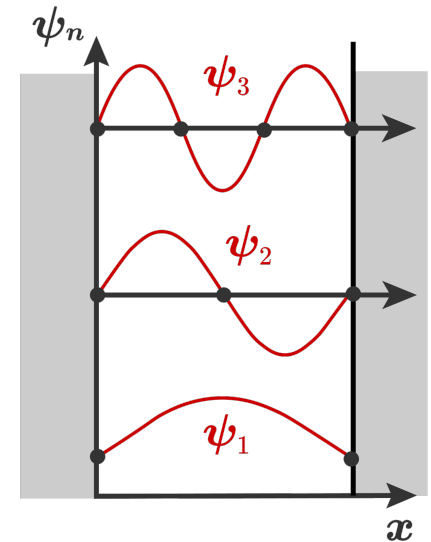


$$E_n = E_c + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m_c L_z^2}$$

$$E_n = E_v - \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m_v L_z^2}$$

Energía barrera infinita de potencial

$$\Psi_n(z) = \left(\frac{2}{L_z}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)$$

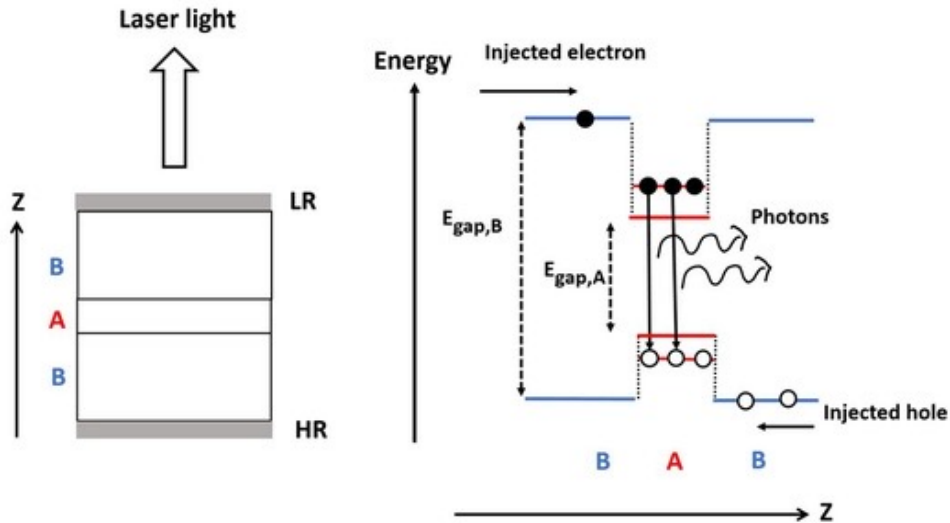


$$k_n = \frac{n\pi}{L_z} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_n = \frac{2 L_z}{n}$$

Espesor GaAs menor que la longitud de onda de Broglie para electrones ($\hbar/p \sim 100 \text{ \AA}$)

Laser de pozos cuánticos múltiples



$$E_1^c = E_c + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_c L_z^2}$$

$$E_1^v = E_v - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_v L_z^2}$$

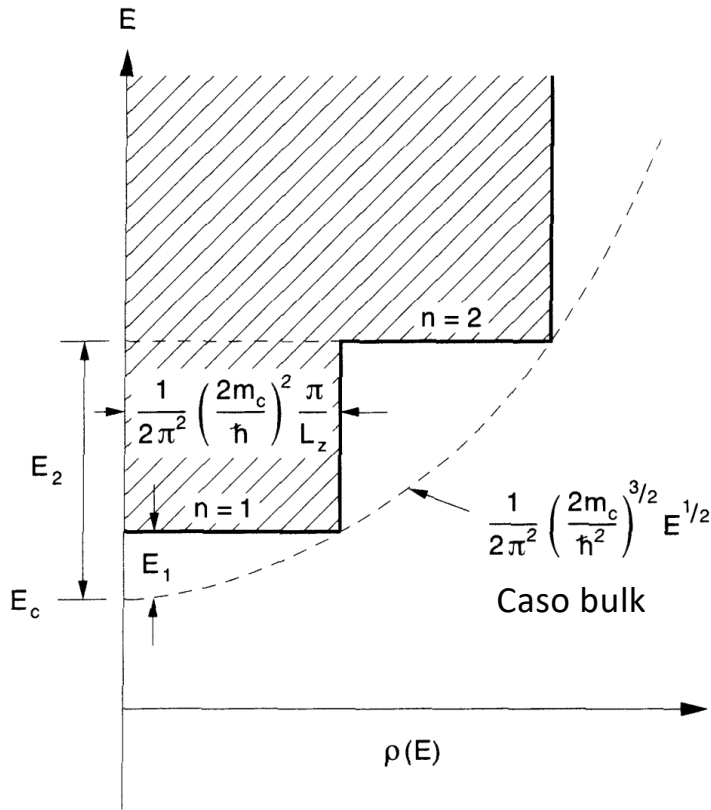
$$\Delta E = E_g + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 L_z^2} \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_v} \right)$$

Cambiando L_z puedo cambiar ΔE independientemente del material que elija

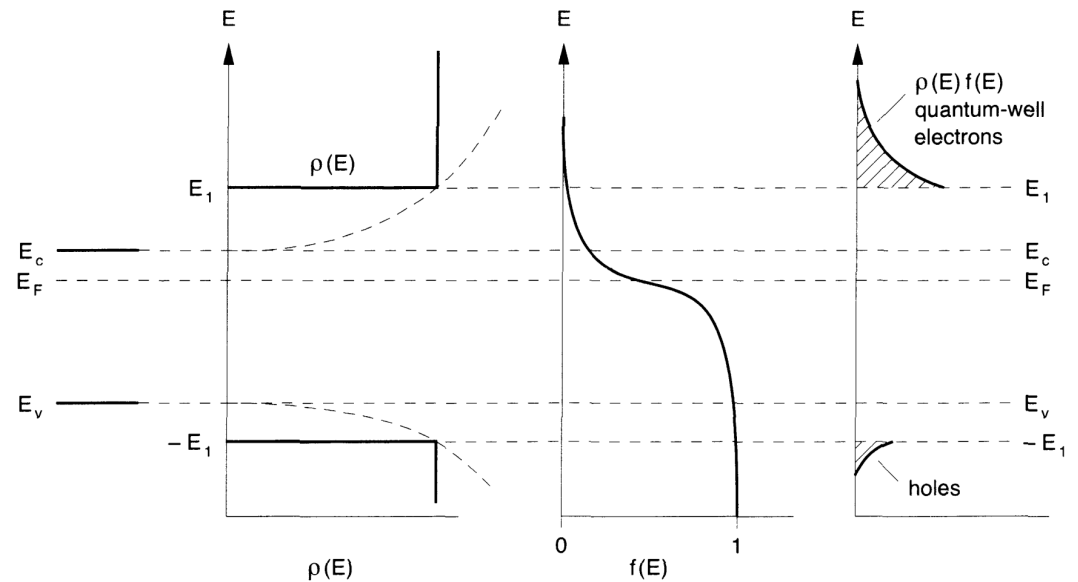
Laser de pozos cuánticos múltiples



Densidad de estados



Distribución de electrones en la banda de conducción



- Volumen de la zona activa más chico (reduce calor pero también la potencia)
- Disminuye la corriente umbral (incrementa la concentración de electrones por u de volumen para dada energía (y por lo tanto la ganancia))

Laser de pozos cuánticos múltiples

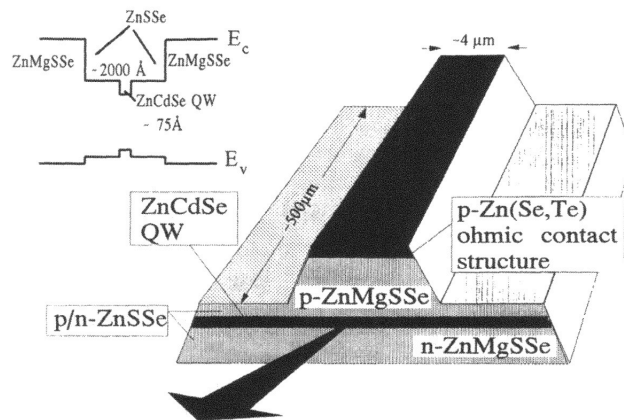
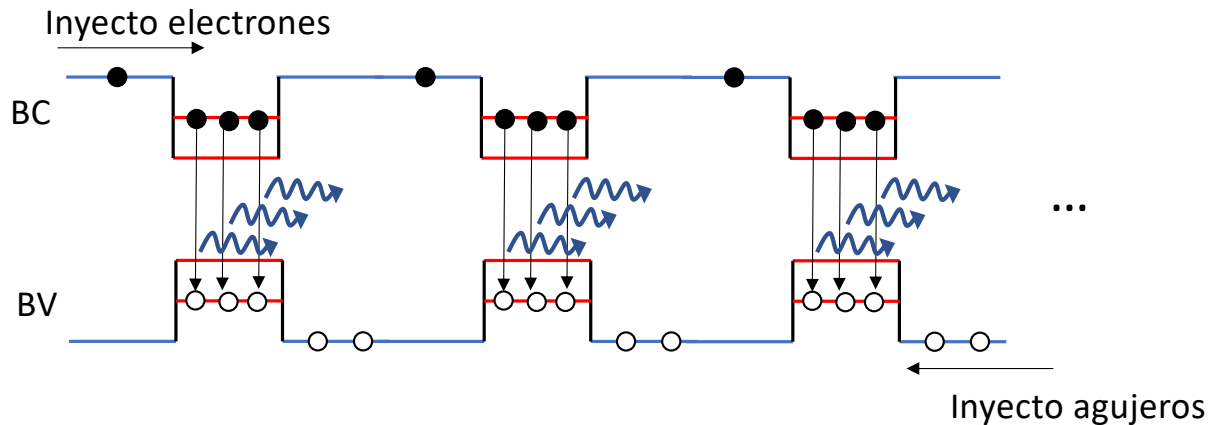
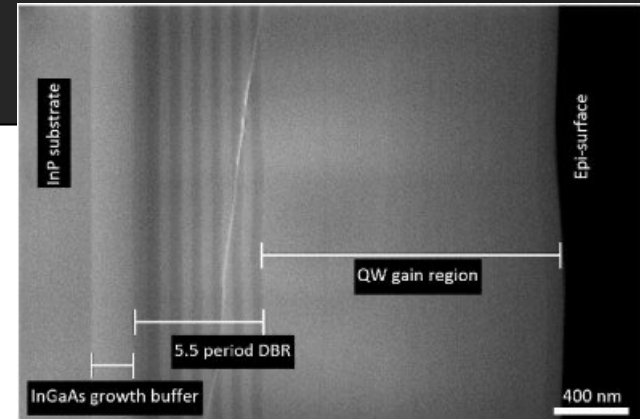
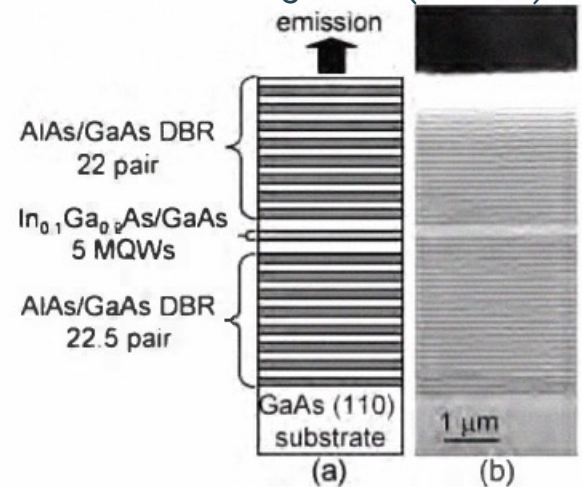


Figure 15-23 Blue-green laser diode (courtesy of Brown University)



[Thin Solid Films 590](#), 84-89 (2015)

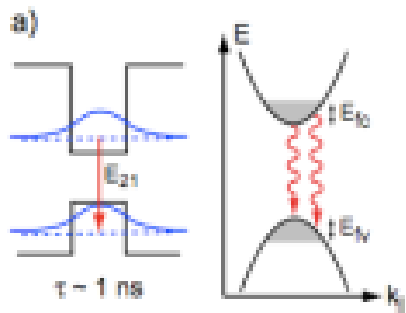
Quantum Well (QW) vertical-cavity surface-emitting laser (VCSEL)



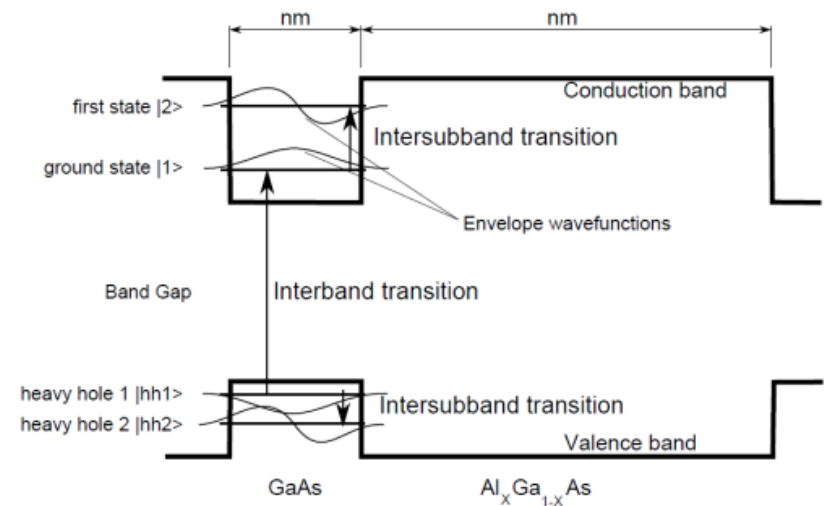
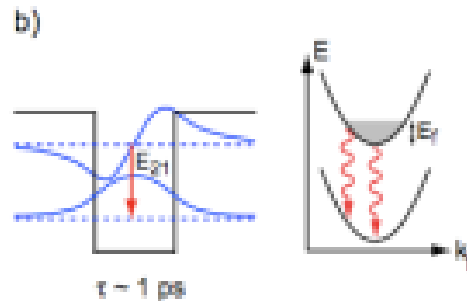
Transiciones interbanda e intersubbanda



Transiciones Interbanda

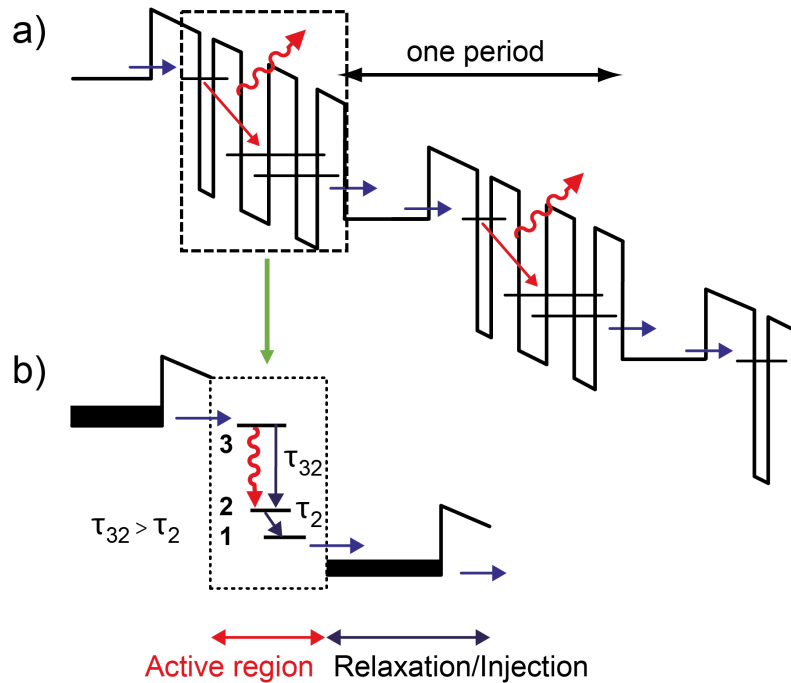


Transiciones intersubbanda



- Transiciones ópticas entre **sub-bandas** (estados confinados cuánticos)
- λ solo depende del espesor de las capas y no del material
- no hay recombinación e-h

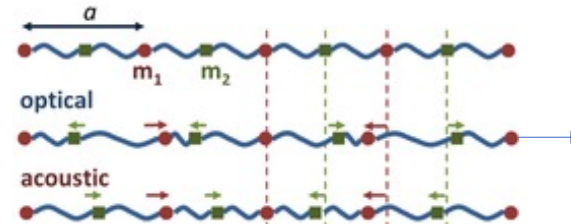
Quantum Cascade Laser



Región activa: 3 quantum wells

τ_2 disminuye si acoplo la transición con fonón óptico

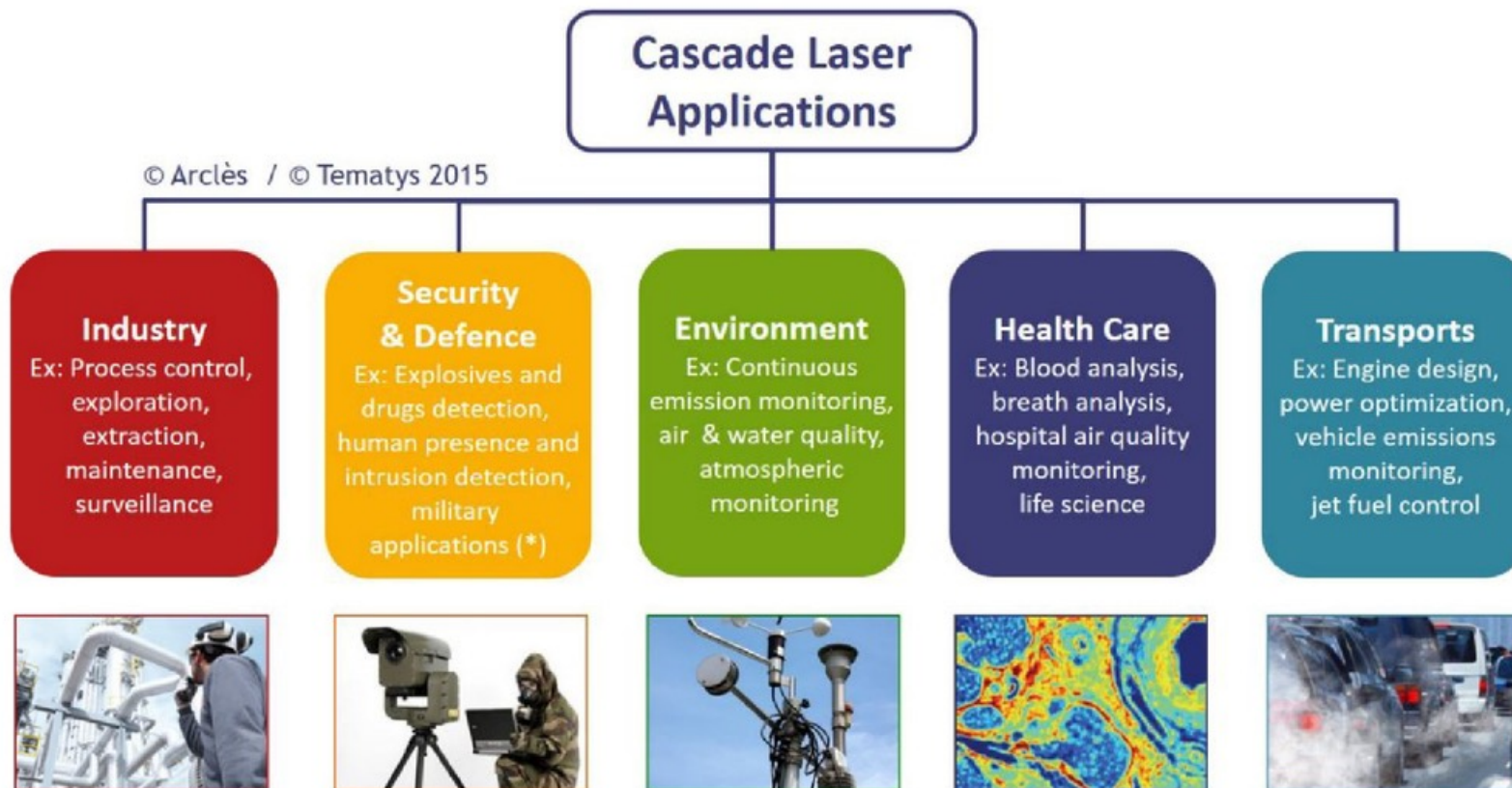
$$\Delta E_{21} = \hbar \omega_{OP}$$



En cristales iónicos, hay momento dipolar y por lo tanto puedo acoplar con fotones ópticos

- tunneling para inyectar el nivel superior del período siguiente
- muchos fotones por cada electrón

Aplicaciones Quantum Cascade laser



(*) : The business analysis of military applications is only at equipment level, typically for the DIRCM function, business has been evaluated at the turret level and not system integration level

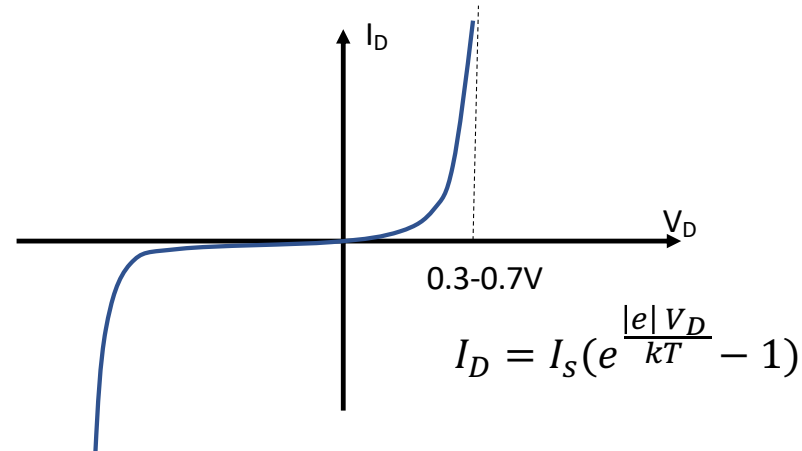
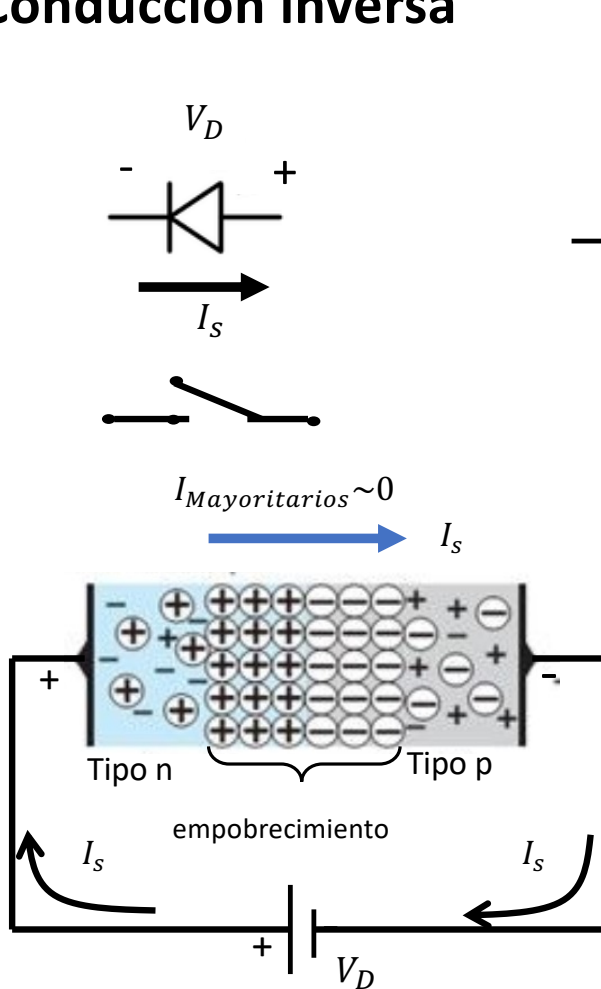
SPIE digital library



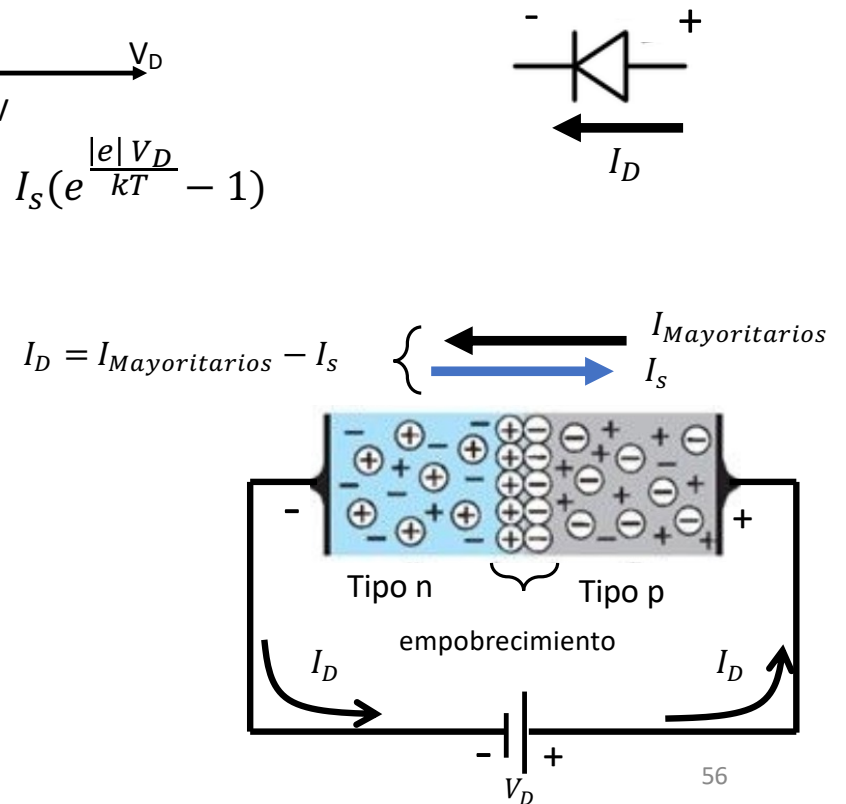
Dispositivos semiconductores optoelectrónicos



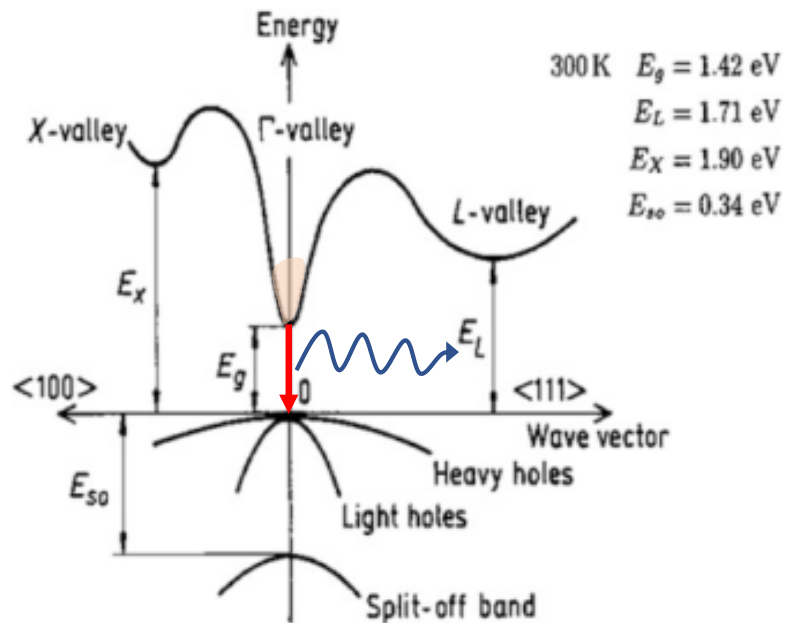
Conducción inversa



Conducción directa



Niveles de energía en semiconductores



Electrones de conducción en el mínimo de energía

Momento de fotones

$$p_{ph} = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{c} \approx \frac{10^{-19} \text{ J}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 10^{-28} \text{ Js/m}$$

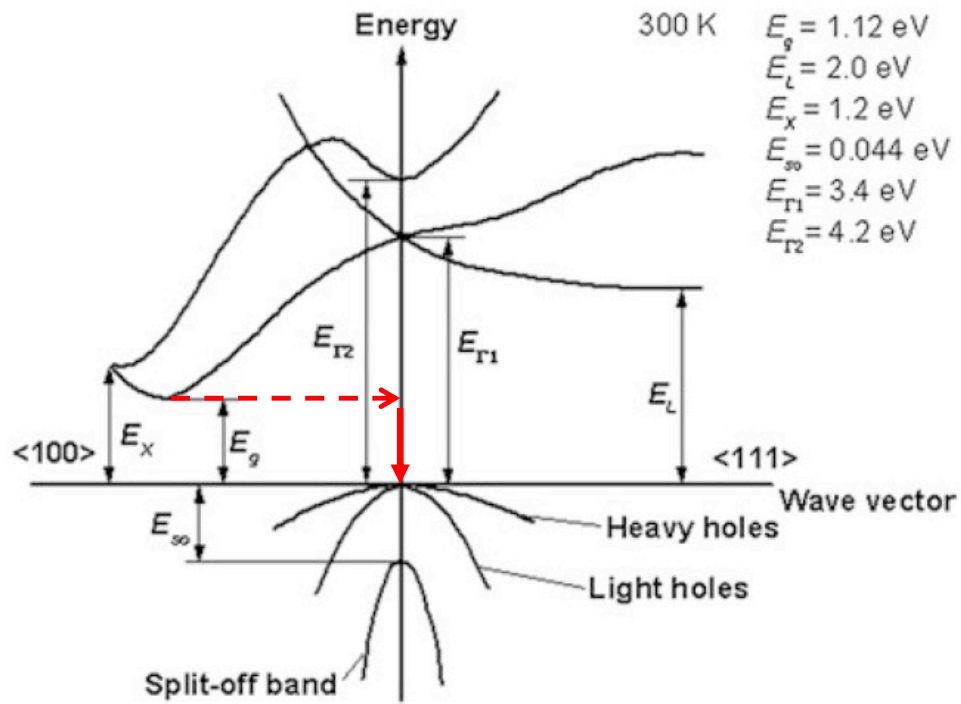
Conservación de momento

$$\hbar \Delta k = p_{ph}$$

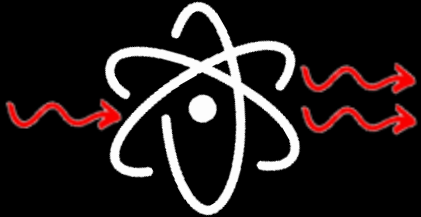
Muy chiquito

Conservación de energía

$$E_g = h\nu$$



Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

Radiación en equilibrio termodinámico.



Estudiaremos las propiedades colectivas de un gran número de átomos o sistemas cuánticos en equilibrio térmico con un campo de radiación. (considerando energía cinética y energía interna)

Ley de Planck + reversibilidad microscópica → concepto de emisión estimulada (Einstein)

Vamos a suponer que todos los siguientes procesos ocurren en equilibrio termodinámico

Radiación térmica: emisión de ondas electromagnéticas luego de haber absorbido energía térmica

Emisión espontánea: un sistema en un estado excitado decae a un nivel de menor energía y emite un fotón, sin necesidad de un fotón incidente.

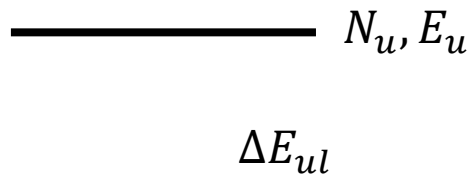
Emisión estimulada: un fotón interactúa con un sistema en estado excitado, estimulándolo a decaer a un nivel de energía inferior. El fotón emitido tiene la misma fase, frecuencia, polarización y dirección que el incidente

Absorción (estimulada): un fotón incidente es absorbido y promueve al sistema desde un nivel inferior hacia un nivel superior.

En equilibrio térmico, el número de átomos con energía en $E, E + dE$ es

$$N(E)dE = N e^{-E/k_B T} dE, \quad \int_0^\infty N(E)dE = N \quad (\text{distribución de Maxwell Boltzmann})$$

niveles discretos de energía (átomos, iones en dieléctricos, etc): E_u, E_l



$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{g_u}{g_l} e^{-(E_u - E_l)/k_B T} = \frac{g_u}{g_l} e^{-\Delta E_{ul}/k_B T}$$

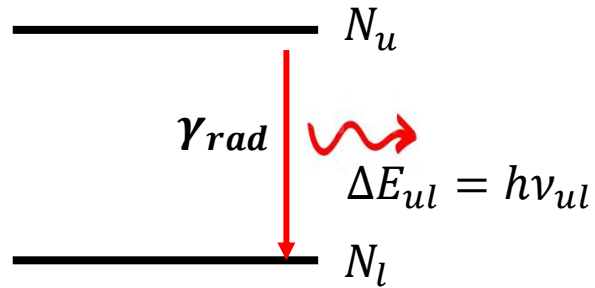
niveles de energía en sólidos E_u, E_l en intervalos dE

$$\frac{N(E_u)dE}{N(E_l)dE} = \frac{N(E_u)}{N(E_l)} \sim e^{-\Delta E_{ul}/k_B T} < 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Hay tantos niveles que los pesos estadísticos son aprox iguales}$$

3

$N(E_u) < N(E_l)$ térmicamente no puedo lograr inversión de población

Ejemplo: ¿Puedo excitar térmicamente electrones en un sólido al nivel superior, de manera de que luego emitan luz visible al decaer radiativamente?



$N \sim 5 \times 10^{28}$ átomos/m³ número total de átomos inicialmente en estado fundamental

Energías en visible 1.7 eV (700 nm) a 3.1 eV (400 nm)

Si éxito a energías mayores que la mínima visible, potencialmente podrá radiar emitiendo luz en visible

$$N(E > 1.7 \text{ eV}) = \frac{N_l}{k_b T} \int_{1.7 \text{ eV}}^{\infty} e^{-E/k_b T} dE = -N e^{-\frac{E}{k_b T}} \Big|_{1.7 \text{ eV}}^{\infty} = N e^{-\frac{1.7 \text{ eV}}{k_b T}}$$

$$T \sim 300 \text{ K}, \quad k_b T = 0.026 \text{ eV} \quad N(E > 1.7 \text{ eV}) \sim 0/m^3$$

No es posible observar radiación térmica en visible a T ambiente

$$T \sim 1000 \text{ K}, \quad k_b T = 0.086 \text{ eV} \quad N(E > 1.7 \text{ eV}) \sim 1.3 \times 10^{20} 1/m^3$$

Mini resumen radiación de cuerpo negro



Cuerpo negro

- Absorbedor perfecto
- Emisor máximo de radiación electromagnética en equilibrio térmico
- La radiación que emite una cavidad en equilibrio térmico a temperatura T

Características del espectro de radiación térmica

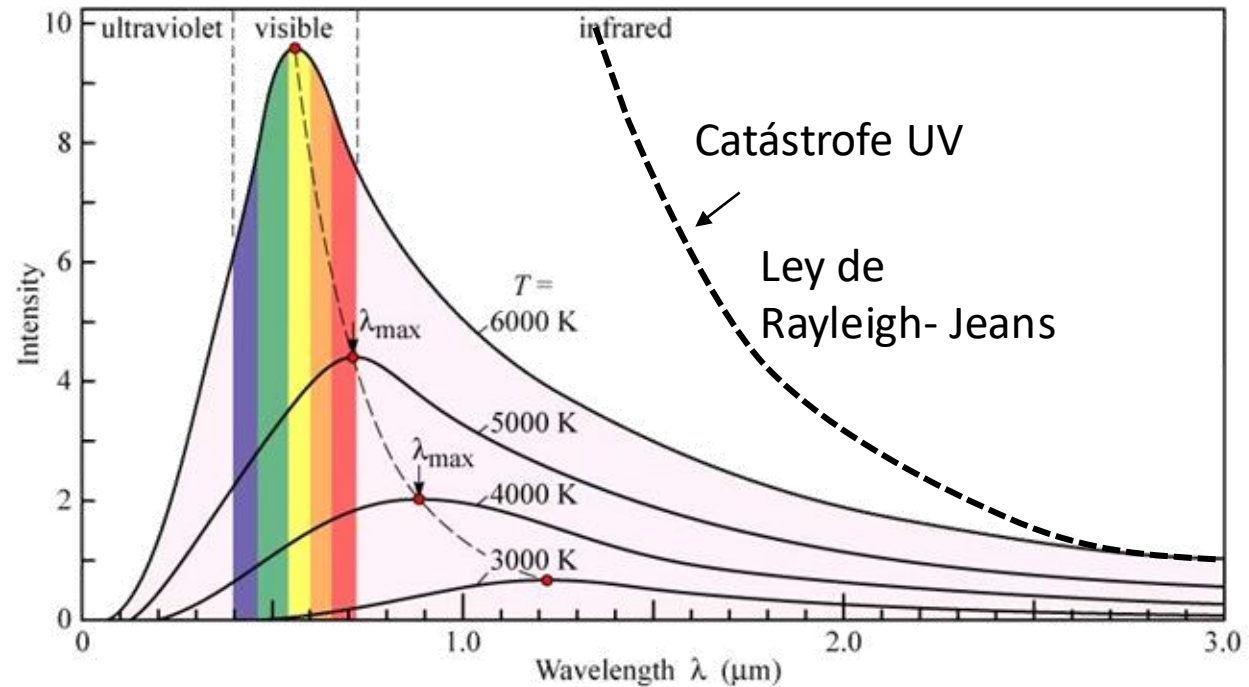
- Ley de Stefan Boltzmann

$$I[W/m^2] = e_M \sigma T^4$$

e_M emisividad

- Ley de Wein

$$\lambda_{max} T \sim cte$$



Mini resumen radiación de cuerpo negro



Ley de Planck para radiación de cavidades: (auxiliar 1)

Los modos del campo electromagnético tienen energías cuantizadas

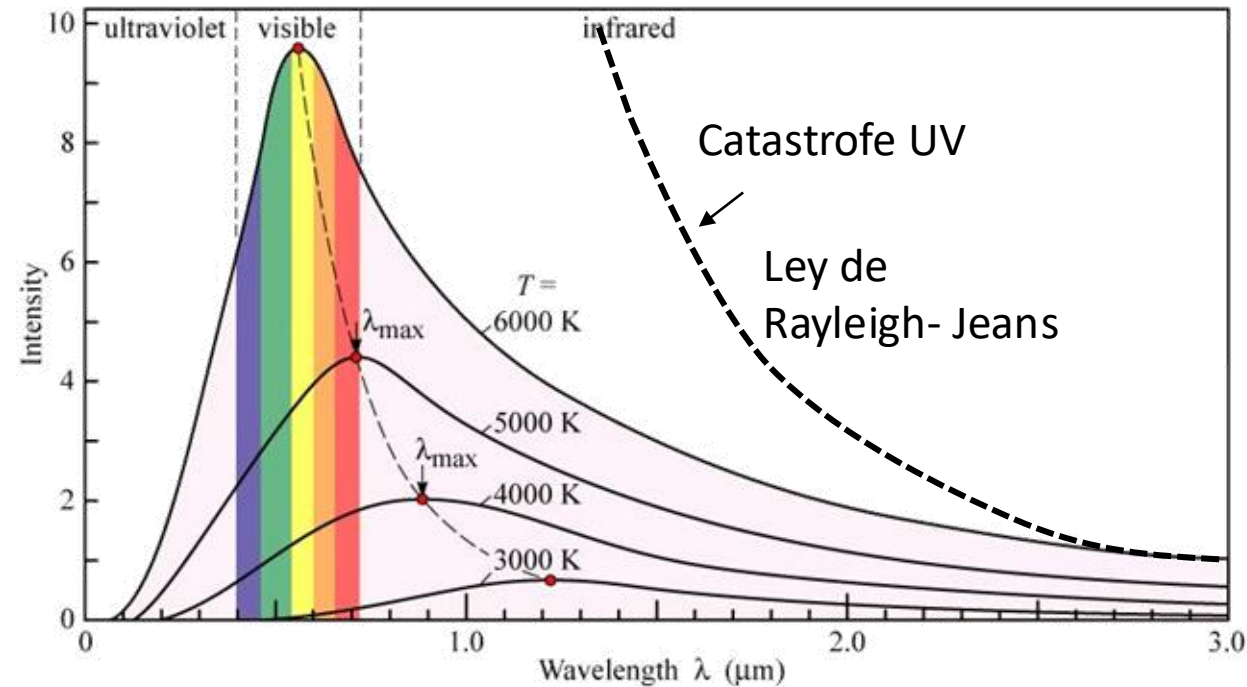
Densidad de energía media radiada (energía/volumen) (dentro de la cavidad), con frecuencias en ν , $\nu + d\nu$

$$u(\nu) = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3} \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_bT}\right) - 1\right)}$$

Intensidad de luz emitida en una dirección $I(\nu) = c u(\nu)$ (auxiliar 2)

Intensidad emitida de la cavidad por un agujero unidad en todas las direcciones posibles (auxiliar 3)

$$I_{bb}(\nu) = \frac{u(\nu)c}{4} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_bT}} - 1}$$



Aux 1- ley de Planck: cantidad de modos por energía por modo

Ley de Planck para radiación de cavidades:

Radiación en una cavidad en equilibrio térmico tiene sus energías cuantizadas

Distribución de energía de los modos

$$P(E_n) = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)} = \exp\left(-\frac{nh\nu}{k_B T}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)\right)$$

$$E_n = n h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nota: Planck hablaba de cuantos de energía indivisibles, no de fotones

El modo de frecuencia ν esta ocupado con n fotones

Energía media por modo

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n) = \frac{h\nu}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)}$$

Aux 1- ley de Planck: cantidad de modos por energía por modo

La densidad espectral de energía (energía media radiada por unidad de volumen $u(\nu)$ con frecuencias en $\nu, \nu + d\nu$)

$$u(\nu) = \frac{d\rho(\nu)}{d\nu} \langle E \rangle = \frac{1}{c^3} \frac{8\pi\eta^3\nu^3 h}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)}$$

Número de modos por unidad de volumen con frecuencias $\nu, \nu + d\nu$

$$\frac{d\rho(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\eta^3\nu^2}{c^3}$$

Energía media del modo

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)}$$

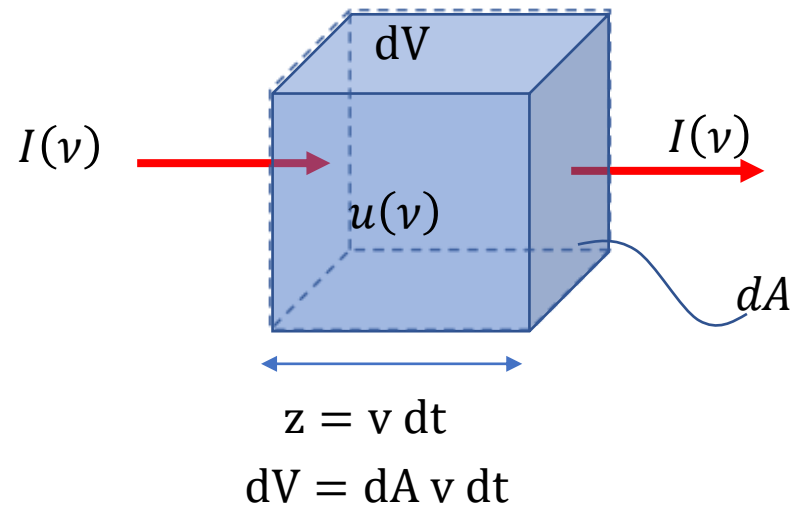
Aux 2: Relación entre $u(\nu)$ e intensidad



Densidad de energía: energía media radiada por unidad de volumen (dentro de la cavidad), con frecuencias en ν , $\nu + d\nu$

$$u(\nu) = \frac{1}{c^3} \frac{8\pi\eta^3\nu^3 h}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)}$$

Cual es la intensidad de luz que sale por un pequeño agujero de una cavidad en donde la densidad de energía es $u(\nu)$



$u(\nu)$ densidad de energía (energía por unidad de volumen y frecuencia dentro de la cavidad)

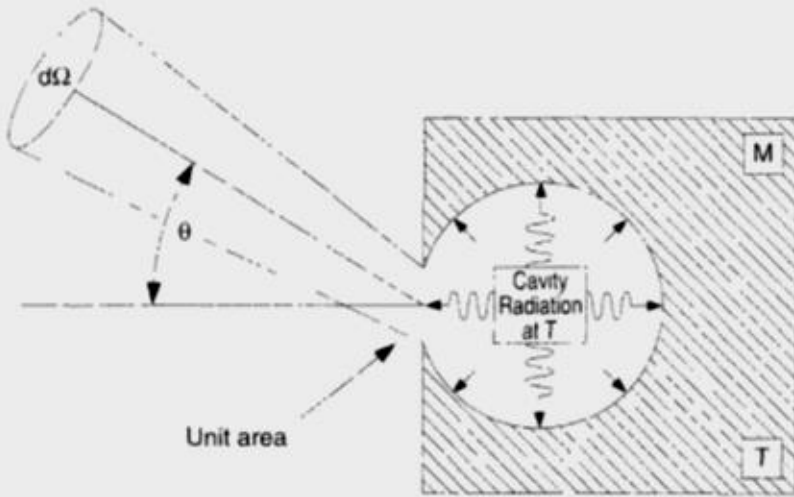
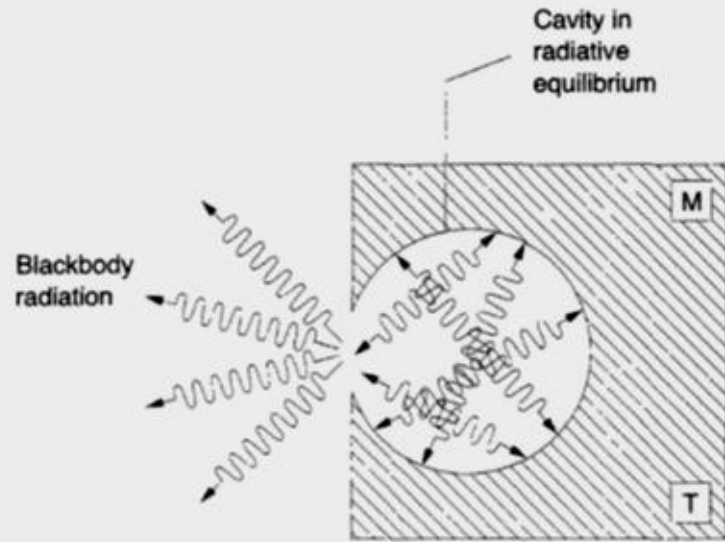
$I(\nu)$ Intensidad: flujo de energía por unidad de área y tiempo que atraviesa el volumen en determinada dirección

energía por u de frecuencia

$$u(\nu) dV = I(\nu) dA dt$$
$$u(\nu) dA \nu dt = I(\nu) dA dt$$

$$I(\nu) = u(\nu) \nu, \quad \nu = c/\eta$$

Intensidad de la radiación del cuerpo negro



La radiación total que sale de la cavidad (en cualquier dirección)
Esta dada por

$$I_{bb}(\nu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I(\nu) \cos(\theta) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\nu) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Ángulo sólido
Proyección del área vista por el observador

Flujo de energía por unidad de área y tiempo en una dirección particular

$$I(\nu) = u(\nu)c$$

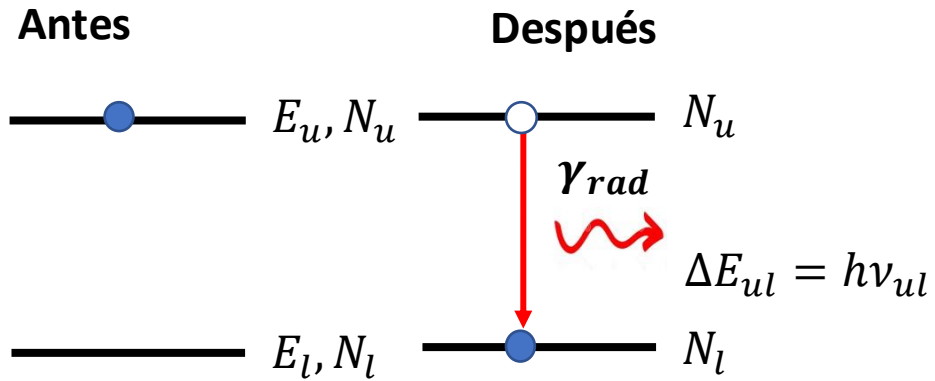
$$I_{bb}(\nu) = \frac{u(\nu)c}{4} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$$

$$I_{bb}(\nu)d\nu = I_{bb}(\nu) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \longrightarrow I_{bb}(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_b T \lambda}} - 1}$$

Emisión espontánea (¡hablamos mucho ya!)



Emisión espontánea: emisión de un fotón por realizar una transición de nivel superior a inferior. La excitación se da por absorción de energía (la excitación no es térmica): fotoluminiscencia, fluorescencia, electroluminiscencia, etc



niveles discretos de energía (átomos, iones en dieléctricos, etc): E_u, E_l

Poblaciones en equilibrio térmico

$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{g_u}{g_l} e^{-(E_u - E_l)/k_B T} = \frac{g_u}{g_l} e^{-\Delta E_{ul}/k_B T}$$

probabilidad de emisión espontánea, tasa de radiativa de decaimiento (#/tiempo)

$$\gamma_u^{rad} = A_{ul}$$

Mecanismos que reducen tiempo de vida

- Desexcitación colisional
- Emisión no radiativa

$$\gamma_u = \gamma_u^{rad} + \gamma_{col} + \gamma_{norad}$$

Número de transiciones radiativas espontáneas $A_{ul}N_u$

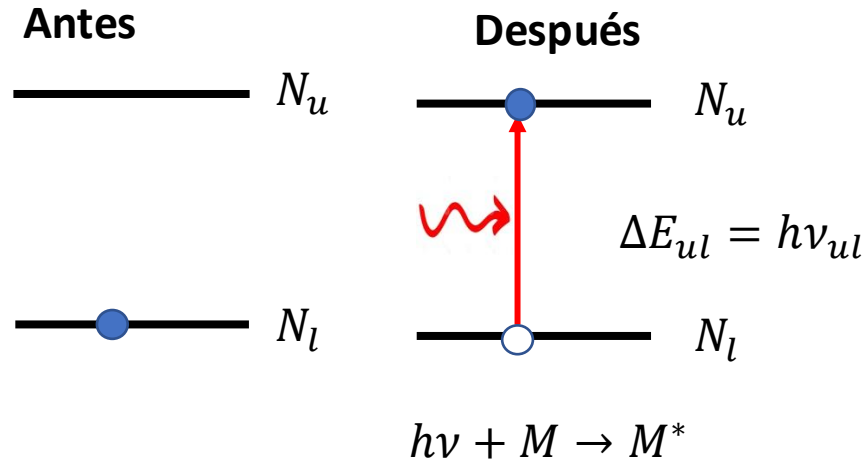
$$\frac{dN_u(t)}{dt} = -\gamma_u N_u(t)$$

$$N_u(t) = N_o e^{-\gamma_u t}$$

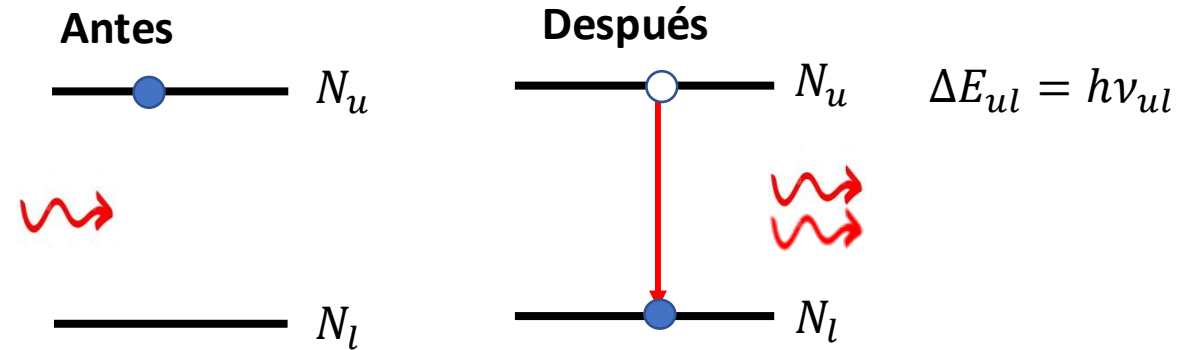
Emisión estimulada y absorción



Absorción



Emisión estimulada



Principio de balance detallado o reversibilidad microscópica

En equilibrio termodinámico, el número de partículas que deja un estado cuántico (por unidad de tiempo) debe ser igual al número de partículas que arriban a ese estado (por unidad de tiempo)

Si $h\nu_{ul} + M \rightarrow M^* \quad \Rightarrow \quad M^* + h\nu \rightarrow M + 2 h\nu_{ul}$

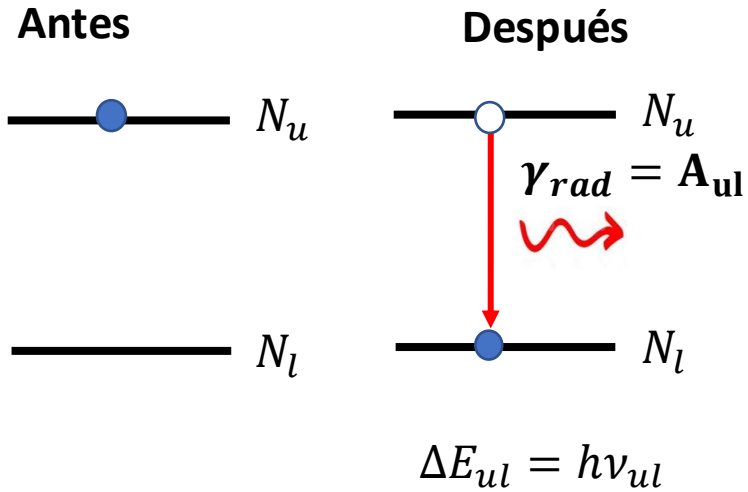
$(E + \Delta E_{ul}) + h\nu \rightarrow E + 2 h\nu$

El segundo fotón surge del decaimiento del sistema excitado

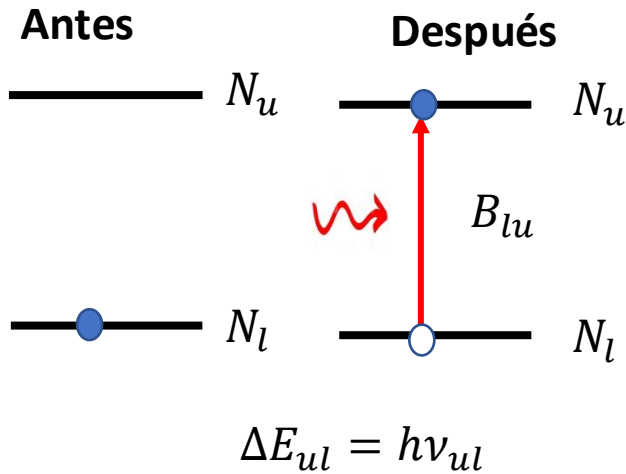
Radiación en equilibrio térmico



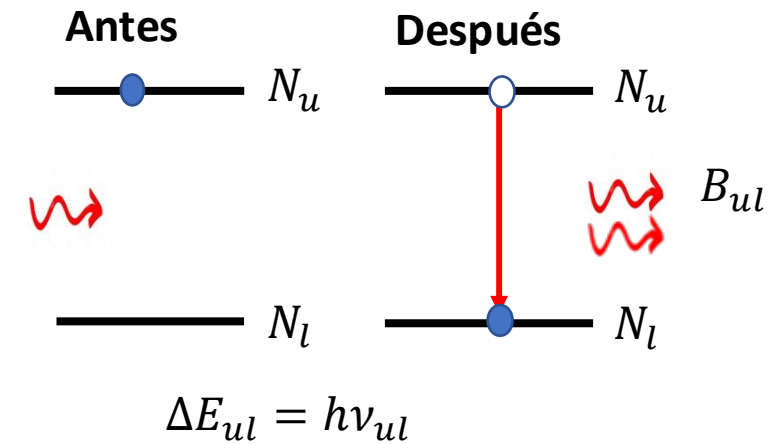
Emisión espontánea



Absorción estimulada



Emisión estimulada



El fotón emitido tiene las mismas características que el incidente

- Energía
- Momento (dirección y fase)
- Polarización

Los 3 procesos ocurren en equilibrio térmico, entonces sus tasas (coeficientes de Einstein) están relacionadas a través de la ley de Planck

Radiación en equilibrio térmico



N átomos **en equilibrio térmico**, con niveles de energía ocupados E_u, E_l ; densidades de población N_u, N_l (átomos/volumen); pesos estadísticos g_u, g_l

$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{g_u}{g_l} e^{-(E_u - E_l)/k_b T} = \frac{g_u}{g_l} e^{-\Delta E_{ul}/k_b T}$$

N_u, N_l en equilibrio térmico radiativo, y para que valga el principio de balance detallado

$$N_u A_{ul} + N_u B_{ul} u(\nu) = N_l B_{lu} u(\nu)$$



Procesos que llenan N_u



Procesos que vacían N_u

Número de transiciones radiativas por emisión espontánea
Número de transiciones radiativas por emisión estimulada
Número de transiciones radiativas por absorción estimulada
 $u(\nu)$ densidad de energía del campo electromagnético

A_{ul}, B_{ul}, B_{lu} coeficientes A y B de Einstein

Radiación en equilibrio térmico

$$N_u A_{ul} + N_u B_{ul} u(\nu) = N_l B_{lu} u(\nu)$$

$$N_u A_{ul} = (N_l B_{lu} - N_u B_{ul}) u(\nu)$$

$$u(\nu) = \frac{N_u A_{ul}}{N_l B_{lu} - N_u B_{ul}} = \frac{A_{ul}}{B_{ul}} \frac{1}{\frac{N_l}{N_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{g_u}{g_l} e^{-\Delta E_{ul}/k_B T}$$

densidad de energía de Planck

$$u(\nu) = \frac{A_{ul}}{B_{ul}} \frac{1}{\left(\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} \right) \exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{k_B T}\right) - 1} = \frac{8\pi\eta^3 \nu^3 h}{c^3} \frac{1}{\left(1 \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right)}$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3 \nu^3 h}{c^3}$$

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}$$

Einstein no calcula la radiación: usa la radiación de Planck para fijar cómo interactúa la radiación con la

Perfil de línea Lorentziano


$$A_{ul}(\nu) = \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2} A_{ul}$$
$$\int_0^\infty A_{ul}(\nu) d\nu = A_{ul}$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3 h}{c^3}$$

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}$$

Coeficientes de Einstein totales

Defino por analogía

$$B_{ul}(\nu) = \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2} B_{ul}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{ul}}{B_{ul}} \equiv \frac{8\pi\eta^3\nu^3 h}{c^3} = \frac{A_{ul}(\nu)}{B_{ul}(\nu)}$$

$$\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} = 1 = \frac{g_l B_{lu}(\nu)}{g_u B_{ul}(\nu)}$$

Coeficientes de Einstein dependientes de la frecuencia

Relación entre emisión estimulada y espontánea

$$\frac{B_{ul} u(\nu)}{A_{ul}} = \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}$$

* Domina la emisión espontánea

$$\frac{h\nu}{k_B T} \gg 1 \quad \begin{array}{l} h\nu \sim 2.5 \text{ eV (496 nm)} \\ k_B T \sim 0.026 \text{ eV (300K)} \end{array}$$

* Domina la emisión estimulada si

$$\frac{h\nu}{k_B T} \lesssim 1 \quad \begin{array}{l} h\nu \sim 2.5 \text{ eV (496 nm)} \\ k_B T \sim 2.9 \text{ eV (33500K)} \end{array}$$

Ejemplos: estrellas, plasmas de alta densidad y alta temperatura, en láseres, microondas / radio

Plasmas de baja densidad, la radiación se escapa antes de acumular un valor suficiente como para que estimulada $\sim$ espontánea

En láseres, estimulada $\gg$ espontánea en una situación fuera del equilibrio

 Planck: densidad de energía

$$u(\nu) = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3}$$

Relación entre emisión estimulada y espontánea

$$\frac{B_{ul} u(\nu)}{A_{ul}} = \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}$$

* Domina la emisión espontánea

$$\frac{h\nu}{k_B T} \gg 1 \quad \begin{array}{l} h\nu \sim 2.5 \text{ eV (496 nm)} \\ k_B T \sim 0.026 \text{ eV (300K)} \end{array}$$

* Domina la emisión estimulada si

$$\frac{h\nu}{k_B T} \lesssim 1 \quad \begin{array}{l} h\nu \sim 2.5 \text{ eV (496 nm)} \\ k_B T \sim 2.9 \text{ eV (33500K)} \end{array}$$

 Planck: densidad de energía

$$u(\nu) = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}$$

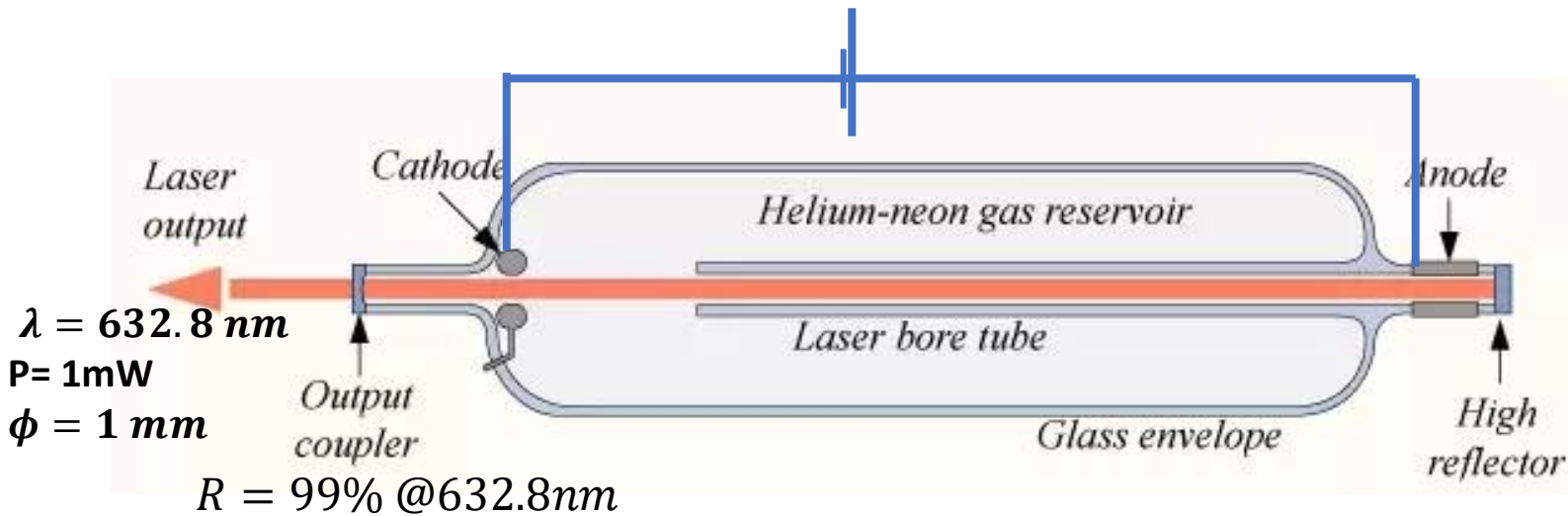
$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3}$$

En equilibrio térmico, la emisión estimulada solo es significativa si $h\nu \lesssim k_B T$, lo que en el visible requiere temperaturas muy altas. En láseres, en cambio, la emisión estimulada domina fuera del equilibrio, gracias al bombeo, la inversión de población y la cavidad óptica.

Ejemplo: Laser de He:Ne



Relación entre emisión estimulada y espontánea



Cuan efectiva es la emisión estimulada?

$$\frac{B_{ul} u(\nu)}{A_{ul}} = \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

$$\begin{aligned} c &= 3 \times 10^8 \text{ m/s} \\ h &= 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \nu_{ul}^{eff} &= \frac{\Delta \nu_{ul}^D}{10} \\ &= 1.5 \times 10^8 \text{ Hz} \\ \nu &= \frac{c}{\lambda} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3} = 6.57 \times 10^{-14} \text{ Js/m}^3$$

Como calcular $u(\nu)$?

$u(\nu)$ energía por unidad de volumen y frecuencia

$$u(\nu) = \frac{I(\nu)}{c} \sim \frac{I}{c \Delta \nu}$$

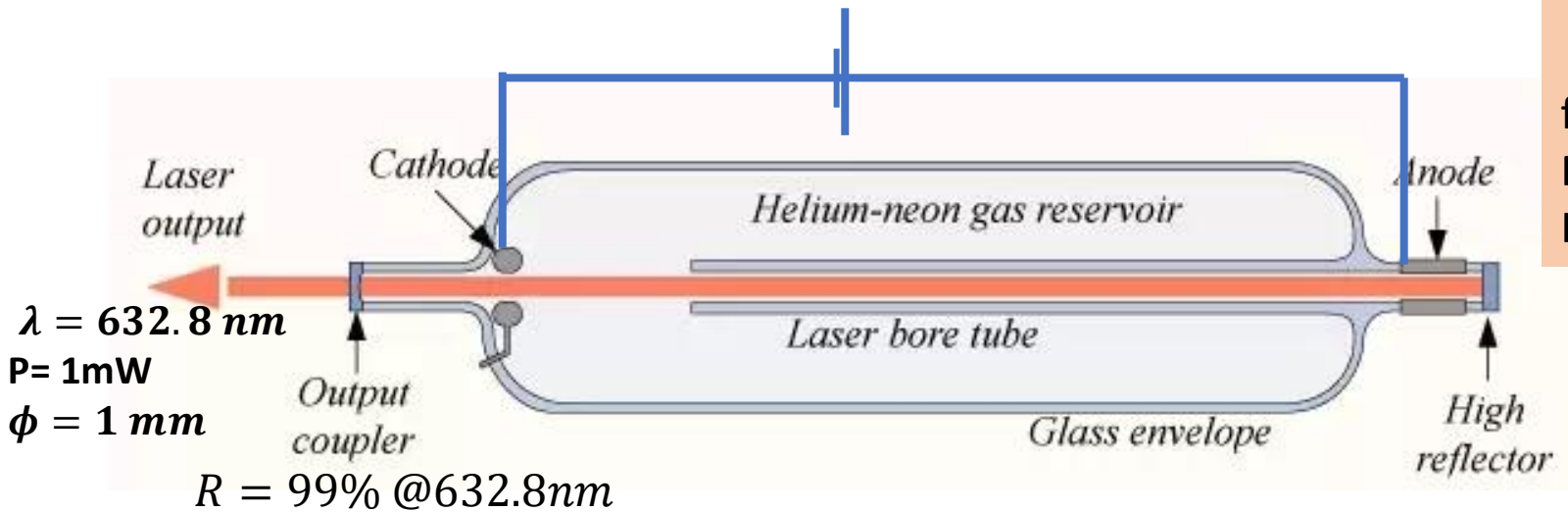
P= energía por unidad de tiempo **(DATO)**

I= flujo de energía por unidad de tiempo y área

Ejemplo: Laser de He:Ne



Relación entre emisión estimulada y espontánea



Como calcular $u(\nu)$?

$u(\nu) \sim \frac{I}{c \Delta \nu}$ energía por unidad de volumen y frecuencia

P = energía por unidad de tiempo **(DATO)**

I = flujo de energía por unidad de tiempo y área

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$
$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$$
$$\eta = 1$$

Potencia e intensidad

$P = 1 \text{ mW}$ (output)

Potencia intra-cavidad,

$$R = 99\% @632.8 \text{ nm} \Rightarrow T = 1\% @632.8 \text{ nm}$$

$$I^{\text{out}} = I^{\text{in}}/100$$

$$P^{\text{in}} = 100 P^{\text{out}} = 100 \text{ mW}$$

$$I = \frac{P}{A} = \frac{100 \text{ mW}}{\pi (0.5)^2 \text{ mm}^2} \sim 1.27 \times 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ejemplo: Laser de He:Ne

$$I \sim u(\nu) c \Delta \nu$$

$$\Delta \nu_{ul}^{eff} = \frac{\Delta \nu_{ul}^D}{10}$$

$$= 1.5 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$u(\nu) = \frac{I}{c \Delta \nu} = \frac{1.27 \times 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(1.5 \times 10^8 \text{ Hz})} = 2.8 \times 10^{-12} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{ Hz}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{ul}}{B_{ul}} &= 6.57 \times 10^{-14} \text{ Js/m}^3 \\ u(\nu) &= 2.8 \times 10^{-12} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{ Hz}} \end{aligned} \right\} \frac{B_{ul} u(\nu)}{A_{ul}} = 42.6 = \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

$T_{BB} = 982000 \text{ K}$ El laser de HeNe emite en $\Delta \nu$ la misma potencia que emitiría un BB a esa temperatura (No es la temperatura real del HeNe)

Es toda la radiación que emitiría un plasma en una única dirección

Como calcular $u(\nu)$?

$u(\nu) \sim \frac{I}{c \Delta \nu}$ energía por unidad de volumen y frecuencia

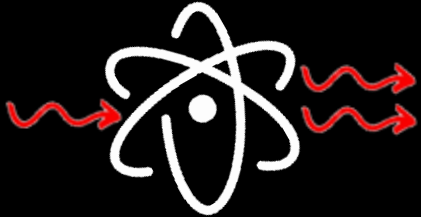
P= energía por unidad de tiempo **(DATO)**

I= flujo de energía por unidad de tiempo y área

Cuán efectiva es la emisión estimulada?

$$\frac{B_{ul} u(\nu)}{A_{ul}} = \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

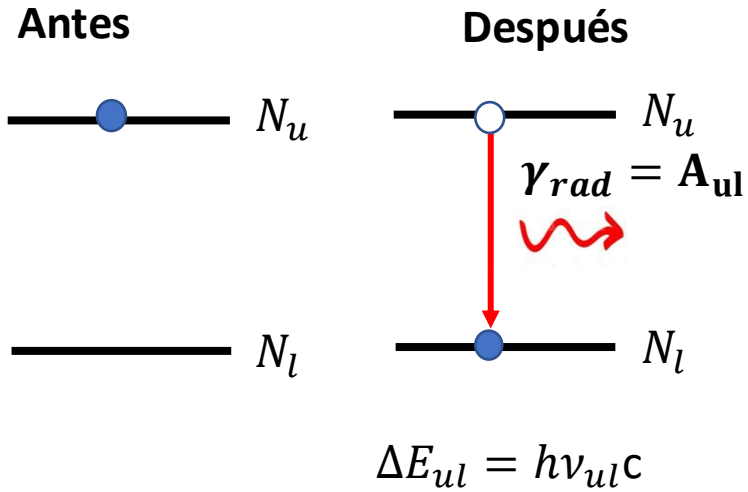
- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

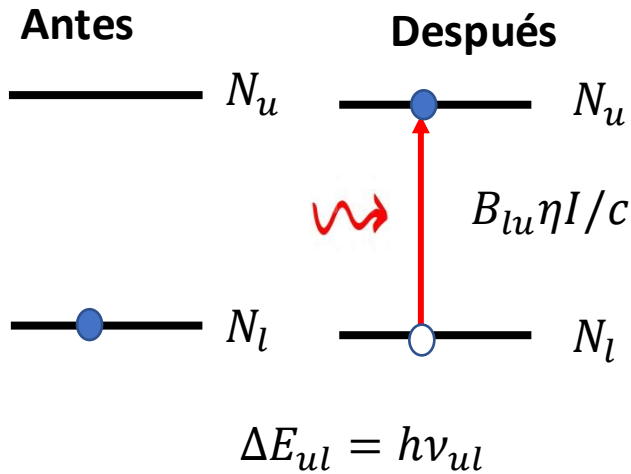
Repaso: radiación en equilibrio termodinámico



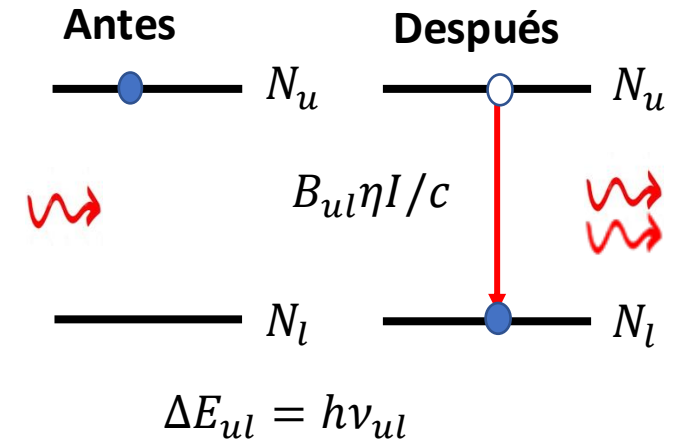
Emisión espontánea



Absorción estimulada



Emisión estimulada



$$\frac{A_{ul}(\nu)}{B_{ul}(\nu)} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3}$$

$$g_l B_{lu}(\nu) = g_u B_{ul}(\nu)$$

Coefficientes A B de Einstein

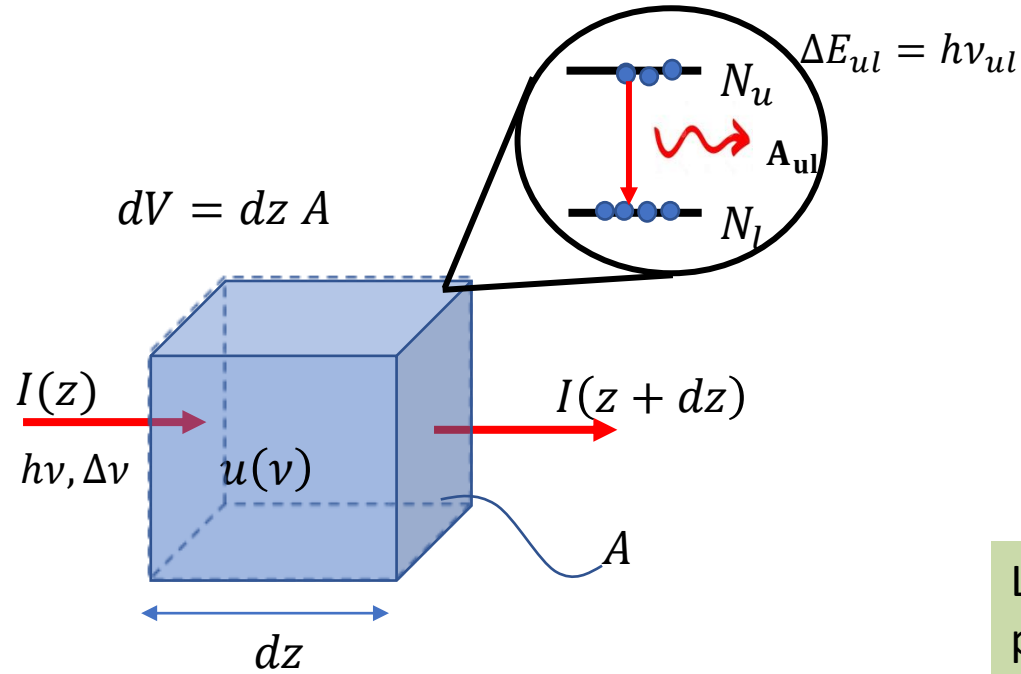
- Interacción de luz con dos niveles de energía
- La frecuencia de la radiación coincide con la frecuencia de la transición
- Equilibrio termodinámico

$$\Delta E_{ul} = h\nu_{ul}$$

Comenzamos el curso diciendo que el laser es amplificación por emisión estimulada
Veamos como se obtiene ganancia óptica (amplificación)

Comenzamos el curso diciendo que el laser es amplificación por emisión estimulada
Veamos como se obtiene ganancia óptica (amplificación)!

Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)



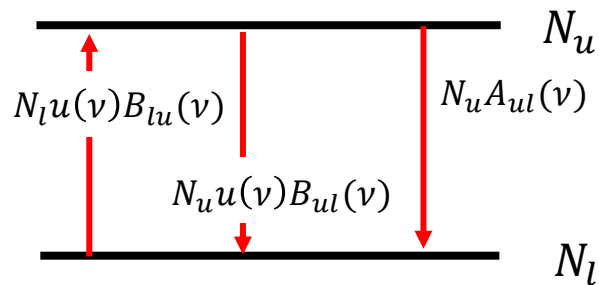
Como cambia I al atravesar un medio con niveles poblados N_u, N_l

$$I = I(\nu)\Delta\nu$$

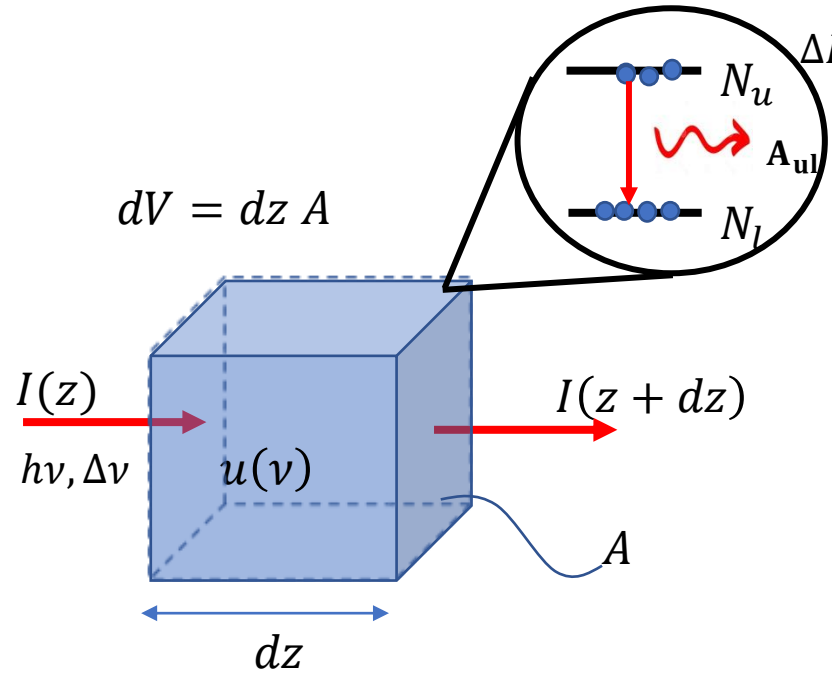
$h\nu$ de la fuente se encuentra dentro del ancho de línea de la transición $\Delta\nu_{ul}$

$N_u(N_l)$ número total de átomos por unidad de volumen en los niveles u, l

La variación de energía en el volumen por unidad de tiempo debe ser proporcional al balance de transiciones radiativas



Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)



Como cambia I al atravesar un medio con niveles poblados N_u, N_l

Número de transiciones espontáneas entre los dos niveles

$N_u A_{ul}(\nu) \rightarrow$ número de transiciones por unidad de vol y tiempo a frecuencia ν

$N_u A_{ul}(\nu) \Delta \nu \rightarrow$ número total de transiciones por unidad de vol y tiempo

$N_u A_{ul}(\nu)$ emisión en $4\pi \rightarrow$ despreciable en la dirección de propagación

Número de transiciones estimuladas entre los dos niveles

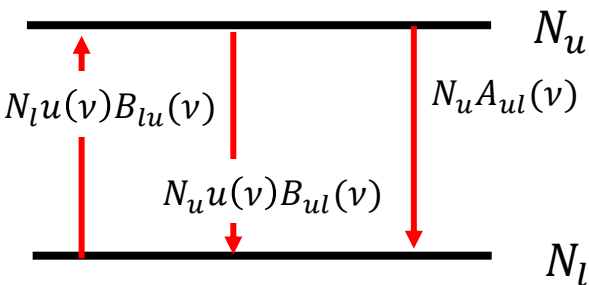
número de transiciones por unidad de vol y tiempo para

Emisión estimulada

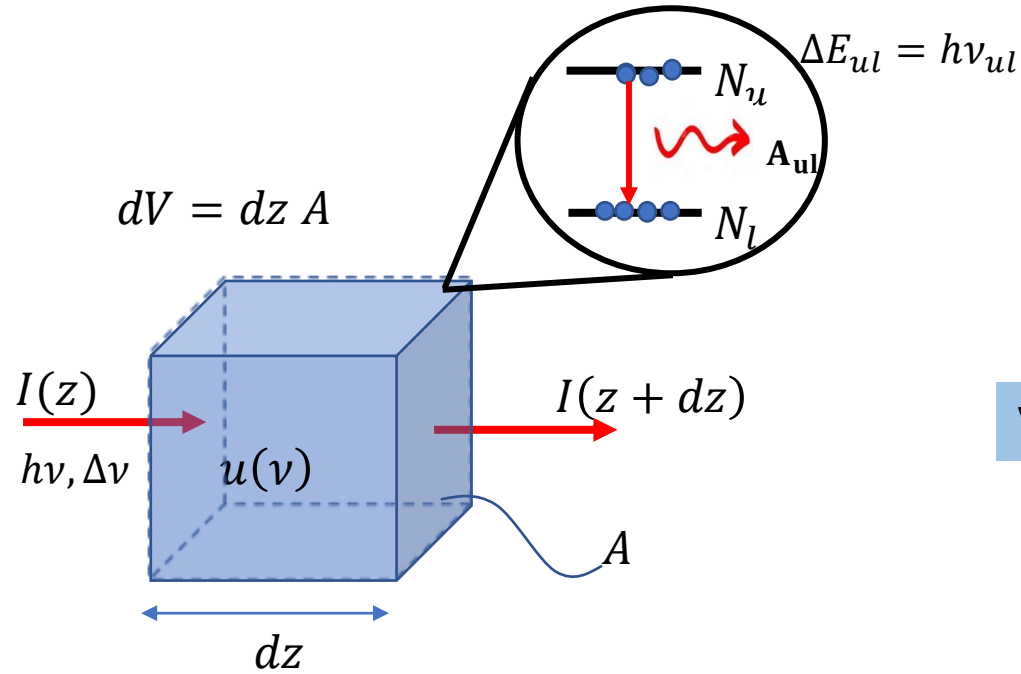
$$N_u B_{ul}(\nu) u(\nu) \Delta \nu = N_u B_{ul}(\nu) \frac{\eta}{c} I(\nu) \Delta \nu = N_u B_{ul}(\nu) \frac{\eta}{c} I$$

Absorción estimulada

$$N_l B_{lu}(\nu) u(\nu) \Delta \nu = N_l B_{lu}(\nu) \frac{\eta}{c} I(\nu) = N_l B_{lu}(\nu) \frac{\eta}{c} I$$



Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)

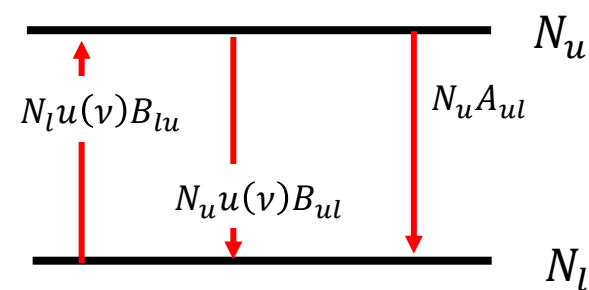


Como cambia I al atravesar un medio con niveles poblados N_u, N_l

La variación de energía del haz por unidad de tiempo está dada por el balance entre emisión estimulada y absorción estimulada.

Variación de energía por unidad de tiempo

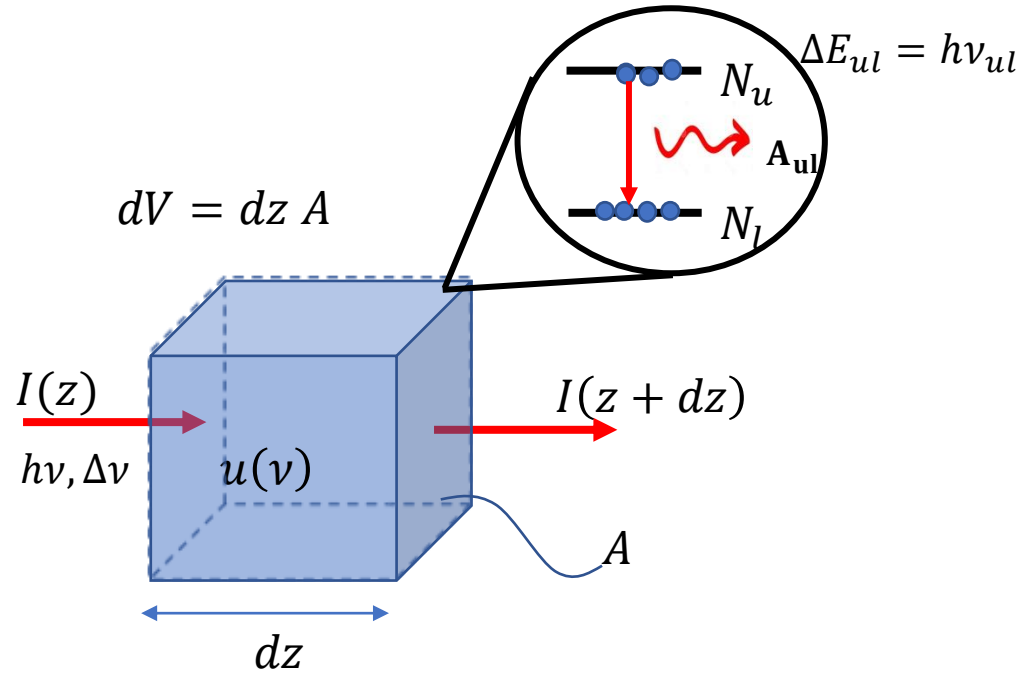
Balance de transiciones estimuladas por unidad de volumen y tiempo
 + emisión estimulada (agrega fotones al haz)
 - Absorción estimulada (remueve fotones del haz)



$$(I(z + dz) - I(z))A = [N_u I B_{ul}(\nu) - N_l I B_{lu}(\nu)] \frac{\eta}{c} h\nu A dz$$

Energía por unidad de volumen y tiempo

Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)

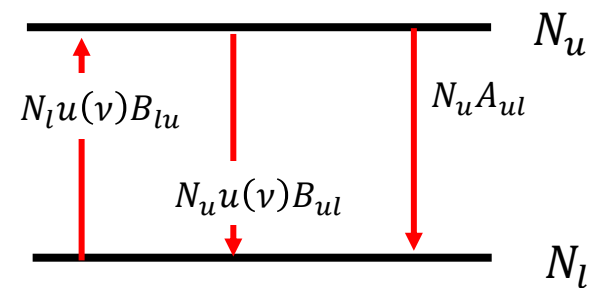


Como cambia I al atravesar un medio con niveles poblados N_u, N_l

Variación de energía por unidad de tiempo

$$(I(z + dz) - I(z))A = [N_u B_{ul}(\nu) - N_l B_{lu}(\nu)] \frac{\eta}{c} I h\nu A dz$$

$$\frac{dI}{dz} = [N_u B_{ul}(\nu) - N_l B_{lu}(\nu)] \frac{\eta h\nu}{c} I = g^H(\nu) I$$

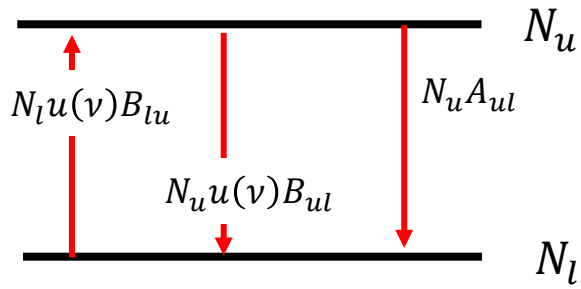


$$I(z) = I_o e^{g^H(\nu)z}$$

$$g^H(\nu) = [N_u B_{ul}(\nu) - N_l B_{lu}(\nu)] \frac{\eta h\nu}{c}$$

Que significa $g^H(\nu)$ positivo o negativo?

Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)



$$g^H(\nu) = [N_u B_{ul}(\nu) - N_l B_{lu}(\nu)] \frac{\eta h \nu}{c} = \left[N_u - N_l \frac{B_{lu}(\nu)}{B_{ul}(\nu)} \right] \frac{\eta h \nu}{c} B_{ul}(\nu)$$

$$\frac{A_{ul}(\nu)}{B_{ul}(\nu)} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3 h}{c^3}$$

$$g_l B_{lu}(\nu) = g_u B_{ul}(\nu)$$

$$B_{ul}(\nu) = \frac{c^3}{8\pi\eta^3\nu^3 h} A_{ul}(\nu)$$

$$\frac{B_{lu}(\nu)}{B_{ul}(\nu)} = \frac{g_u}{g_l}$$

$$g^H(\nu) = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} A_{ul}(\nu)$$

Para el caso de ensanchamiento homogéneo

Probabilidad de transición radiativa entre los niveles u y l

$$A_{ul}(\nu) = \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2} A_{ul}$$

$$g^H(\nu) = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi}\right)^2} A_{ul}$$

Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)



$$g^H(\nu) = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi} \right)^2} A_{ul}$$

Diferencia de población

$$\Delta N_{ul} = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right]$$

$$[\Delta N_{ul}] = 1/L^3$$

Sección eficaz de emisión estimulada

$$\sigma_{ul}^H(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} A_{ul}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi} \right)^2} A_{ul}$$

$$[\sigma_{ul}^H] = L^2$$

$$\sigma_{ul}^H > 0$$

$$g^H(\nu) = \Delta N_{ul} \sigma_{ul}^2$$

$$I(z) = I_o e^{g^H(\nu)z}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta N_{ul} < 0 & \begin{array}{l} I(z) \text{ decrece, el campo se absorbe} \\ \text{Ley de Beer- Lambert} \\ g^H(\nu) = -\alpha(\nu) \text{ coef. de absorción} \end{array} \\ \Delta N_{ul} > 0 & I(z) \text{ crece, el campo se amplifica} \end{array} \right.$$

CONDICIÓN NECESARIA PARA ACCIÓN LASER

Para obtener **ganancia** óptica- condición necesaria para la emisión laser- se necesita **inversión de población** $\Delta N_{ul} > 0$

Absorción y Ganancia (ensanchamiento homogéneo)



$$g^H(\nu) = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi} \right)^2} A_{ul}$$

Diferencia de población

$$\Delta N_{ul} = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right]$$

$$[\Delta N_{ul}] = 1/L^3$$

Sección eficaz de emisión estimulada

$$\sigma_{ul}^H(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} A_{ul}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} \frac{\gamma_{ul}^T/4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma_{ul}^T}{4\pi} \right)^2} A_{ul}$$

$$[\sigma_{ul}^H] = L^2$$

$$\sigma_{ul}^H > 0$$

ν_o es la frecuencia central de la línea, donde la sección eficaz y la ganancia son máximas.

$$g^H(\nu_o) = g_o^H = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{2\pi\eta^2\nu_o^2} \frac{1}{\gamma_{ul}^T} A_{ul} = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \sigma_{ul}^H(\nu_o)$$

$$\sigma_{ul}^H(\nu_o) = \frac{c^2}{2\pi\eta^2\nu_o^2} \frac{1}{\gamma_{ul}^T} A_{ul} = \sigma_{ul}^o$$

Se suele trabajar con el valor máximo, ya que las condiciones de ganancia, saturación y umbral se alcanzan primero en el centro de la línea, donde $\sigma_{ul}^H(\nu)$ es máxima.

Absorción y ganancia (ensanchamiento no homogéneo)

Consideramos ensanchamiento Doppler: cada átomo emite con su ancho de línea natural, pero la dispersión en velocidades genera un ancho de línea gaussiano, mayor que el ancho de línea natural. Entonces

$$g^D(\nu) = [N_u(\nu)B_{ul} - N_l(\nu)B_{lu}] \frac{\eta h \nu}{c} = \left[N_u(\nu) - N_l(\nu) \frac{g_u}{g_l} \right] \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu^2} A_{ul}$$

$$N_{u/l}(\nu) = 2 \sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi} \frac{N_{u/l}}{\Delta\nu_D}} \exp \left\{ - \left[\frac{4 \ln(2) (\nu - \nu_o)^2}{\Delta\nu_D^2} \right] \right\}$$

Sección eficaz de emisión estimulada

$$g^D(\nu) = \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_D} \frac{c^2}{\eta^2\nu^2}} \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] \exp \left\{ - \left[\frac{4 \ln(2) (\nu - \nu_o)^2}{\Delta\nu_D^2} \right] \right\} = \Delta N_{ul} \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_D} \frac{c^2}{\eta^2\nu^2}} \exp \left\{ - \left[\frac{4 \ln(2) (\nu - \nu_o)^2}{\Delta\nu_D^2} \right] \right\}$$

La ganancia máxima se alcanza en el centro de la línea

$$g^D(\nu_o) = \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_D} \frac{c^2}{\eta^2\nu_o^2}} \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right] = \sigma_{ul}^D(\nu_o) \Delta N_{ul}$$

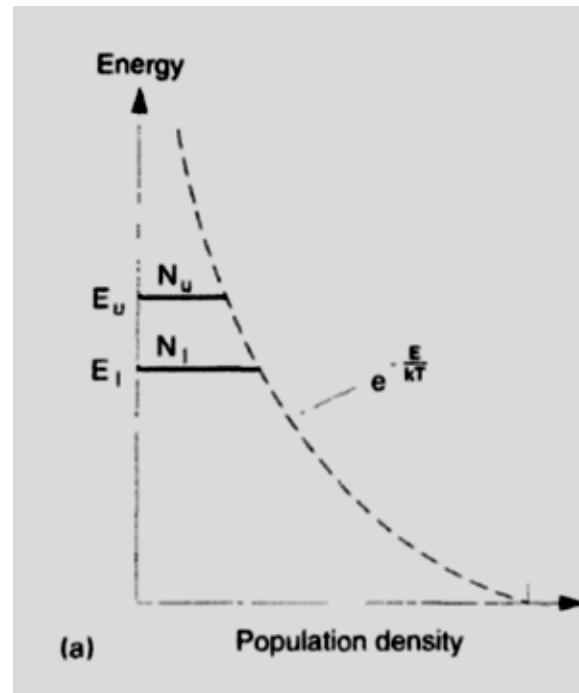
$$\sigma_{ul}^D(\nu_o) = \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_D} \frac{c^2}{\eta^2\nu_o^2}}$$

$$\Delta N_{ul} = \left[N_u - N_l \frac{g_u}{g_l} \right]$$

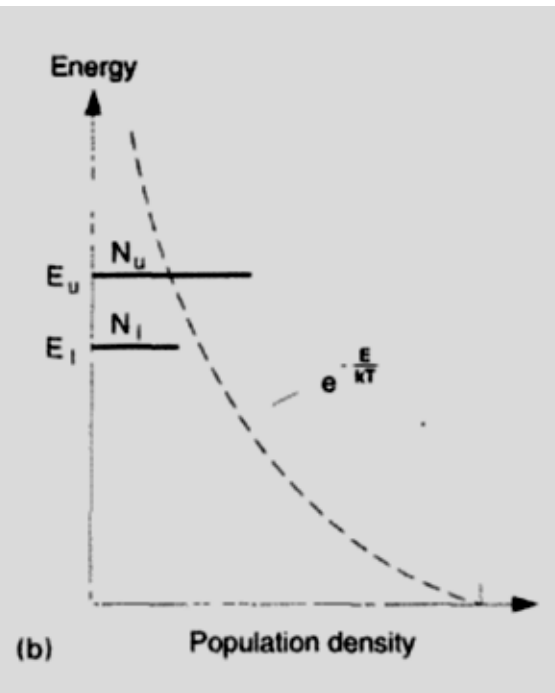
CONDICIÓN NECESARIA PARA ACCIÓN LASER

Para obtener **ganancia** óptica- condición necesaria para la emisión laser- se necesita **inversión de población** $\Delta N_{ul} > 0$

Equilibrio termodinámico



Inversión de población

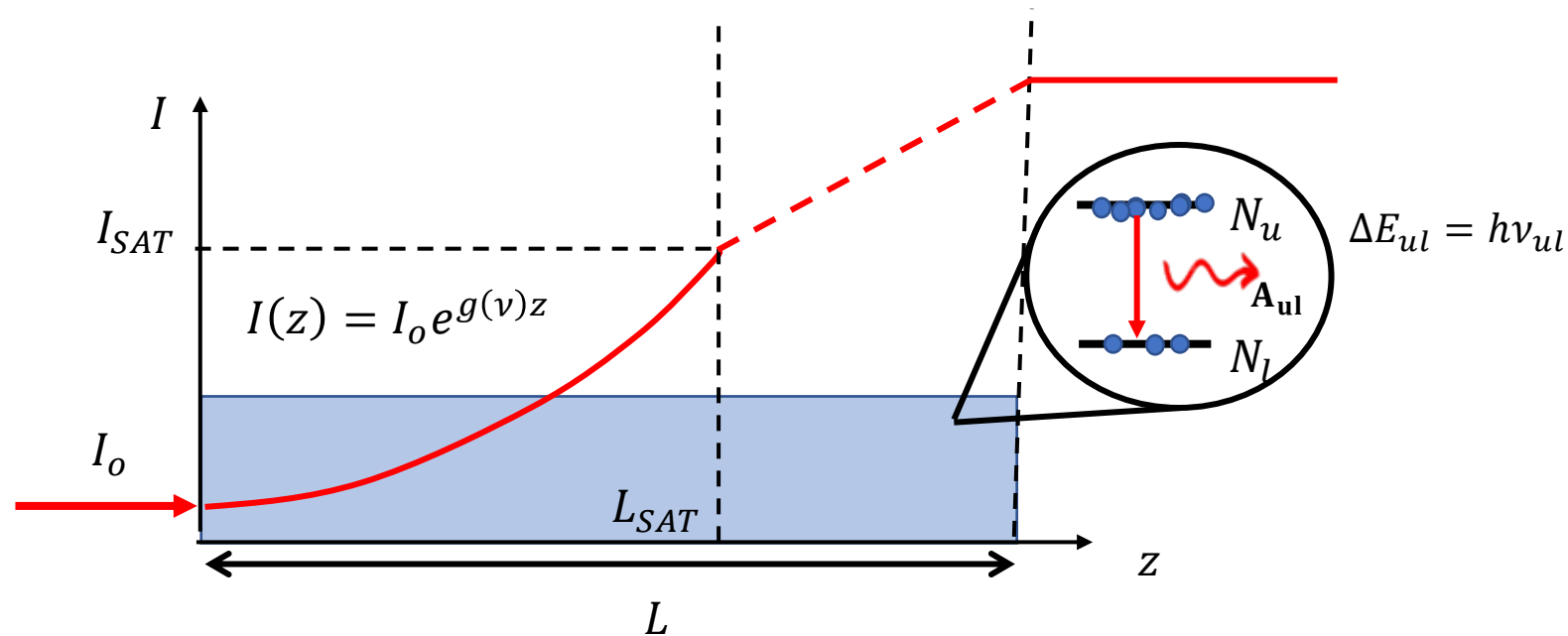


La inversión de población **no se obtiene espontáneamente en equilibrio**, sino que requiere bombeo.

Saturación de la ganancia: límite del crecimiento exponencial

$$I(z) = I_o e^{g(v)z} = I_o e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} z}$$

- Mientras ΔN_{ul} se mantenga aproximadamente constante, es decir, en el régimen de pequeña señal, la intensidad crece exponencialmente.
- El número de fotones aumenta por emisión estimulada, a expensas de la energía almacenada en el nivel superior



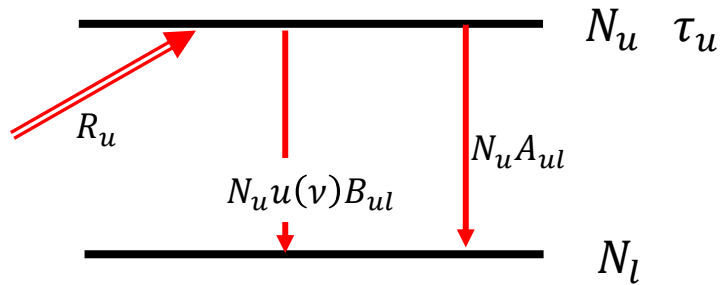
Ganancia de pequeña señal:

el haz se amplifica sin modificar ΔN_{ul} significativamente.

Saturación de la ganancia

Al aumentar I , la emisión estimulada reduce ΔN_{ul} y la ganancia se satura (disminuye respecto al valor de pequeña señal). A partir de I_{SAT} , el crecimiento ya no puede describirse con la exponencial de pequeña señal

Saturación de la ganancia: modelo de poblaciones



Un haz de intensidad $I(\nu)\Delta\nu$ interactúa con un medio con dos niveles

$\Delta N_{ul} > 0 \rightarrow$ sistema fuera del equilibrio

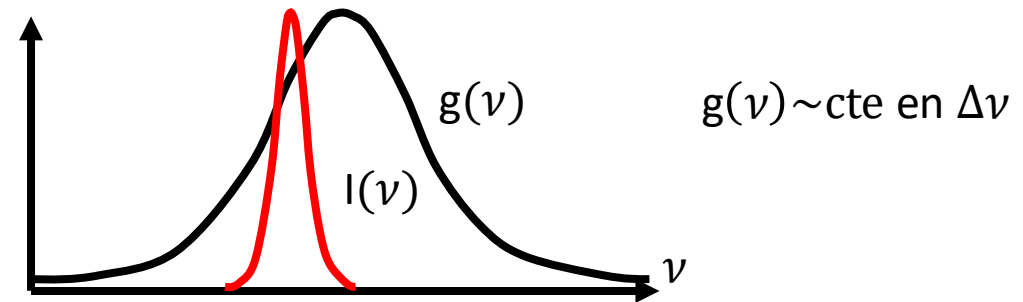
N_u población estacionaria $\frac{dN_u}{dt} = 0$

R_u bombeo puebla N_u : número de excitaciones por volumen y tiempo

$I(\nu)$ induce emisión estimulada

- ν en el ancho de línea $\Delta\nu_{ul}$
- $\Delta\nu \ll \Delta\nu_{ul}$

(sintonizado con la ganancia)



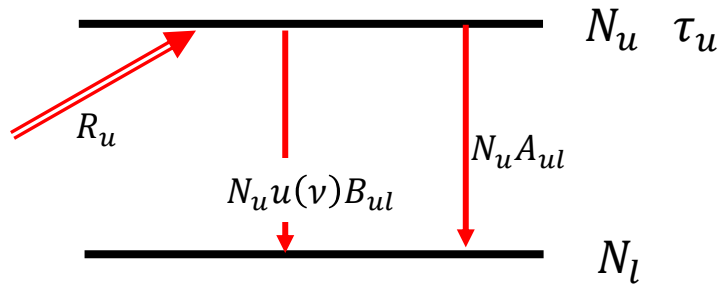
Tasa de emisión estimulada por átomo en la frecuencia ν

$$u(\nu)B_{ul}(\nu)\Delta\nu = \frac{I(\nu)}{c} \eta B_{ul}(\nu)\Delta\nu = \frac{I}{c} \eta B_{ul}(\nu)$$



¡Noten que no dije nada sobre la frecuencia del bombeo!

Saturación de la ganancia: modelo de poblaciones

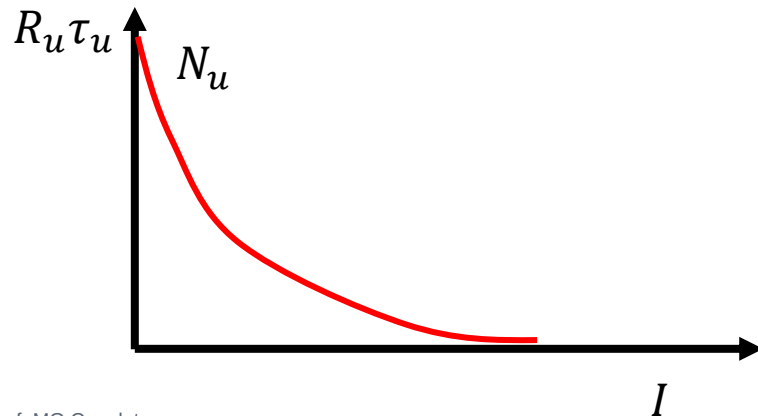


Tasa de emisión estimulada por átomo en la frecuencia ν

$$u(\nu)B_{ul}(\nu)\Delta\nu = \frac{I(\nu)}{c}\eta B_{ul}(\nu)\Delta\nu = \frac{I}{c}\eta B_{ul}(\nu)$$

$$\frac{dN_u}{dt} = 0 = R_u - N_u \left[\frac{1}{\tau_u} + \frac{I}{c}\eta B_{ul}(\nu) \right]$$

$$N_u(I) = \frac{R_u}{\left[\frac{1}{\tau_u} + \frac{I}{c}\eta B_{ul}(\nu) \right]}$$



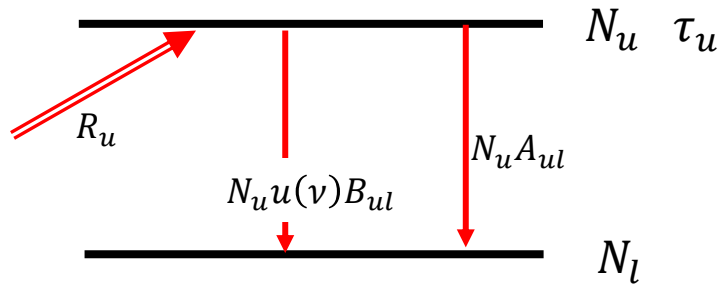
$$N_u(I = 0) = R_u \tau_u$$

(toda la energía suministrada se va en decaimiento espontáneo)

La población estacionaria resulta del balance entre bombeo, decaimiento espontáneo y emisión estimulada.

a mayor intensidad, mayor emisión estimulada, mayor vaciamiento del nivel superior y menor ganancia.

Saturación de la ganancia: Intensidad de saturación



$$I(z) = I_0 e^{g(v)z} = I_0 e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} z}$$

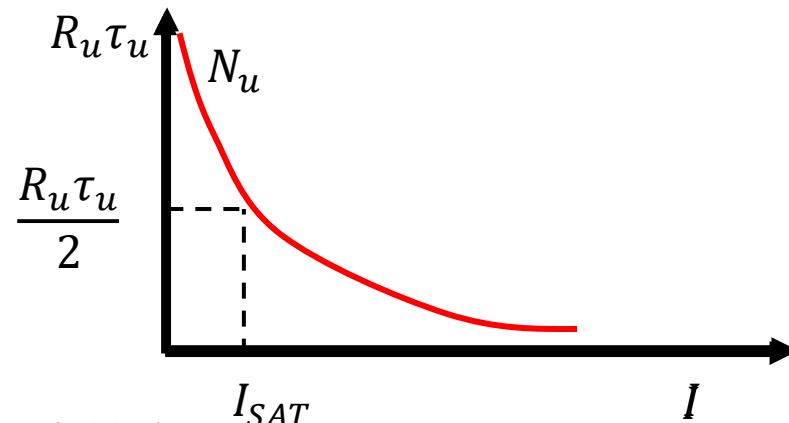
Decrece con el aumento de I

$g(v)$ disminuye con el aumento de la intensidad

A medida que el haz avanza por el medio I crece

$$\frac{dN_u}{dt} = 0 = R_u - N_u \left[\frac{1}{\tau_u} + \frac{I}{c} \eta B_{ul}(v) \right]$$

$$N_u(I) = \frac{R_u}{\left[\frac{1}{\tau_u} + \frac{I}{c} \eta B_{ul}(v) \right]}$$



Definimos I_{SAT} como la intensidad para la cual la tasa de emisión estimulada iguala la tasa de decaimiento $1/\tau_u$.

$$\frac{1}{\tau_u} = \frac{I_{SAT}}{c} \eta B_{ul}(v) \rightarrow$$

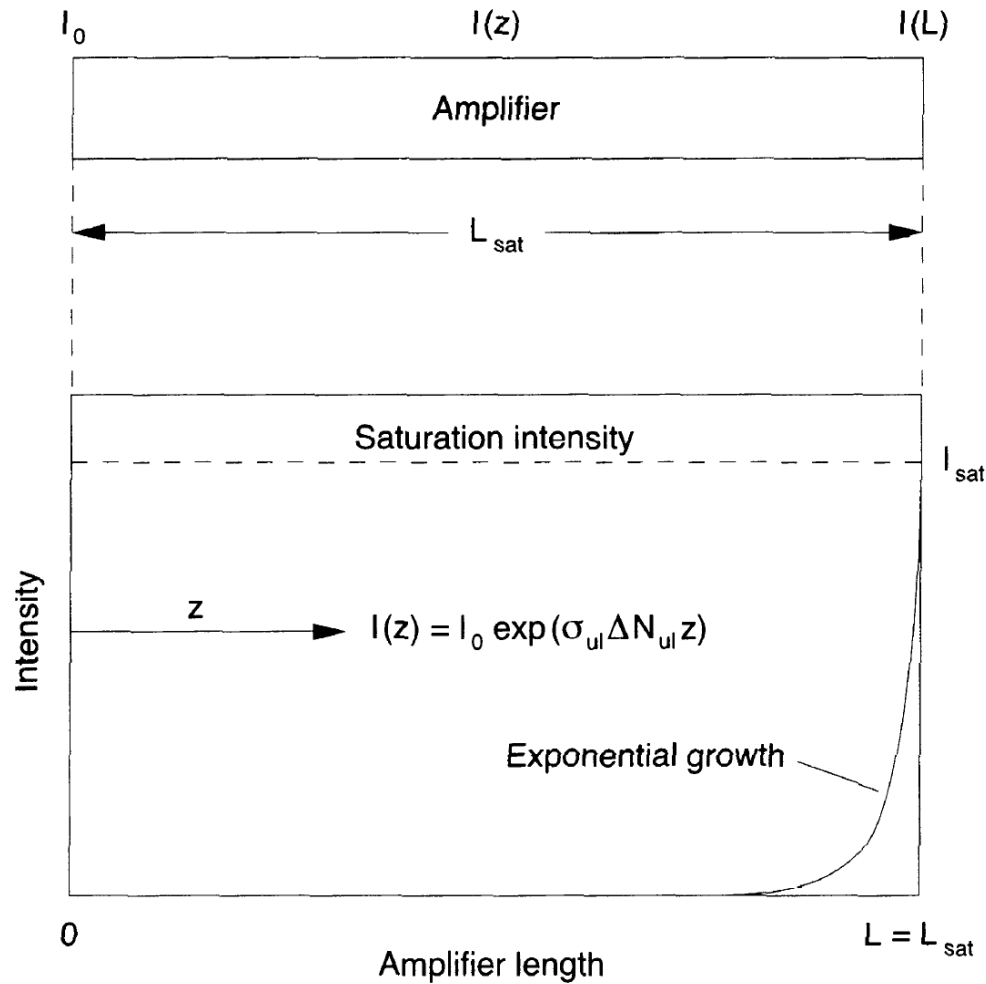
$$I_{SAT} = \frac{c}{\tau_u \eta B_{ul}(v)} = \frac{h\nu}{\tau_u \sigma_{ul}(v)}$$

$$N_u(I_{SAT}) = \frac{R_u \tau_u}{2}$$

$$\tau_u \sim 10^{-3} s \text{ a } 10^{-9} s \Rightarrow A_{ul} \sim \frac{1}{\tau_u} \sim 10^3 / s \text{ a } 10^9 / s$$

La intensidad debe ser suficientemente grande para que la tasa de emisión estimulada sea comparable con $1/\tau_u$.

Saturación de la ganancia: longitud de saturación



Al alcanzar I_{SAT} , la emisión estimulada reduce significativamente N_u . La inversión de población disminuye, la ganancia se satura y el crecimiento deja de seguir la exponencial de pequeña señal. El haz se “lleva” gran parte de la energía almacenada

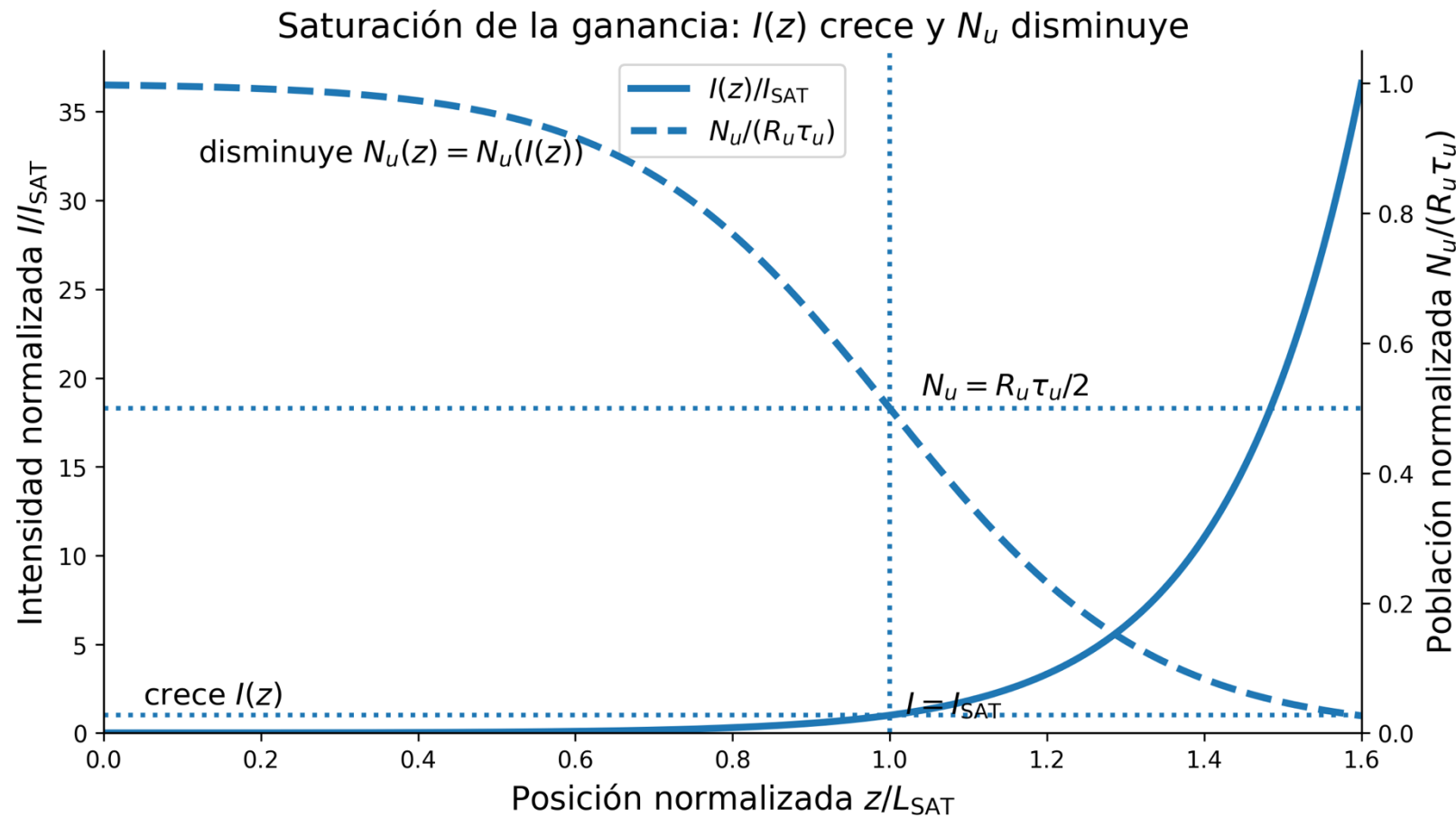
$$I(z) = I_0 e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} z}$$

$$I(L_{SAT}) = I_{SAT} = I_0 e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} L_{SAT}}$$

$$N_u(I_{SAT}) = \frac{R_u \tau_u}{2}$$

$$z > L_{SAT} \Rightarrow I > I_{SAT} \Rightarrow N_u < N_u(I_{SAT})$$

Saturación de la ganancia



$$N_u(I(z)/R_u \tau_u) = \frac{1}{[1 + I(z)/I_{SAT}]}$$

$$I(z)/I_{SAT} = e^{g_{ul}(\frac{z}{L_{SAT}} - 1)}$$

Saturación de la ganancia: intensidad y fluencia de saturación

$$I_{SAT} = \frac{c}{\eta \tau_u B_{ul}(\nu)}$$

$$N_u(I_{SAT}) = \frac{R_u \tau_u}{2}$$

$$B_{ul}(\nu) = \frac{c^3}{8\pi\eta^3\nu_{ul}^3 h} A_{ul}(\nu)$$

$$I_{SAT} = \frac{8\pi\eta^2\nu_{ul}^2 (h\nu_{ul})}{c^2 A_{ul}(\nu) \tau_u} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}^H(\nu)}$$

$$\sigma_{ul}^H(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\eta^2\nu_{ul}^2} A_{ul}(\nu)$$

Laser pulsado $\tau_p < \tau_u$

Fluencia (flujo de energía) de saturación $F_{sat} = I_{SAT} \tau_u = \frac{h\nu_{ul}}{\sigma_{ul}^H(\nu)}$

Ejemplo:

Nd:YAG pulsado

$\tau_u \sim 230 \mu s$

$\tau_p = 10 ns$

$E_{pulso} = 1J$

$I_{pulso} = \frac{E_{pulso}}{A \tau_{pulso}}$

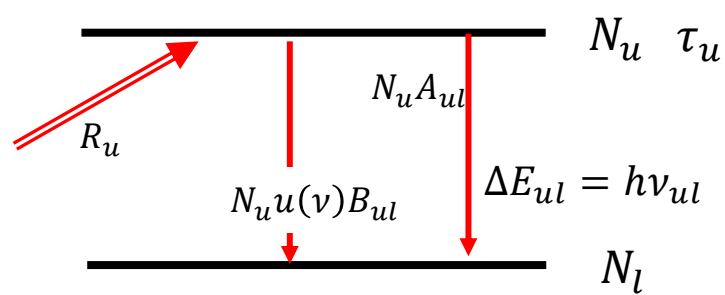
$$F_{pulso} \sim F_{SAT}$$

$$I_{pulso} \tau_{pulso} \sim I_{SAT} \tau_u$$

$$\frac{E_{pulso}}{A} \sim F_{SAT} = I_{SAT} \frac{\tau_u}{\tau_{pulso}}$$

Ajustando el área del modo en el amplificador, puedo hacer que el pulso alcance F_{SAT}

Formación y crecimiento del haz laser - $\Delta\nu_{ul}^H$



HIP1 : El bombeo R_u (la frecuencia no es ν_{ul}) puebla el nivel superior. Los primeros fotones que actúan como semilla provienen de emisión espontánea, con frecuencias dentro del ancho homogéneo $\Delta\nu_{ul}^H$.

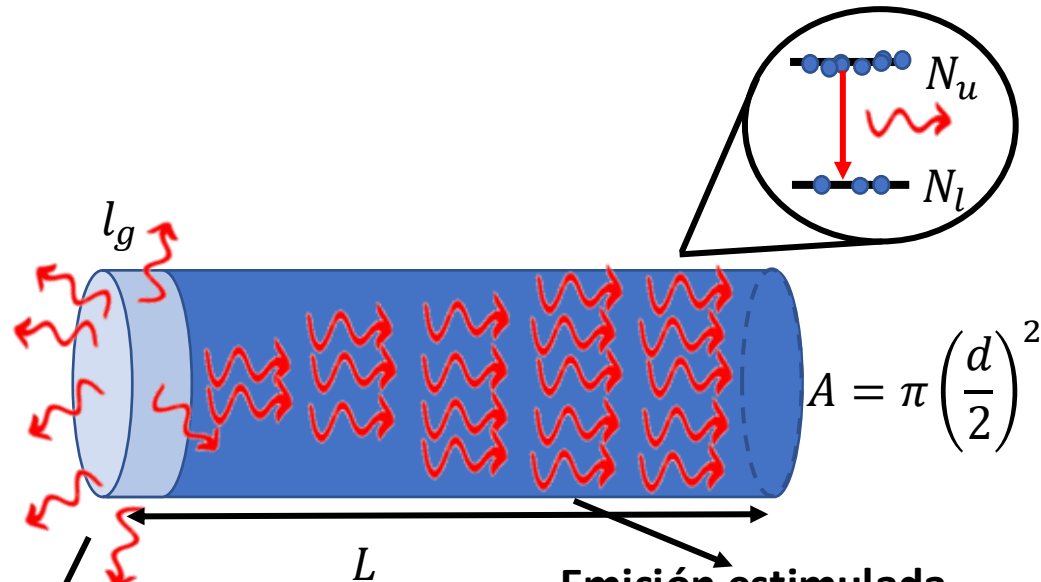
HIP2: Suponemos que $N_u \gg N_l$, $\Delta N_{ul} \sim N_u$ (cota superior)

$$I(z) = I_o e^{\sigma_{ul}^H(\nu) \Delta N_{ul} z} \sim I_o e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u z}$$

HIP3: longitud de ganancia

$$l_g \rightarrow \sigma_{ul}^H(\nu) N_u l_g \sim 1$$

$$l_g \sim \frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u}$$



Emisión estimulada

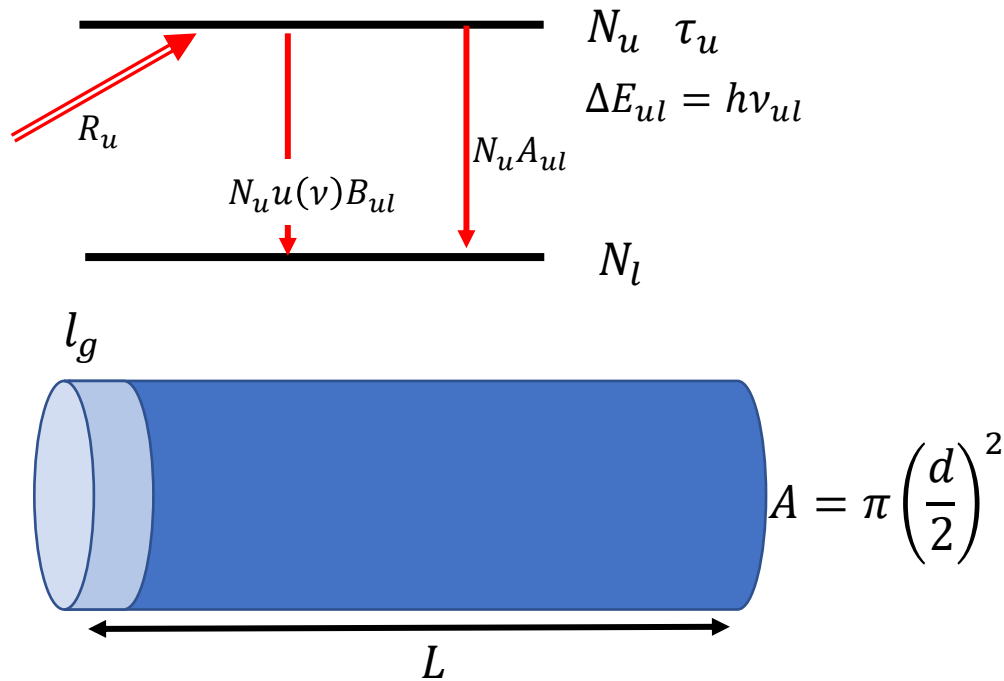
- Conserva energía y momento
- Se amplifica preferentemente en la dirección del eje, donde la longitud de interacción es mayor.

Emisión espontánea

- 4π
- incoherente
- ν_{ul}

Que condición debe cumplir el haz para alcanzar I_{sat} al final del medio activo?

Formación y crecimiento del haz laser - $\Delta\nu_{ul}^H$



Energía radiada por emisión espontánea en 4π del volumen $l_g A$, por unidad de tiempo

$$(N_u A_{ul}) \cdot (A l_g) \cdot h\nu_{ul} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} \frac{1}{A} = I_{SAT} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}^H(\nu)}$$

Fracción de ángulo sólido $d\Omega \sim A/L_{SAT}^2$

Amplificación estimulada

$$I(L) = I_o e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L}$$

$$l_g \sim \frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u}$$

Que condición debe cumplir el haz para alcanzar I_{sat} al final del medio activo (y entonces $L = L_{SAT}$)?

HIP 4: el decaimiento del nivel superior está dominado por esta transición radiativa, de modo que $A_{ul} \simeq 1/\tau_u$.

$$(N_u A_{\text{ut}}) \cdot (A l_g) \cdot \frac{h\nu_{\text{ut}}}{4\pi} \frac{A/L_{SAT}^2}{A} e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} \frac{1}{A} = I_{SAT} = A_{\text{ut}} \frac{h\nu_{\text{ut}}}{\sigma_{ul}^H(\nu)}$$

$$(N_u) \cdot (l_g) \cdot \frac{A/L_{SAT}^2}{4\pi} e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} = \frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu)}$$

$$l_g \sim \frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u} \quad A = \pi d^2/4$$

$$N_{\text{ut}} \left(\frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu) N_{\text{ut}}} \right) \frac{d^2}{16 L_{SAT}^2} e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} = \frac{1}{\sigma_{ul}^H(\nu)}$$

$$\frac{I_{SAT}}{I_o} = e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} = \left(\frac{4 L_{SAT}}{d} \right)^2$$

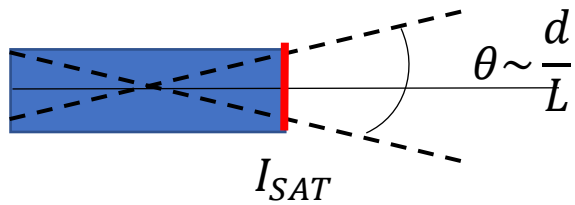
- El factor de amplificación necesario para alcanzar I_{SAT} escala como el cuadrado de la relación de aspecto del amplificador
- Medios largos y angostos favorecen la amplificación direccional.

Formación y crecimiento del haz láser- $\Delta\nu_{ul}^H$



$$\frac{I_{SAT}}{I_o} = e^{g(v)L_{sat}} = e^{\sigma_{ul}^H(v)N_u L_{SAT}} = \left(\frac{4L_{SAT}}{d}\right)^2$$

La ganancia acumulada necesaria para alcanzar la saturación está determinada por la relación de aspecto L_{SAT}/d .

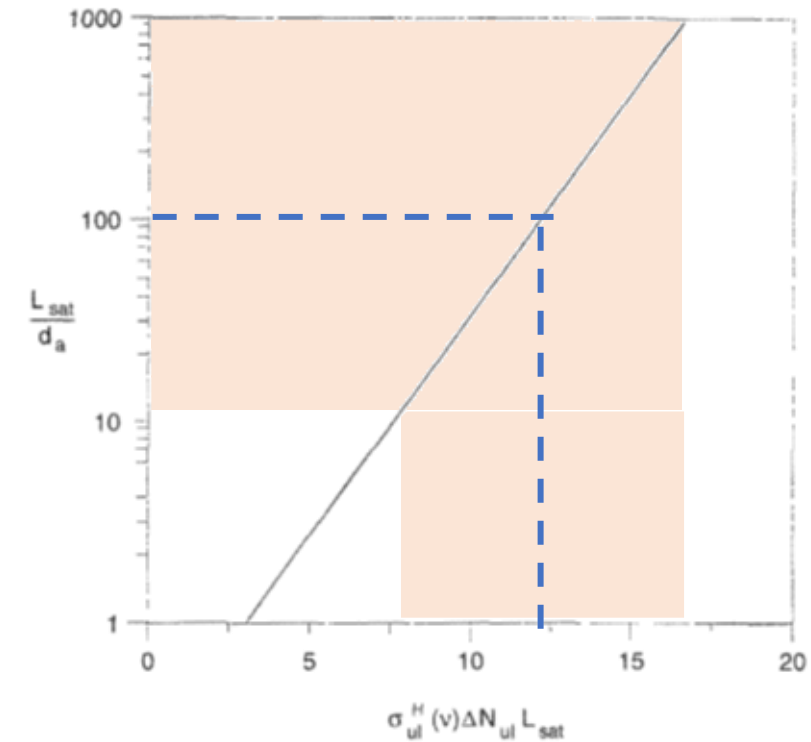


$$\frac{L_{SAT}}{d} = 100$$

$$e^{g(v)L_{sat}} \sim e^{12} \sim 1.6 \times 10^5$$

$$\theta \sim \frac{d}{L_{SAT}} \sim 0.01 \text{ rad}$$

Mucha amplificación con baja divergencia.



Se suele tomar

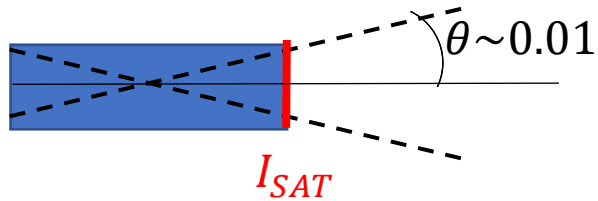
$g(v)L_{sat} = 12 \pm 5$ para estimaciones

Formación y crecimiento del haz láser - $\Delta\nu_{ul}^H$

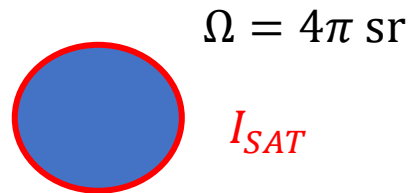


$$\frac{I_{SAT}}{I_o} = e^{g(\nu)L_{sat}} = e^{\sigma_{ul}^H(\nu)N_u L_{SAT}} = \left(\frac{4L_{SAT}}{d}\right)^2$$

La ganancia acumulada necesaria para alcanzar la saturación está determinada por la relación de aspecto L_{SAT}/d .



$$\frac{L_{SAT}}{d} = 100$$



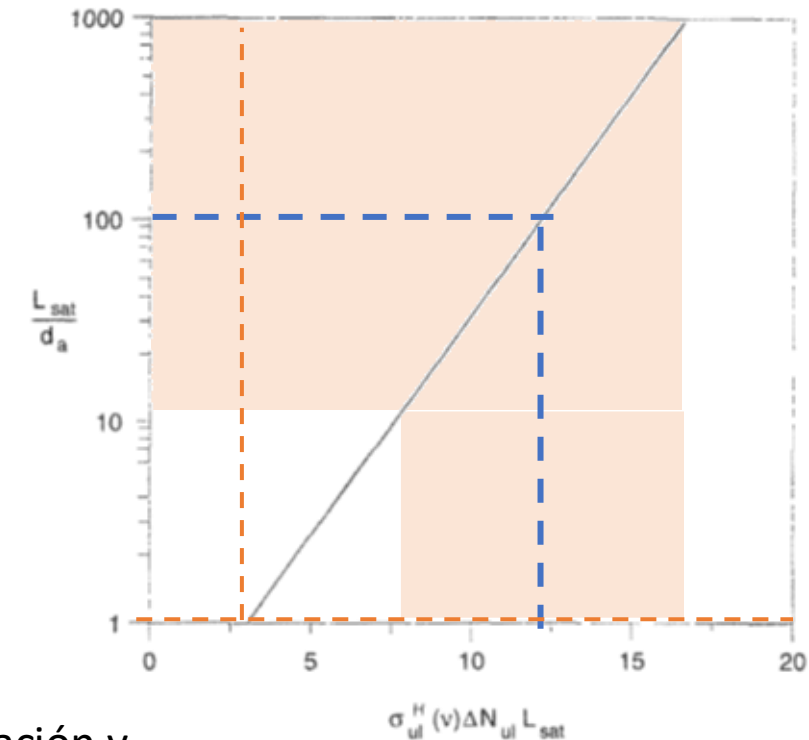
$$\frac{L_{SAT}}{d} \sim 1$$

$$e^{g(\nu)L_{sat}} \sim e^3 \sim 20$$

$$\Omega = 4\pi \text{ sr}$$

Muy baja amplificación y emite en todas las direcciones toda la energía

$$E_{ul} = N_u V h \nu_{ul} \text{ en } \tau_u = 1/A_{ul}$$

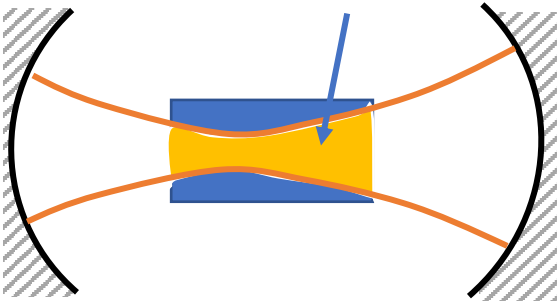


Ambos láseres podrían alcanzarían I_{SAT} en la superficie, pero debido al ángulo de divergencia, la intensidad decae muy rápido en el esférico (como una fuente puntual que emite en todas las direcciones)

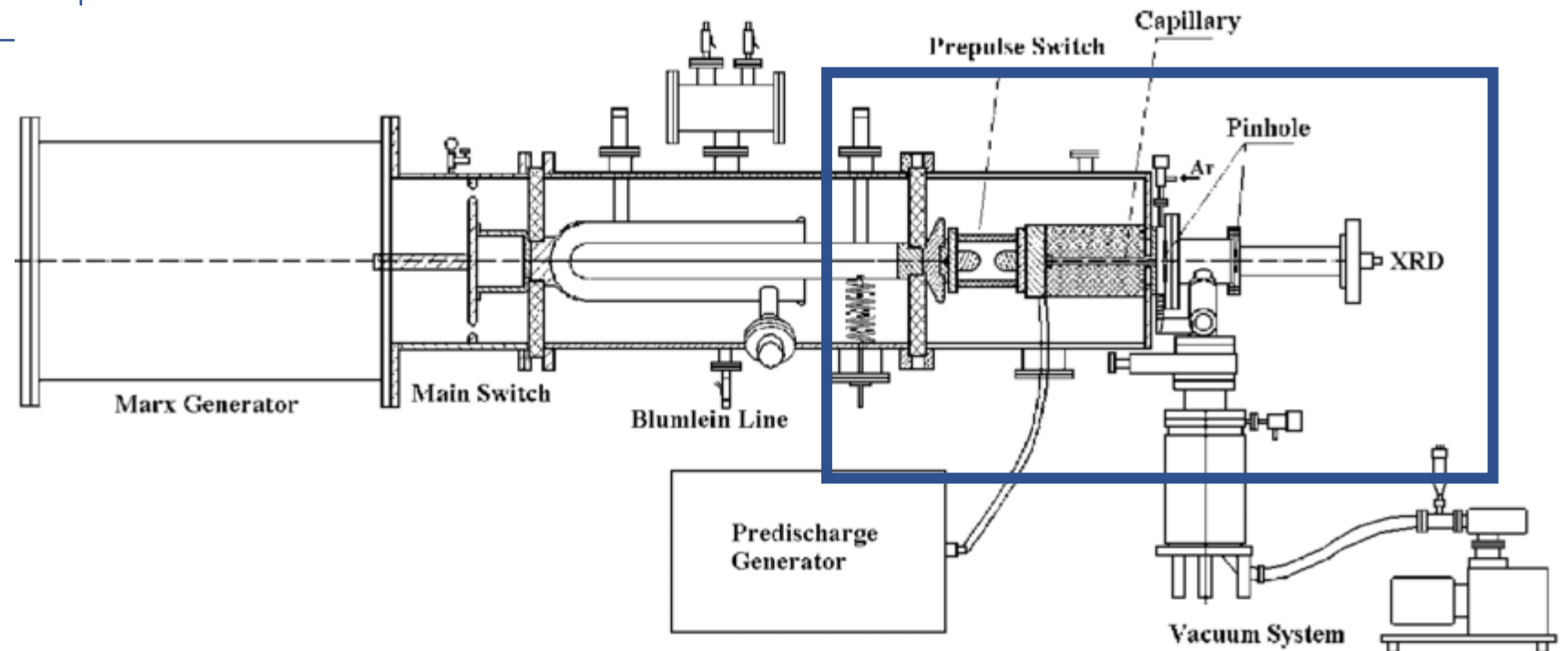
Formación y crecimiento del haz láser: observaciones



El volumen excitado es el volumen del modo



Laser de Rayos x: un solo pasaje



Formación y crecimiento del haz láser - $\Delta\nu_{ul}^D$



I_{SAT} relacionado con la intensidad necesaria para producir determinada tasa de emisión estimulada (no con detalles acerca de distribución de frecuencias de la emisión espontánea y el perfil de ganancia)

Para ensanchamiento homogéneo teníamos (página 20)

$$(N_u A_{ul}) \cdot (A l_g) \cdot \frac{A/L_{SAT}^2}{4\pi} \cdot h\nu_{ul} \cdot e^{\sigma_{ul}^H(\nu) N_u L_{SAT}} \frac{1}{A} = I_{SAT} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}^H(\nu)}$$

Número de transiciones generada por emisión espontánea en una punta del medio activo

Sección eficaz de emisión estimulada para ensanchamiento homogéneo

$$N_u \rightarrow \left(\frac{\Delta\nu^H}{\Delta\nu^D} \right) N_u$$

proporción del ancho Doppler es el ancho de línea homogéneo

$$\frac{\sigma_{ul}^H(\nu_0)}{\sigma_{ul}^D(\nu_0)} = \frac{\left(\frac{\lambda_{ul}^2}{4\pi^2} \frac{1}{\Delta\nu^H} A_{ul} \right)}{\sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3}} \frac{\lambda_{ul}^2}{\Delta\nu^D} A_{ul}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln(2)}} \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu^H} \rightarrow \sigma_{ul}^H(\nu) \rightarrow \frac{\sigma_{ul}^D(\nu_0)}{\sqrt{\pi \ln(2)}} \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu^H}$$

$$\frac{I_{SAT}}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln(2)}} e^{\sigma_{ul}^D(\nu_0) \frac{N_u L_{SAT}}{\sqrt{\pi \ln(2)}}} = \left(\frac{4L_{SAT}}{d} \right)^2$$

Análisis de la ganancia $e^{\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L}$



Que parámetro puedo cambiar ($\sigma_{ul}(\nu)$, ΔN_{ul} , L) para obtener la condición de saturación

- Alcanzar condición de saturación
- Inversión de población
- L alcance la longitud efectiva de saturación de la ganancia

Análisis de la ganancia $e^{\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L}$

SECCIÓN EFICAZ DE EMISION ESTIMULADA DEL MEDIO DE GANANCIA $\sigma_{ul}(\nu)$

Ensanchamiento homogéneo

$$\sigma_{ul}^H(\nu_o) = \left(\frac{\lambda_{ul}^2}{4\pi^2\eta^2} \frac{1}{\Delta\nu_{ul}^H} A_{ul} \right)$$

Ensanchamiento Doppler

$$\sigma_{ul}^D(\nu_o) = \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3} \frac{\lambda_{ul}^2 A_{ul}}{\eta^2 \Delta\nu_{ul}^D}}$$

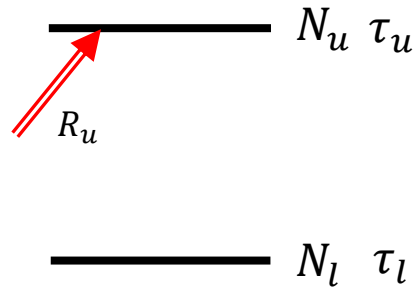
Parámetros característicos de la transición y del medio

- λ_{ul} longitud de onda de la transición
- η índice de refracción
- A_{ul}
- $\Delta\nu_{ul}^H$
- $\Delta\nu_{ul}^D \sim \sqrt{T}$

Laser	λ (nm)	σ_{ul} (m ²)
He-Ne	632.8	3.0×10^{-17}
Argon	488.0	2.5×10^{-16}
He-Cd	441.6	9.0×10^{-18}
Copper (CVL)	510.5	8.6×10^{-18}
CO ₂	10,600.0	3.0×10^{-22}
Excimer	248.0	2.6×10^{-20}
Dye (Rh6G)	577.0	2.5×10^{-20}
Semiconductor	800.0	1.0×10^{-22}
Nd:YAG	1064.1	6.5×10^{-23}
Nd:Glass	1062.3	3.0×10^{-24}
Ti:Al ₂ O ₃	800.0	3.4×10^{-23}
Cr:LiSrAlF	850.0	4.8×10^{-24}

El valor máximo $\sigma_{ul}(\nu_o)$ es un parámetro característico de la transición, bajo condiciones dadas de ensanchamiento.

DIFERENCIA DE DENSIDAD DE POBLACIÓN ΔN_{ul}



Ganancia

$$e^{\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L} > 1 \quad \Delta N_{ul} = N_u - N_l \frac{g_u}{g_l}$$

$$\sigma_{ul}(\nu) > 0$$

Condición 1

$$N_u > N_l \frac{g_u}{g_l}$$



Balances de tasa de población y decaimiento

Condición 2 : criterio estimativo para que la ganancia acumulada alcance la saturación

$$\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L \sim 12$$

ΔN_{ul} está limitada por la densidad de emisores, el bombeo y los tiempos de vida de los niveles.

$$\sigma_{ul}(\nu) \sim 10^{-16} m^2$$

$$L \sim 1 m$$

$$\Delta N_{ul} \sim 12 \times 10^{17} m^{-3}$$

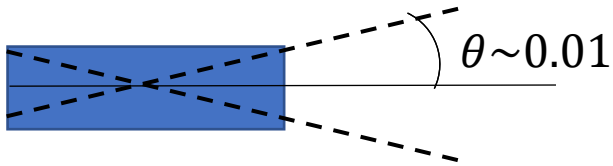
(difícil de obtener)

LONGITUD DEL MEDIO ACTIVO

Ganancia

$$e^{\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L} > 1$$

$L = \sim 1\mu m$ (láseres de nanohilos) a $10 m$ (National Ignition Facility – USA)



$$\lambda = 632.8 \text{ nm}$$

$$\sigma_{ul}^D = 3 \times 10^{-17} \text{ m}^2$$

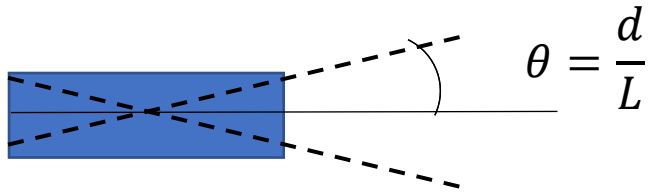
$$\Delta N_{ul} = 5 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L \sim 12$$

$$L \sim \frac{12}{15 \times 10^{-2}} \text{ m} \sim 80 \text{ m}$$

Imposible en un único pasaje.... pero...Podemos cambiar la longitud efectiva del medio?

Cuales son los requerimientos para que el haz crezca hasta alcanzar la intensidad de saturación



$$g_{SAT}(\nu)L_{sat} = \sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}L_{SAT} \approx 12 \pm 5$$

Ejemplo

¿Cual sería el diámetro del medio activo (o del modo) para que se alcance la saturación en un único pasaje por el amplificador?

Datos:

$$g(\nu_o) = 60 \text{ m}^{-1}$$

$$L = 0.2 \text{ m}$$

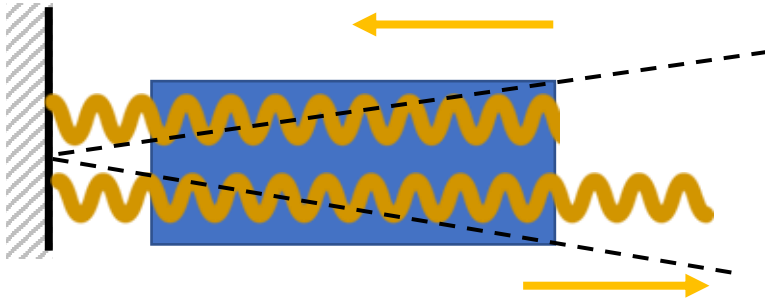
$$g(\nu_o)L_{sat} = 60 \text{ m}^{-1} 0.2 \text{ m} = 12$$

$$e^{g_{SAT}(\nu)L_{sat}} = e^{12} = 16 \left(\frac{L}{d}\right)^2 \quad \frac{L}{d} \approx 100 \quad \theta = \frac{d}{L} = 0.01$$

$$d \approx 0.002 \text{ m}$$

$$I = I_o e^{12} \sim (1.63 \times 10^5) I_o \text{ emisión a la salida del ampli}$$

Doble pasaje: aumento de la longitud efectiva

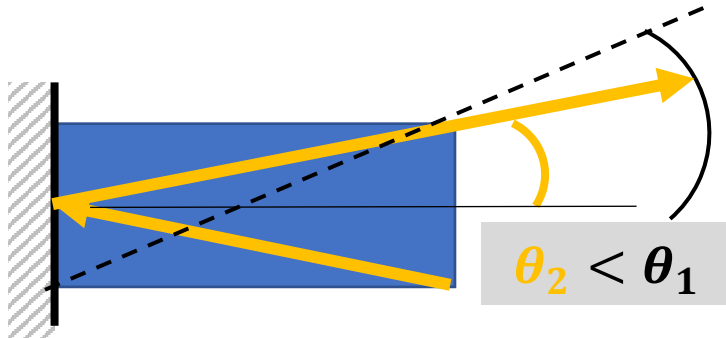


$$R = 100\% @ \lambda_{ul}$$

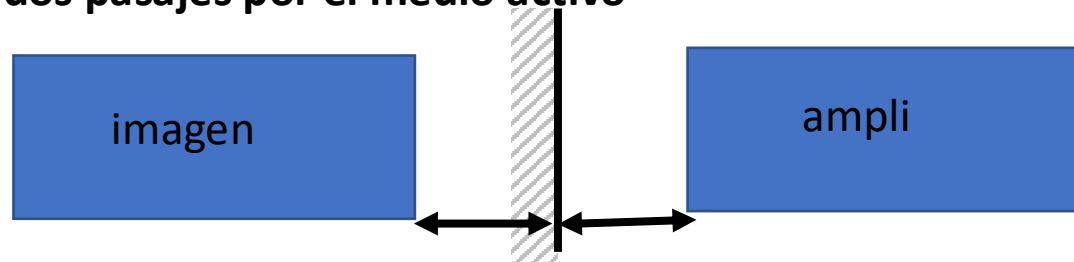
$$g(\nu)L_{sat} = g(\nu)2L = \sigma_{ul}(\nu)\Delta N_{ul}2L \approx 12 \pm 5$$

Recorre dos veces el medio

$$L_{Sat, EFF} = 2L$$

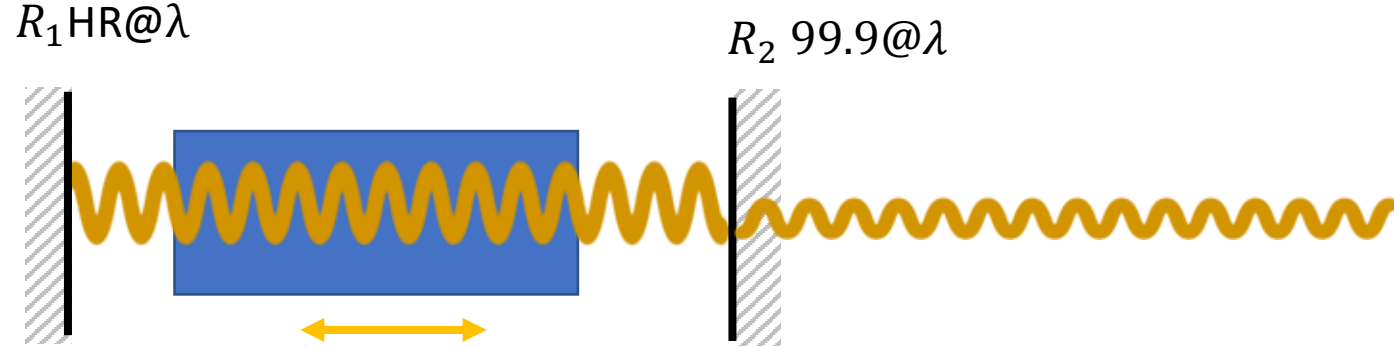


Equivalentemente a dos pasajes por el medio activo

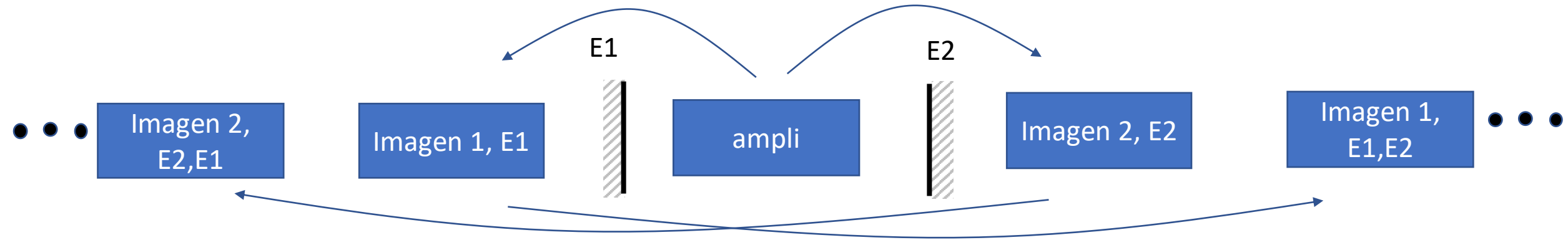


Dos medios activos

Pasajes múltiples: aumento de la longitud efectiva

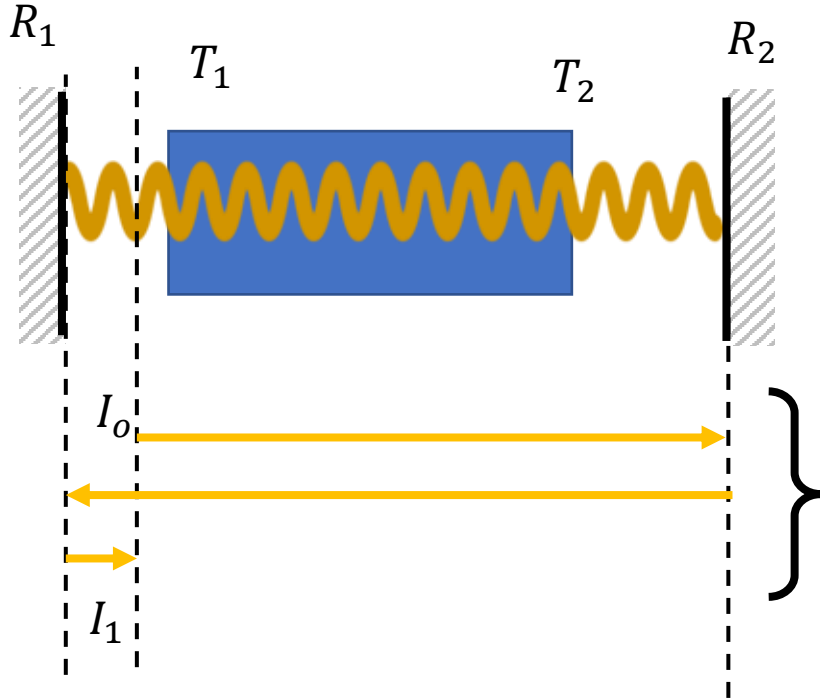


La luz recorre muchas veces el medio activo. La longitud efectiva aumenta y la ganancia se acumula en cada pasaje.



$L_{eff} = m L$. La longitud efectiva puede pensarse como una cadena de imágenes del amplificador.

Pasajes múltiples: ganancia umbral



Si hay ganancia neta, luego de un round trip la intensidad tuvo que crecer
 $I_1 \geq I_0$

Condición de umbral: La ganancia por round trip debe superar a las pérdidas

Umbral: $I_0 = I_1 = R_1 T_1 e^{gL-\alpha L} T_2 R_2 T_2 e^{gL-\alpha L} T_1 I_0$

$$1 = R_1 R_2 T_2^2 T_1^2 e^{2L(g-\alpha)}$$

$$g_{th} = \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2 T_2^2 T_1^2} \right) + \alpha$$

Pasajes múltiples: duración de la ganancia



Condición 2: Duración de la ganancia suficiente (importa en láseres pulsados)

m número de pasajes antes de alcanzar I_{SAT}

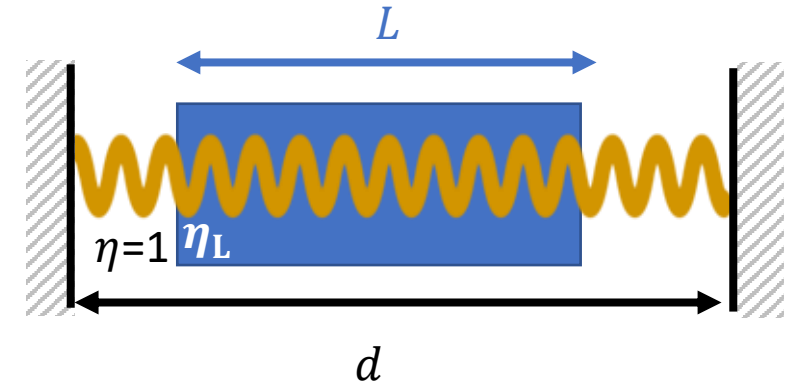
$$L_{eff} = mL$$

$g_{th}L_{eff} \approx 12 \rightarrow m = \frac{12}{g_{th}L}$ número mínimo de pasajes por el amplificador

Cuanto dura la ganancia (asumiendo $R \sim 100\%$)?

$$\tau_g = \frac{\text{camino óptico}}{\text{velocidad}} = \frac{m [(d - L) + n_L L]}{c}$$

$$\tau_g = \frac{12}{g_{th}L} \frac{[(d - L) + n_L L]}{c}$$



CW: cuanto tiempo le lleva al laser crecer hasta estabilizarse

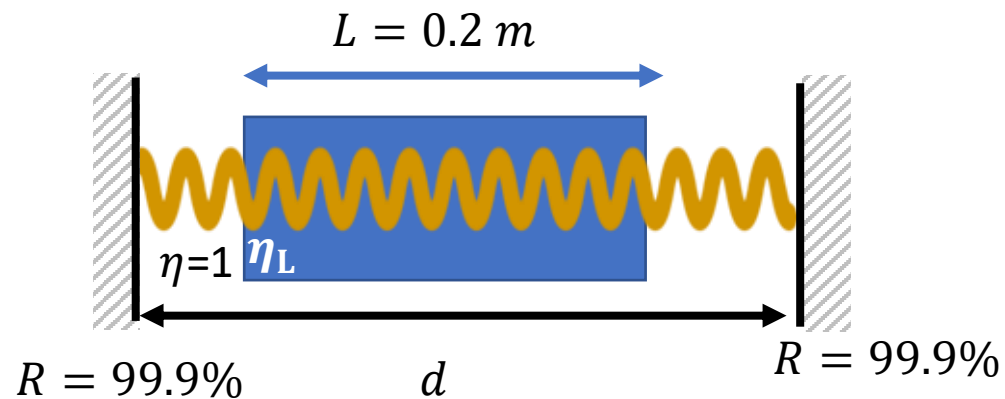
Pulsado: cuanto debe durar la ganancia para alcanzar I_{sat}

Parámetros de amplificadores



Amplifier Parameters for Various Lasers

Laser	$g_{th} \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$L \text{ (m)}$	m	$d \text{ (m)}$	η	$t_s \text{ (s)}$	τ_g
He-Ne	0.15	0.2	400	0.2	1.0	2.7×10^{-7}	
Argon	0.5	1.0	24	1.1	1.0	8.8×10^{-8}	
He-Cd	0.3	0.5	80	0.6	1.0	1.6×10^{-7}	
Copper (CVL)	5	1.0	2.4	1.1	1.0	8.8×10^{-9}	
CO ₂	0.9	1.0	13	1.1	1.0	4.8×10^{-8}	
Excimer	2.6	1.0	4.6	1.1	1.0	1.7×10^{-8}	
Dye (Rh6G)	500	0.02	1.2	0.04	1.5	2.0×10^{-10}	
GaAs	100,000	0.0001	1.2	0.0001	3.4	1.4×10^{-12}	
Nd:YAG	10	0.1	12	0.2	1.82	1.1×10^{-8}	
Nd:glass	3	0.1	40	0.2	1.55	3.4×10^{-8}	



Número de pasajes antes que alcance Isat

$$g_{th} = 0.15 \text{ m}^{-1}$$

$$m \sim \frac{12}{g_{th}L} = \frac{12}{0.15 \text{ m}^{-1} 0.2 \text{ m}} \sim 400$$

Láseres gaseosos $\eta_L \approx \eta = 1$

Determinamos que, en régimen de **pequeña señal**, la intensidad crece como:

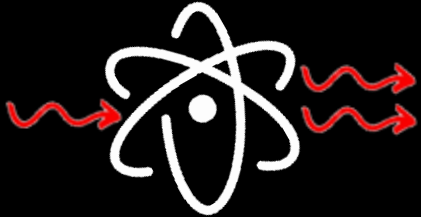
$$I(z) = I_0 e^{g(\nu)z}, \text{ con } g(\nu) = \sigma_{ul}(\nu) \Delta N_{ul}$$

1. **Sacar al sistema del equilibrio mediante bombeo**
2. **Condición necesaria: inversión de población** (no suficiente):
inversión de población para que haya ganancia óptica $\Delta N_{ul} > 0$
3. **Condición de crecimiento: ganancia suficiente** $I(L_{SAT}) = I_{SAT}$

lo que lleva a una condición del tipo: $g(\nu)L_{SAT} \sim 12 \pm 5$ (valor para obtener la saturación)

4. **Condición de umbral en cavidad:** la ganancia por round trip debe compensar las pérdidas (condición suficiente):
 - ganancia necesaria para alcanzar I_{sat} en cavidades $g_{Th}L_{eff} \approx 12$
 - En caso de cavidad con dos espejos, la ganancia por round trip es aquella que supera las pérdidas

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

Condiciones para el funcionamiento de un laser



Determinamos que, en régimen de **pequeña señal**, la intensidad **inicialmente** crece como:

$$I(z) = I_0 e^{g(\nu)z}, \text{ con } g(\nu) = \sigma_{ul}(\nu) \Delta N_{ul}$$

1. **Sacar al sistema del equilibrio mediante bombeo**
2. **Condición necesaria: inversión de población** (no suficiente):
inversión de población para que haya ganancia óptica $\Delta N_{ul} > 0$

3. **Condición de crecimiento: ganancia suficiente** $I(L_{SAT}) = I_{SAT} = \frac{c}{\eta \tau_u B_{ul}(\nu)} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}^H(\nu)}$

lo que lleva a una condición del tipo: $g(\nu)L_{SAT} \sim 12 \pm 5$ (valor para obtener la saturación)

4. **Condición de umbral en cavidad:** la ganancia por round trip debe compensar las pérdidas (condición suficiente):

- La ganancia umbral es aquella que iguala las pérdidas (reflectividad en espejos, absorción en medio, etc)
- ganancia necesaria para alcanzar I_{sat} en cavidades $g_{Th}L_{eff} \approx 12$, en donde $L_{eff} = mL$, m número de pasajes

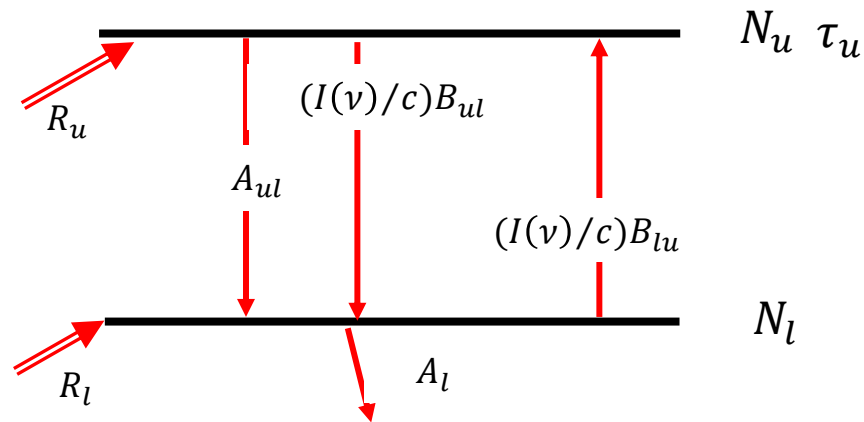
HOY: Régimen principal de operación laser (oscilaciones por encima del umbral):

Ganancia superior a la ganancia umbral

Laser produce potencias suficientes para experimentos

¿Cómo se establece una intensidad estacionaria y qué dinámicas de oscilación aparecen dentro de la cavidad?.

Poblaciones N_u y N_l en presencia de un haz intenso



Suponemos ahora que la intensidad creció exponencialmente hasta alcanzar la I_{sat} , de manera que ahora la emisión estimulada se volvió comparable a la espontánea.

¿Cuál es el efecto de este haz intenso en las poblaciones?

Poblaciones estacionarias

$$\frac{dN_u}{dt} = 0 = R_u - N_u \left[A_{ul} + \frac{I}{c} B_{ul}(\nu) \right] + N_l \frac{I}{c} B_{lu}(\nu) \quad (1)$$

$$\frac{dN_l}{dt} = 0 = R_l - N_l \left[A_l + \frac{I}{c} B_{lu}(\nu) \right] + N_u \left[\frac{I}{c} B_{ul}(\nu) + A_{ul} \right] \quad (2)$$

Hip: A_{ul}, A_l radiativos (no hay decaimiento colisional)

$$(1) + (2) \quad R_u + R_l - N_l A_l = 0 \Rightarrow N_l = \frac{(R_u + R_l)}{A_l} = N_l^o \quad \text{independiente de } I$$

$$N_u = \frac{R_u + N_l \frac{I}{c} B_{lu}(\nu)}{\left[A_{ul} + \frac{I}{c} B_{ul}(\nu) \right]}$$

$$N_u(I = 0) = N_u^o = R_u / A_{ul}$$

Poblaciones N_u y N_l en presencia de un haz intenso



Poblaciones estacionarias en presencia de emisión laser

$$N_l = \frac{(R_u + R_l)}{A_l} = N_l^o \quad \text{independiente de } I$$

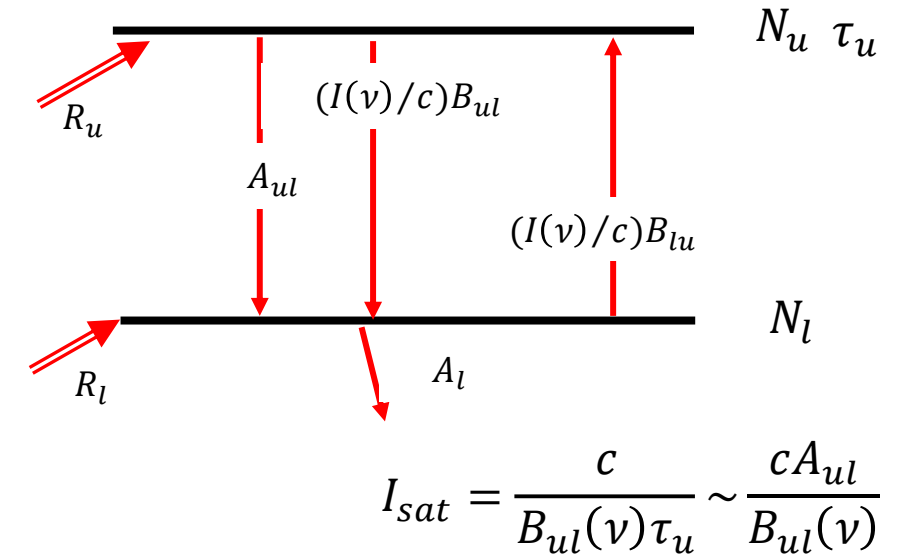
$$N_u = \frac{R_u + N_l \frac{I}{c} B_{lu}(\nu)}{\left[A_{ul} + \frac{I}{c} B_{ul}(\nu) \right]} = \frac{R_u + N_l \frac{I}{c} (g_u/g_l) B_{lu}(\nu)}{\left[\frac{B_{ul}(\nu) I_{sat}}{c} + \frac{I}{c} B_{ul}(\nu) \right]}$$

$$N_u = \frac{\cancel{\frac{B_{ul}(\nu) I_{sat}}{c}}}{\cancel{\frac{B_{ul}(\nu) I_{sat}}{c}}} \frac{R_u/A_{ul} + N_l (g_u/g_l) I/I_{sat}}{[1 + I/I_{sat}]}$$

$$N_u = \frac{R_u/A_{ul} + N_l^o (g_u/g_l) I/I_{sat}}{[1 + I/I_{sat}]}$$

$$N_u(I=0) = N_u^o = R_u/A_{ul}$$

$$N_u(I) = \frac{N_u^o + N_l^o (g_u/g_l) I/I_{sat}}{[1 + I/I_{sat}]}$$



Saturación de la ganancia por encima del umbral

$$\Delta N_{ul} = N_u - \left(\frac{g_u}{g_l}\right) N_l = \frac{N_u^o + N_l^o \left(\frac{g_u}{g_l}\right) \frac{I}{I_{sat}}}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} - \left(\frac{g_u}{g_l}\right) N_l^o = \frac{N_u^o - \left(\frac{g_u}{g_l}\right) N_l^o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]}$$

$$\Delta N_{ul} = \frac{\Delta N_{ul}^o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]}$$

Coefficiente de ganancia

$$g(I) = \sigma_{ul} \Delta N_{ul} = \frac{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} = \frac{g_o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} \rightarrow \text{término de saturación (la ganancia va a ser más chica que la inicial)} \\ g(I = 0, \nu = \nu_{ul}) = g_o = \sigma_{ul} \Delta N_{ul}^o \text{ coeficiente de ganancia de baja señal} \end{array} \right.$

- La ganancia $\frac{I}{I_o} = e^{g_o L}$ ganancia que se mediría si una señal baja de intensidad I_o (pequeña) atravesara el medio activo
Para medirla: evitar que el laser oscile en la cavidad (bloqueando un espejo) y medir la ganancia entregando energía al medio mediante el bombeo.
- Para poder generar emisión laser $g_o > g_{th}$ ya que g_{th} es la que iguala a las pérdidas

Crecimiento de la intensidad cuando $I \gg I_{sat}$

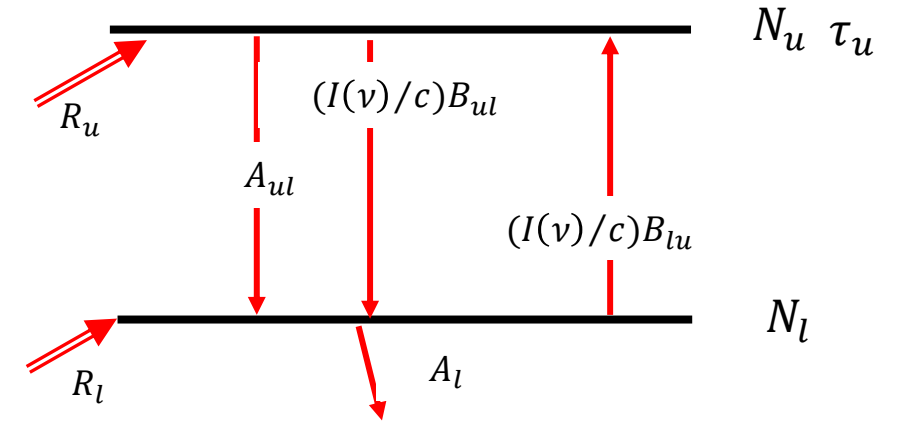


Poblaciones estacionarias cuando hay emisión laser

$$N_l = \frac{(R_u + R_l)}{A_l} = N_l^o$$

independiente de I

$$\Delta N_{ul} = \frac{\Delta N_{ul}^o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} \rightarrow g(I) = \frac{g_o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]}$$

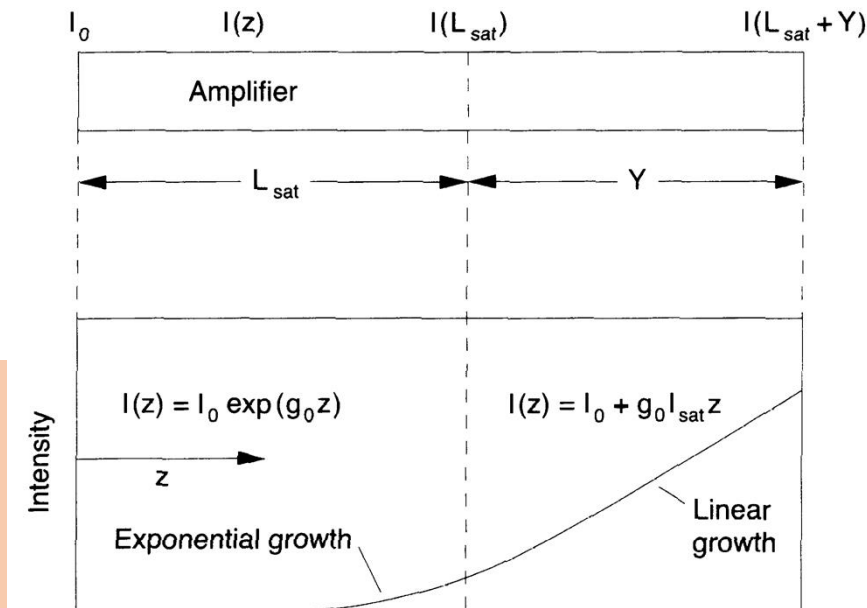


Crecimiento de la intensidad del laser cuando $I > I_{sat}$

$$\frac{I}{I_o} = e^{g(v)L} \rightarrow \frac{dI}{I} = g dz$$

$$\frac{dI}{dz} = g I = \frac{g_o I}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} \sim g_o I_{sat} \quad \left(\frac{I}{I_{sat}} \gg 1, z > L_{sat}\right)$$

$$I(z) = g_o I_{sat} z + I_o$$



En el régimen saturado $I \gg I_{sat}$, el campo extrae eficientemente la energía almacenada en la inversión de población

Entonces, a medida que el haz se propaga por el amplificador, la energía que se agrega al haz por unidad de longitud es constante y por lo tanto la intensidad crece linealmente.

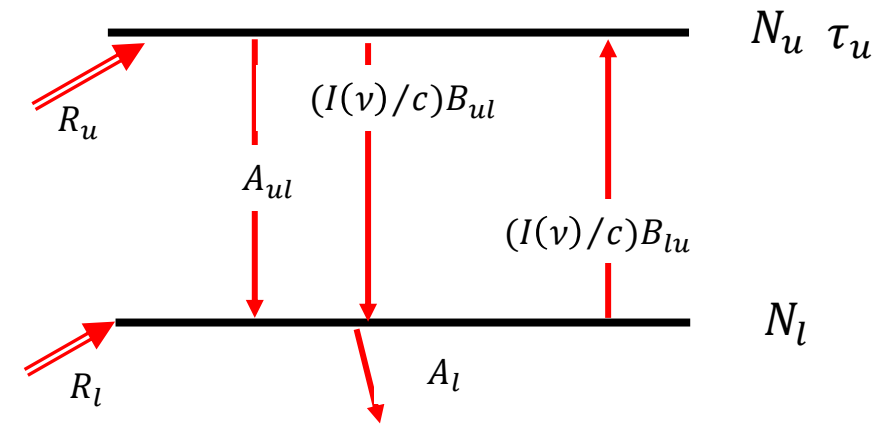
Saturación de la ganancia láser por encima del umbral

Poblaciones estacionarias cuando hay emisión láser

$$N_l = \frac{(R_u + R_l)}{A_l} = N_l^o$$

independiente de I

$$\Delta N_{ul} = \frac{\Delta N_{ul}^o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]} \rightarrow g(I) = \frac{g_o}{\left[1 + \frac{I}{I_{sat}}\right]}$$



¿Cómo es posible que N_l sea independiente de I ? En el estado estacionario, las transiciones estimuladas se balancean

$$N_u (I(\nu)/c) B_{ul} = N_l (I(\nu)/c) B_{lu}$$

$$N_u B_{ul} = N_l B_{lu}$$

$$N_u - N_l B_{lu}/B_{ul} = 0$$

$$N_u - \frac{g_u}{g_l} N_l = \Delta N_{ul} = 0 \Rightarrow g(I) = 0$$

En un medio amplificador con ganancia, si $g^o > g_{th}$:

$$I \uparrow \Rightarrow \Delta N_{ul} \downarrow \Rightarrow g \downarrow$$

Caso ideal (sin pérdidas):

$$\Delta N_{ul} = 0 \Rightarrow g = 0$$

Caso real (láser):

$$g(I^{ss}) = g_{th}$$

$$\Delta N_{ul}^{ss} > 0$$

$$g_{neta} = g(I) - g_{th} = 0$$

Ganancia neta y estado estacionario



La intensidad intracavidad crece hasta un valor estacionario I_{SS} , para el cual la ganancia saturada iguala las pérdidas de la cavidad.

$$g_{SS} = g(I^{SS}) = g_{th} = \frac{g_o}{\left[1 + \frac{I_{SS}}{I_{sat}}\right]} = \frac{1}{2L} \ln \left[\frac{1}{R_1 R_2 (1 - a_1)(1 - a_2)} \right] + \alpha$$

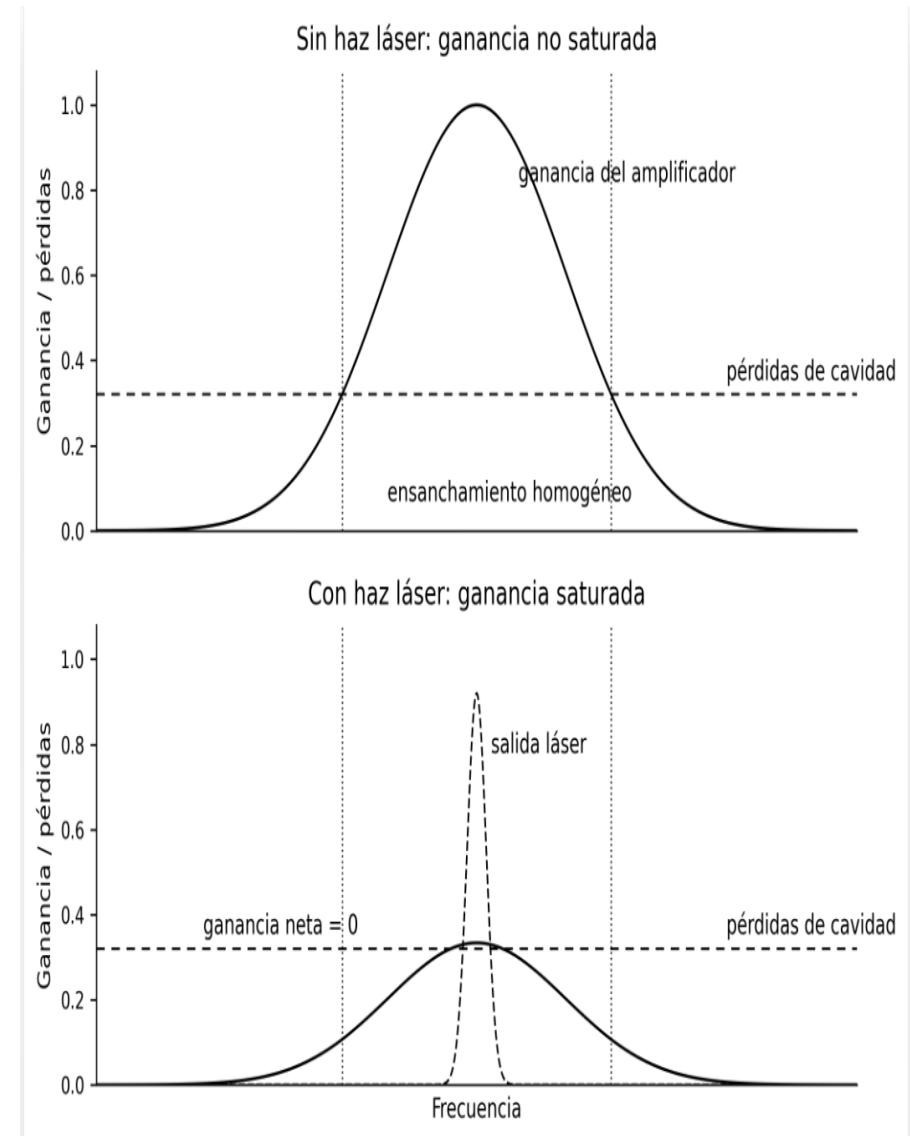
La ganancia máxima se iguala a las perdidas (en otras frecuencias es menor que las perdidas)

La emisión laser se da solo en la región espectral donde la ganancia neta $g(\nu) - g_{th} = 0$

Intensidad estacionaria dentro de la cavidad, $g_o > g_{th}$

$$I_{SS} = \left(\frac{g_o}{g_{th}} - 1 \right) I_{sat}$$

Para aumentar la intensidad estacionaria, se puede aumentar la ganancia de pequeña señal g_o o disminuir g_{th} , es decir, reducir las pérdidas.



Optimización de la potencia de salida del laser



Transmisión óptima del Espejo de salida del laser (output coupler) (láseres con ganancia baja o espejos de baja transmisión)

Si la ganancia de un pasaje cumple que $g(I) > g_{th}$ (incluyendo perdidas por transmisión en espejos, absorción etc) obtengo emisión laser. En el umbral

$$g_{th} = \frac{1}{2L} \ln \left[\frac{1}{R_1 R_2} \right] + \alpha = \frac{1}{2L} \ln \left[\frac{1}{R^2} \right] + \alpha = \frac{1}{2L} \ln \left[\frac{1}{(1-t)^2} \right] + \alpha = \frac{-21}{2L} \ln[1-t] + \alpha \approx \frac{-1}{L} \ln[1-t] + \alpha \approx \frac{1}{L} t + \alpha$$

$$\ln(1-x) = -x - \sigma(x^2)$$

$$g_{th} \approx \frac{1}{L} (t + \alpha L) = \frac{1}{L} (t + a)$$

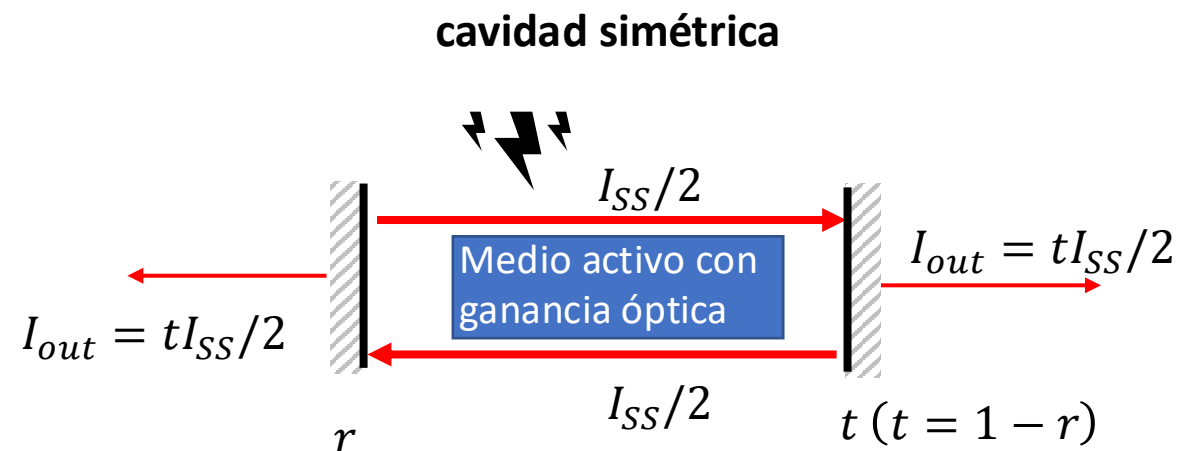
$g_{th} L = a + t$ (absorción, scattering y transmisión en un pasaje)

$$I_{ss} = \left(\frac{g_o}{g_{th}} - 1 \right) I_{sat}$$

$$I_{sat} = \frac{h\nu_{ul}}{\sigma_{ul}^H \tau_u}$$

La intensidad media del haz viajando en ambas direcciones I_{ss}

$$I_{out} = t I_{ss} / 2 = \frac{t}{2} \left(\frac{g_o L}{a + t} - 1 \right) I_{sat}$$



Optimización de la potencia de salida del laser



$$I_{out} = tI_{ss}/2 = \frac{t}{2} \left(\frac{g_o L}{a + t} - 1 \right) I_{sat}$$

Transmisión óptima si

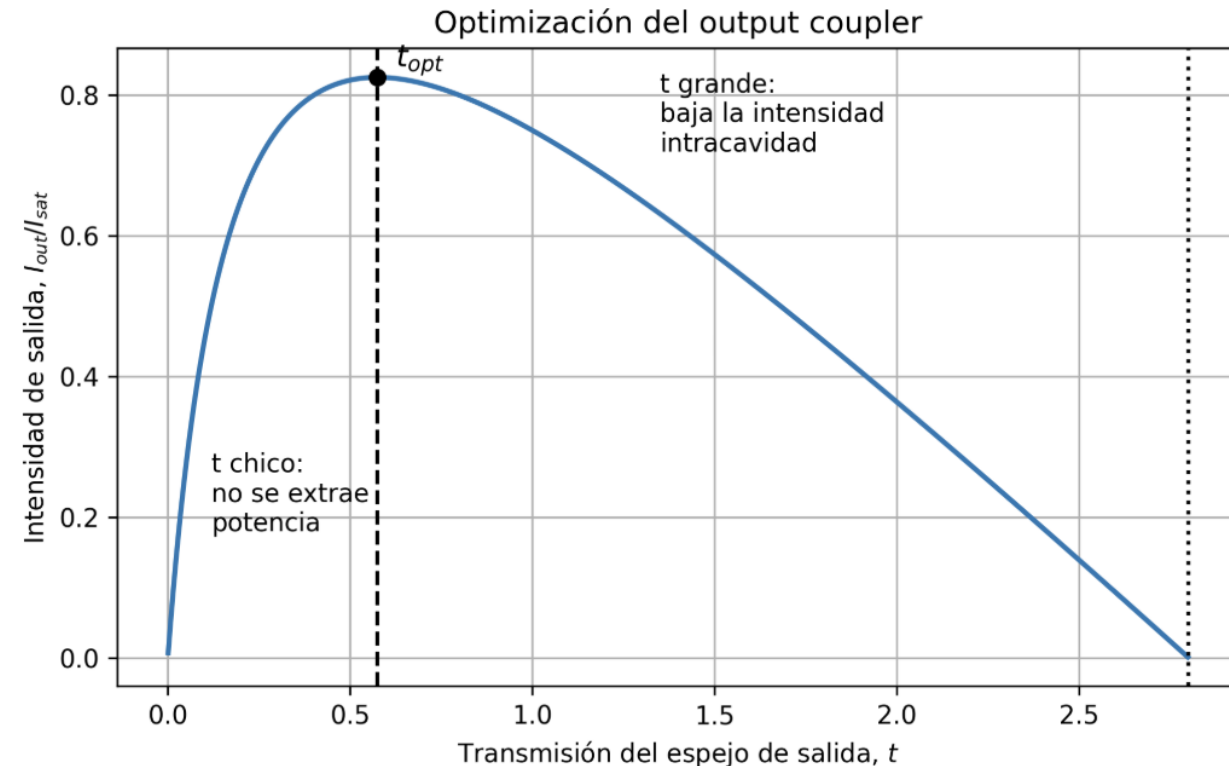
$$\left. \frac{dI_{out}}{dt} \right|_{t_{opt}} = 0 \Rightarrow$$

$$t_{opt} = (g_o L a)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{1/2} \right]$$

$$I^{opt} = g_o L \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{1/2} \right]^2 I_{sat} / 2 = I_{sat} t_{opt}^2 / 2a$$

TAREA

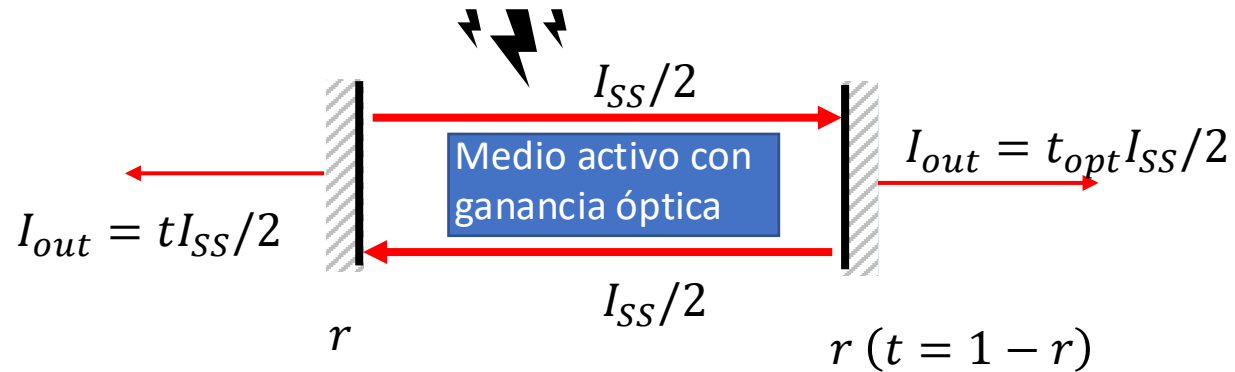
	T _{opt}
He-Ne	<1%
He-Cd, Ar ⁺	3-5%
estado sólido pulsado	50-70 %
Estado sólido CW	2-20%
Semiconductor	30%



Optimización de la potencia de salida del laser

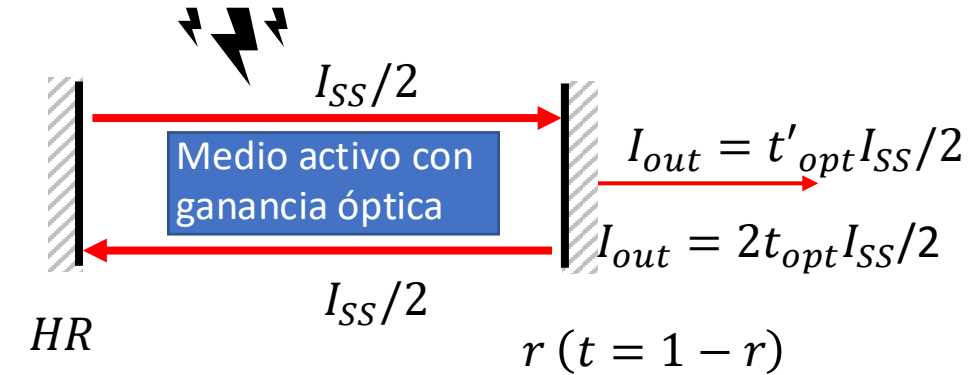


Intensidad óptima a la salida del laser



$$t_{opt} = (g_o L a)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{1/2} \right]$$

$$P^{opt} = I_{out}^{opt} A$$



$$t'^{opt} = 2 t_{opt}$$

$$P'^{opt} = 2 P^{opt}$$

Ejemplo: Láser de He:Cd



$$\lambda = 441.6 \text{ nm}$$

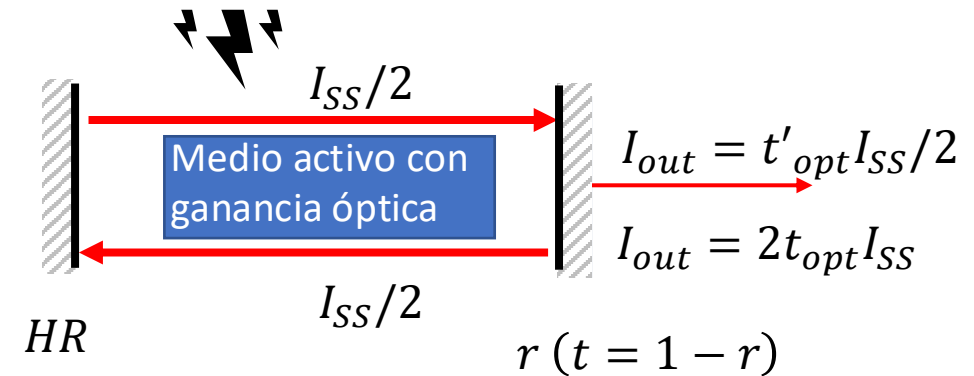
$$\text{Diámetro } \phi = 1 \text{ mm} \rightarrow A = 0.8 \text{ mm}^2$$

$$L = 0.3 \text{ m}$$

Perdidas por scattering+ absorción

$$a = 0.2\% \text{ por pasaje}$$

$$g_o = 0.5 \text{ m}^{-1}$$



$$t'_{opt} = 2t_{opt} = 2(g_o L a)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{1/2} \right] \sim 0.03 \text{ (3\%)}$$

$$P'^{opt} = 2 I'^{opt}_{out} A = A g_o L \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{1/2} \right]^2 I_{sat}$$

$$I_{sat} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}}$$

Ejemplo: Láser de He:Cd



$$\lambda = 441.6 \text{ nm}$$

$$\text{Diámetro } \phi = 1 \text{ mm} \rightarrow A = 0.8 \text{ mm}^2$$

$$L = 0.3 \text{ m}$$

Perdidas por scattering+ absorción

$$a = 0.2\% \text{ por pasaje}$$

$$g_o = 0.5 \text{ m}^{-1}$$

$$P^{opt} = 2 I^{opt}_{out} A = A g_o L \left[1 - \left(\frac{a}{g_o L} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 I_{sat}$$

$$I_{sat} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}}$$

$$h\nu_{ul} = \frac{1240}{441.6} \text{ eV} = \frac{1240}{441.6} 1.602177 \times 10^{-19} \text{ J} = 4.5 \times 10^{-19} \text{ J}$$

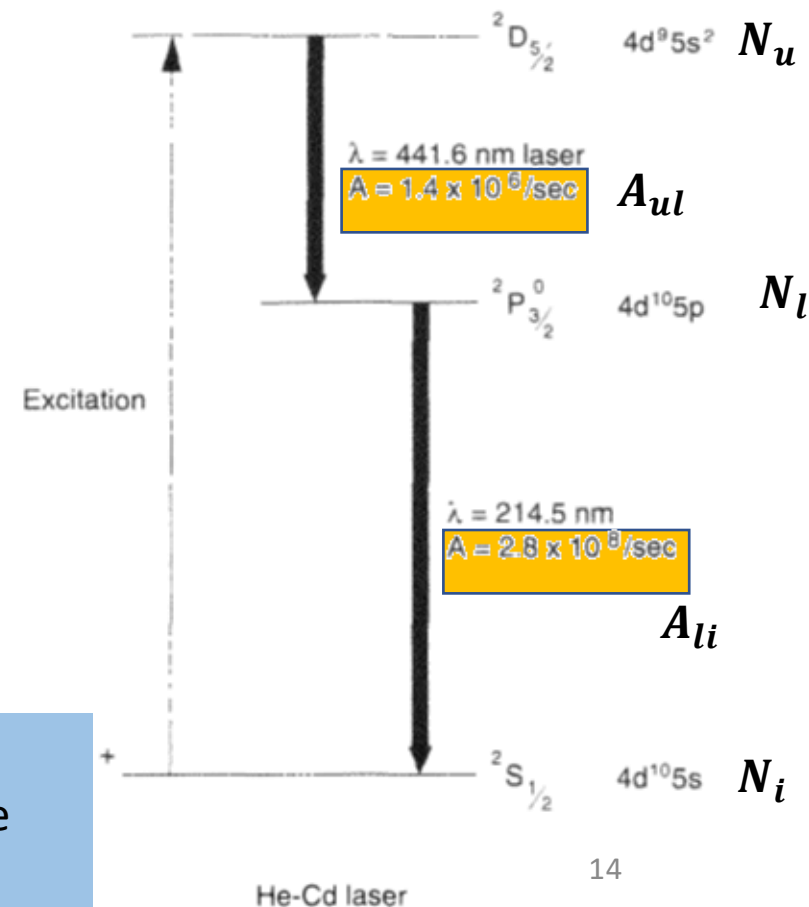
$$\sigma_{ul} = \sigma_{ul}^H = \frac{\lambda_{ul}^2 A_{ul}}{4\pi^2 \Delta\nu_{ul}^H} = \frac{\lambda_{ul}^2}{2\pi} \frac{A_{ul}}{(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li})} = 1.54 \times 10^{-16} \text{ m}^2$$

$$\Delta\nu_{ul}^H = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_i A_{ui} + \sum_i A_{li} \right)$$

$$\tau_u^{rad} = \frac{1}{\sum_i A_{ui}} = \frac{1}{A_{ul}} = 7.1 \times 10^{-7} \text{ s}$$

$P^{opt} \sim 0.4 \text{ mW}$ para un único modo longitudinal

Si se consideran los 8 modos longitudinales + transversales P^{opt} aumenta (más adelante modos en cavidades)



Dinámica temporal: intercambio entre poblaciones y fotones

$$I_{ss} = \left(\frac{g_o}{g_{th}} - 1 \right) I_{sat}$$

Independiente del tiempo, muy estable

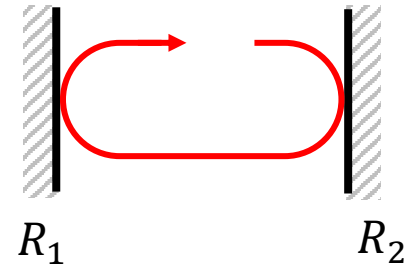
El intercambio de energía entre la población del nivel superior N_u y el campo intracavidad puede originar fluctuaciones : oscilaciones de relajación o spiking

Tiempo de decaimiento del laser dentro de la cavidad (el decaimiento que se origina en las pérdidas)

- Tiempo de decaimiento de un haz oscilando en una cavidad, con perdidas, sin ganancia

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{\tau_c}$$

τ_c tiempo de vida de los fotones en la cavidad o decaimiento de la energía intracavidad por pérdidas



$$\tau_c = \frac{\text{tiempo de tránsito por pasaje}}{\text{pérdida fraccional por pasaje}} = \frac{\eta d / c}{L_F} = \frac{\eta d}{c g_{th} L}$$

En un round-trip

$$R_1 R_2 e^{(g-\alpha)2L} = 1$$

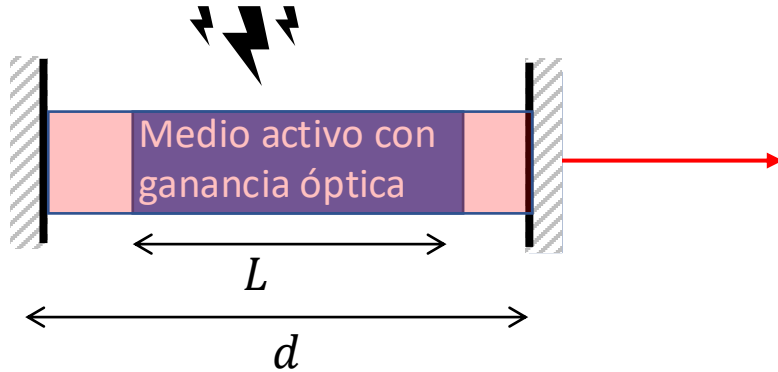
$$R_1 R_2 e^{-2\alpha L} e^{2gL} = 1$$

$$e^{-2L_F} = R_1 R_2 e^{-2\alpha L}$$

$$\tau_c = \frac{\eta d}{c [\alpha L - \ln(R_1 R_2)^{1/2}]}$$

$$\frac{1}{\tau_c} = \text{tasa de decaimiento}$$

Ecuaciones básicas para las tasas



$$V_g = A \times L$$

$$V_c = A \times d$$

Número total de especies laser en cada nivel

$$M_u = V_g N_u$$

$$M_l = V_g N_l$$

Flujo de bombeo: número de electrones excitados al nivel u

$$P_u = V_g R_u$$

R_u (flujo de bombeo por u de tiempo y volumen)

ϕ número de fotones instantáneo en un modo de la cavidad

- Supongo que los fotones están uniformemente distribuidos en la cavidad
- $\frac{V_g}{V_c} = \frac{L}{d}$ porción de cavidad donde ocurre amplificación

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dz} \frac{dz}{dt} \left(\frac{V_g}{V_c} \right) = gI \frac{c}{\eta} \left(\frac{V_g}{V_c} \right)$$

$$I \sim \frac{\phi h \nu}{\Delta t A}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = g\phi \frac{c}{\eta} \left(\frac{V_g}{V_c} \right) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

El número de fotones disminuye por las pérdidas de la cavidad

$$\frac{d\phi}{dt} = g \phi \frac{c}{\eta} \left(\frac{V_g}{V_c} \right) - \frac{\phi}{\tau_c} = \frac{\sigma_{ul} \Delta M_{ul}}{V_g} \frac{c}{\eta} \left(\frac{V_g}{V_c} \right) \phi - \frac{\phi}{\tau_c} = K \Delta M_{ul} \phi - \frac{\phi}{\tau_c}$$

$$\left. \begin{aligned} g &= \sigma_{ul} \Delta N_{ul} = \sigma_{ul} \Delta M_{ul} / V_g \\ M_{u/l} &= N_{u/l} V_g \\ K &= \frac{\sigma_{ul}}{V_g} \frac{c}{\eta} \left(\frac{V_g}{V_c} \right) = \frac{\sigma_{ul}}{V_c} \frac{c}{\eta} \end{aligned} \right\} \frac{d\phi}{dt} = K \Delta M_{ul} \phi - \frac{\phi}{\tau_c}$$

Incorporo término de emisión espontánea

$$\frac{d\phi}{dt} = K \Delta M_{ul} \phi + K_s M_u - \frac{\phi}{\tau_c}$$

K_s tasa de emisión espontánea en un modo de la cavidad, por un conjunto específico de átomos

K tasa de emisión estimulada en ese modo (por esa misma población de átomos) producida por un fotón presente en el mismo modo

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

- Resultado de mecánica cuántica $K_s \sim K$ (en un modo de la cavidad)
- $M_u \gg M_l$

Dinámica temporal: ecuaciones de tasa para M_u y ϕ



Ecuación para el número de fotones dentro de la cavidad en un modo de la cavidad

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

Ecuación para la población total del nivel superior M_u

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - M_u A_u$$

$$A_u = \frac{1}{\tau_u}$$

Ecuaciones no lineales acopladas $M_u \phi$

Solución estacionaria

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\phi = \frac{M_u}{\frac{1}{K\tau_c} - M_u} = \frac{M_u}{M_u^{th} - M_u}$$

$$M_u^{th} = \frac{1}{K\tau_c}$$

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - M_u / \tau_u = 0 \quad \longrightarrow$$

$$M_u = \frac{P_u}{K\phi + 1/\tau_u}$$

Dinámica temporal: solución estacionaria y umbral



Solución estacionaria

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$\frac{dM_u}{dt} = 0$$

$$\phi = \frac{M_u}{M_u^{th} - M_u}$$

$$M_u = \frac{P_u}{K\phi + 1/\tau_u}$$

Si el número de fotones es chico (bombeo por debajo del umbral) $K\phi \ll 1/\tau_u$

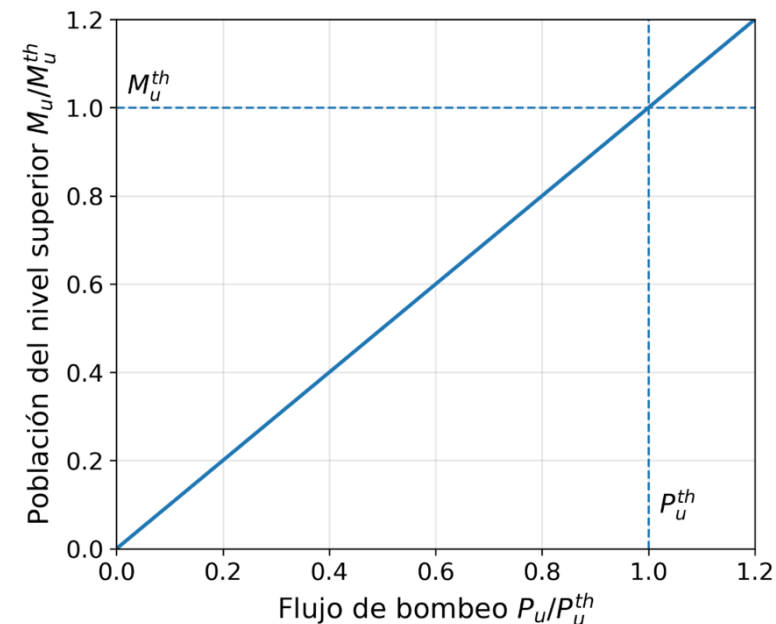
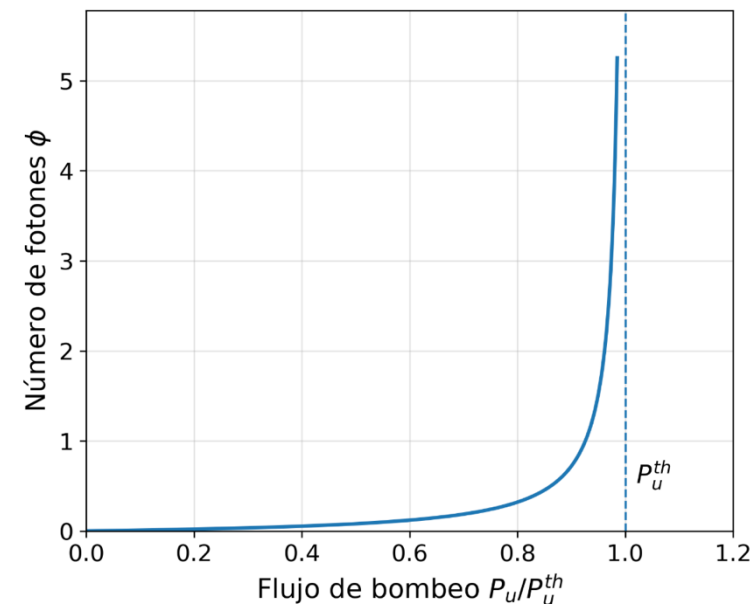
$M_u \approx P_u \tau_u$ (crecimiento lineal con P_u)

$$\phi \approx \frac{P_u \tau_u}{M_u^{th} - P_u \tau_u}$$

Si $M_u \rightarrow M_u^{th}$, ϕ se vuelve apreciable (o sea empiezo a ver emisión laser)

$$M_u^{th} = \frac{1}{K\tau_c} \rightarrow P_u^{th} \approx M_u^{th} / \tau_u$$

$$P_u^{th} \approx 1/K\tau_c\tau_u$$



Dinámica temporal: solución estacionaria por encima del umbral.

Si el número de fotones grande (bombeando por encima del umbral. $P_u > P_u^{th}$)

$$\phi = \frac{M_u}{M_u^{th} - M_u}$$

$$M_u = M_u^{th} \left(\frac{\phi}{1 + \phi} \right) \rightarrow \boxed{M_u \sim M_u^{th}, \quad \phi \gg 1}$$

$$M_u = \frac{P_u}{K\phi + 1/\tau_u}$$

$$\phi = \frac{1}{K} \left(\frac{P_u}{M_u} - \frac{1}{\tau_u} \right) \rightarrow \phi = \frac{1}{K} \left(\frac{P_u}{M_u} - \frac{P_u^{th}}{M_u^{th}} \right) \quad \phi \gg 1 \quad \phi^{ss} \approx \frac{1}{K} \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{P_u^{th}}{M_u^{th}} \right)$$

$$P_u^{th} \approx M_u^{th} / \tau_u$$

$$\boxed{\phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th} K} (P_u - P_u^{th})}$$

Por encima del umbral, el número de fotones crece linealmente con el exceso de bombeo.

Intercambio de energía entre M_u y fotones laser



$$P_u < P_u^{th} \quad \phi \approx \frac{P_u \tau_u}{M_u^{th} - P_u \tau_u} = \frac{P_u}{P_u^{th} - P_u}$$

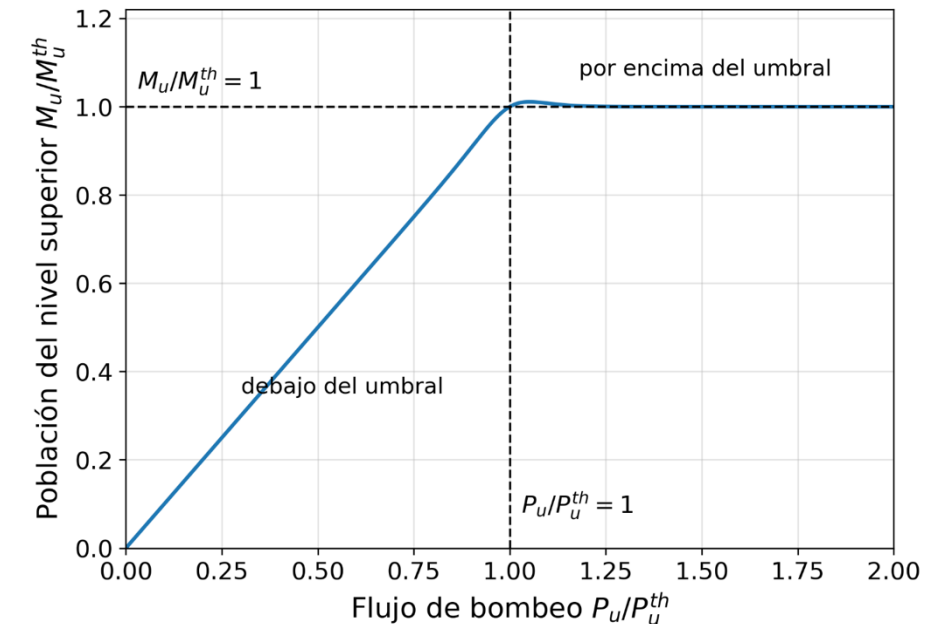
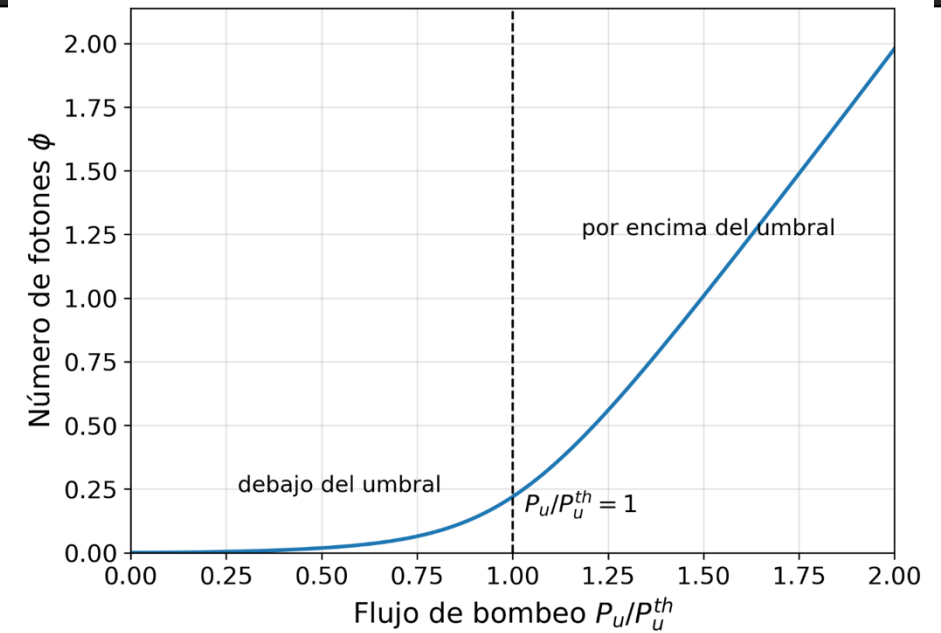
$$M_u \approx P_u \tau_u$$

- acumula población excitada, pero hay pocos fotones en el modo láser (señal débil), domina emisión espontánea

$$P_u > P_u^{th} \quad \phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th} K} (P_u - P_u^{th})$$

$$M_u \sim M_u^{th}$$

- población del nivel superior fijada cerca del umbral
- bombeo adicional se convierte en fotones láser.



Fluctuaciones a la salida del láser: Spiking

Soluciones dependientes del tiempo

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - \frac{M_u}{\tau_u}$$

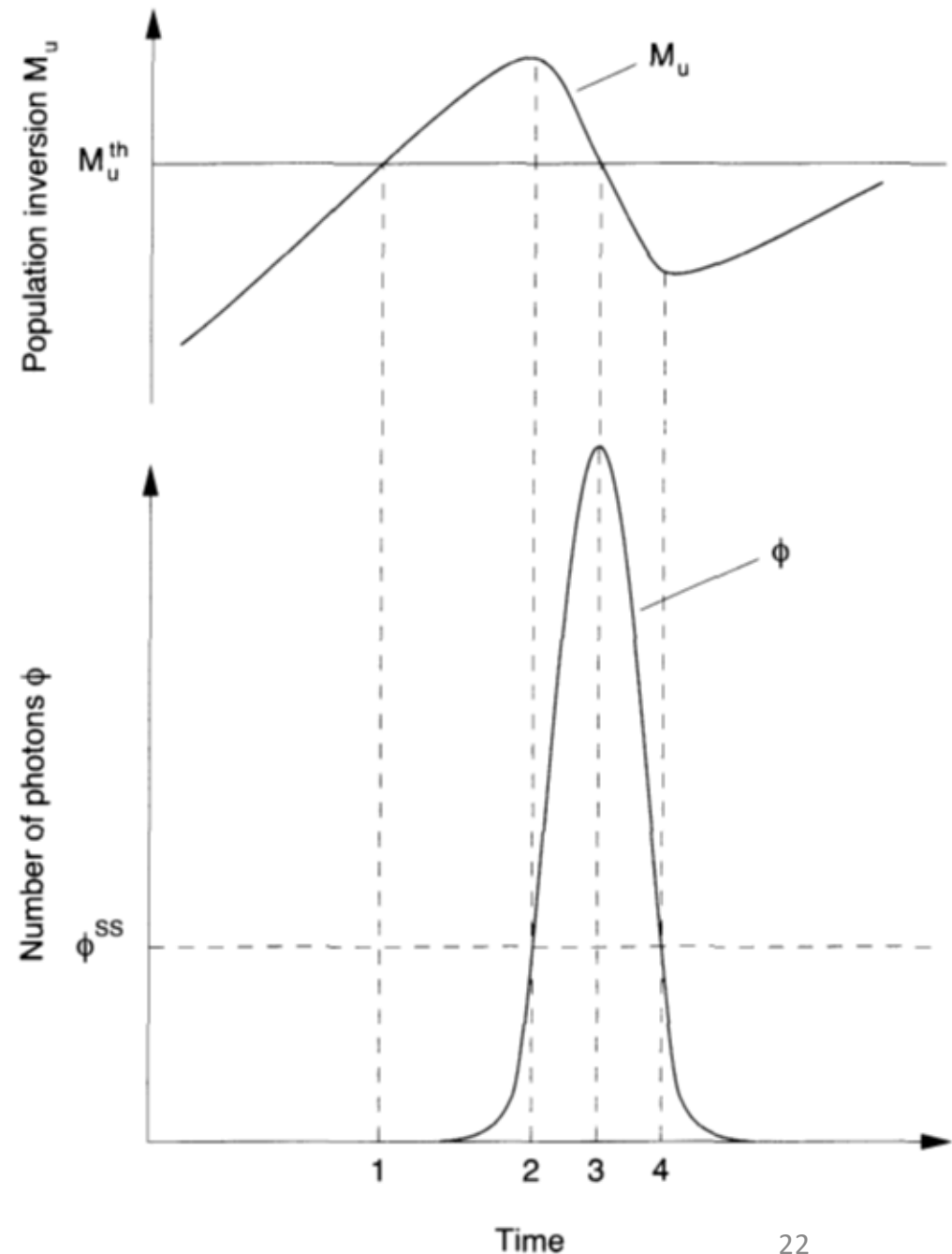
T tiempo de recupero de la población del excitado (τ_u)

$$\tau_u \gg \tau_c$$

- Láseres de estado sólido τ_u grande
- Láseres de semiconductores (d muy chica) τ_c
- Gases: τ_u chico, d grande (no muestran fluctuaciones)

$$\tau_c = \frac{\eta d}{c[\alpha L - \ln(R_1 R_2)^{1/2}]}$$

- Lo veo cuando enciendo el laser repentinamente (oscilaciones de relajación) o cuando introduzco perdidas rápidamente habiendo inversión de población (Q-Switch)



Fluctuaciones a la salida del láser: Spiking

Soluciones dependientes del tiempo: spiking

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - \frac{M_u}{\tau_u}$$

0-1) Acumulación de inversión de población

Crecimiento lineal de M_u , $\phi \sim 0$

$$P_u \gg \frac{M_u}{\tau_u}$$
$$\frac{dM_u}{dt} > 0$$
$$M_u \sim P_u t$$

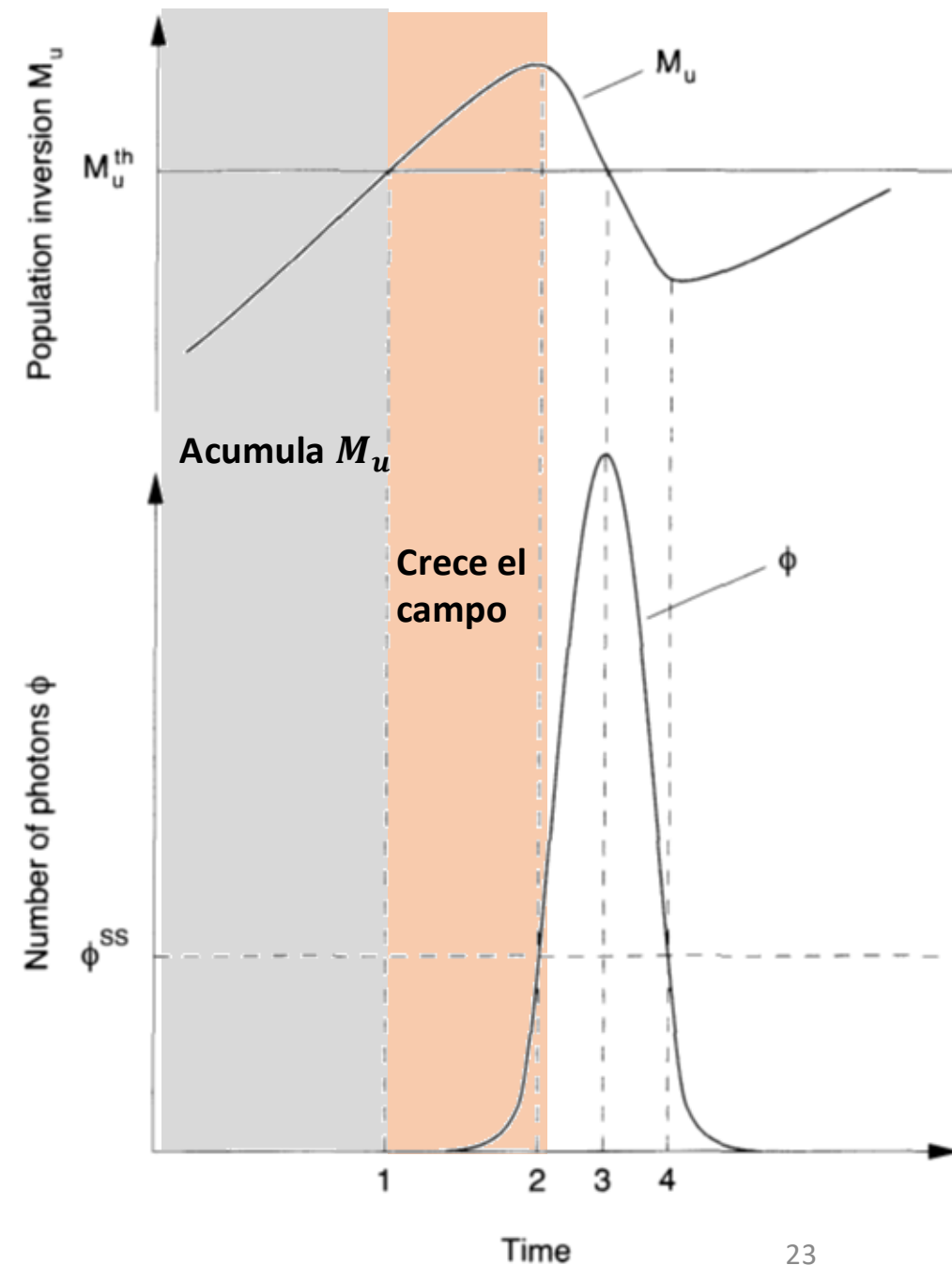
1-2) Crecimiento rápido del campo

M_u comienza a ser importante (se acerca al umbral), el término

$M_u \phi$ hace que:

ϕ empiece a crecer

M_u crece más lento



Fluctuaciones a la salida del láser: Spiking

Soluciones dependientes del tiempo: spiking

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - \frac{M_u}{\tau_u}$$

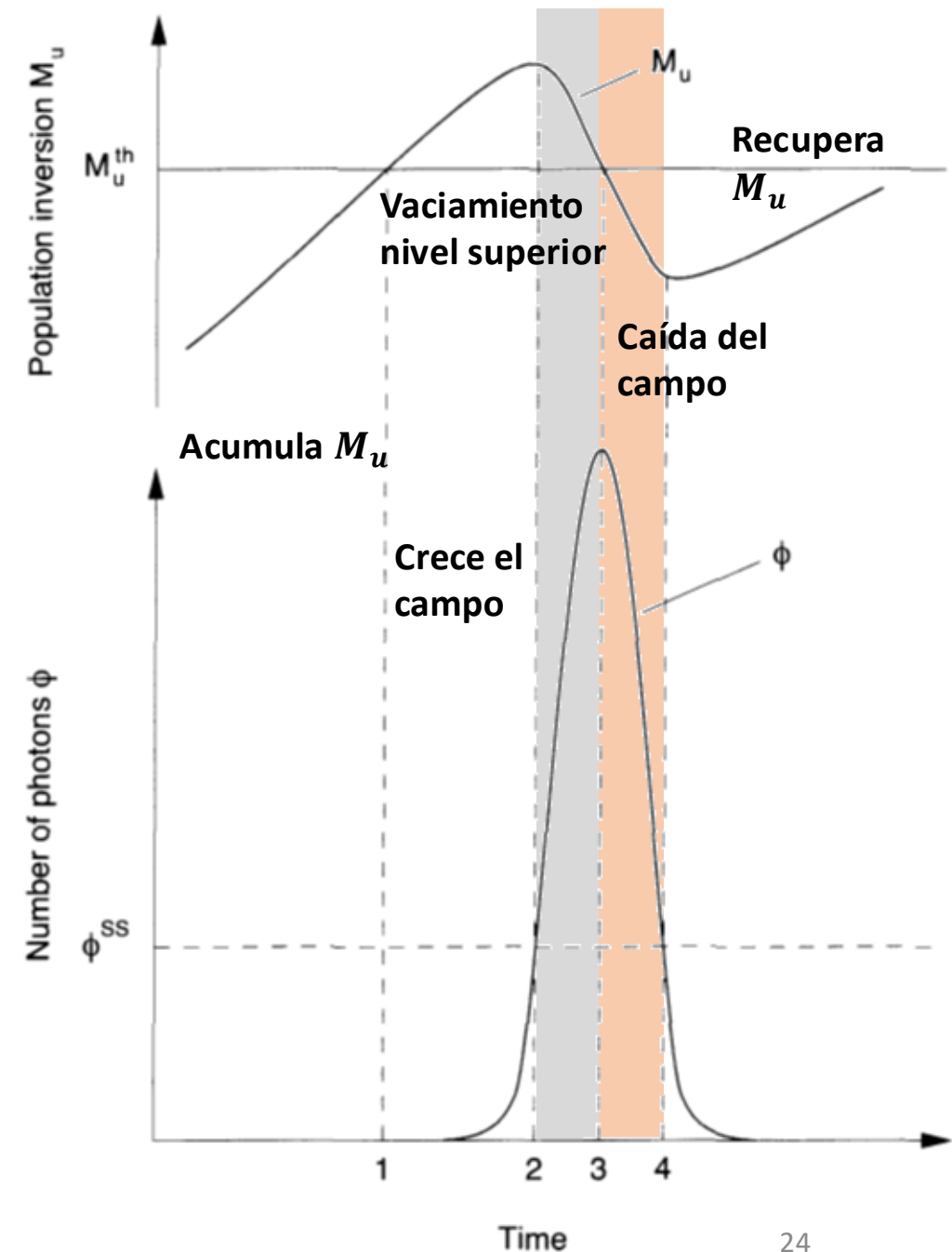
2-3) Vaciamiento del nivel superior

Cuando $K M_u (\phi) \gg \frac{\phi}{\tau_c}$ (perdidas por los espejos),

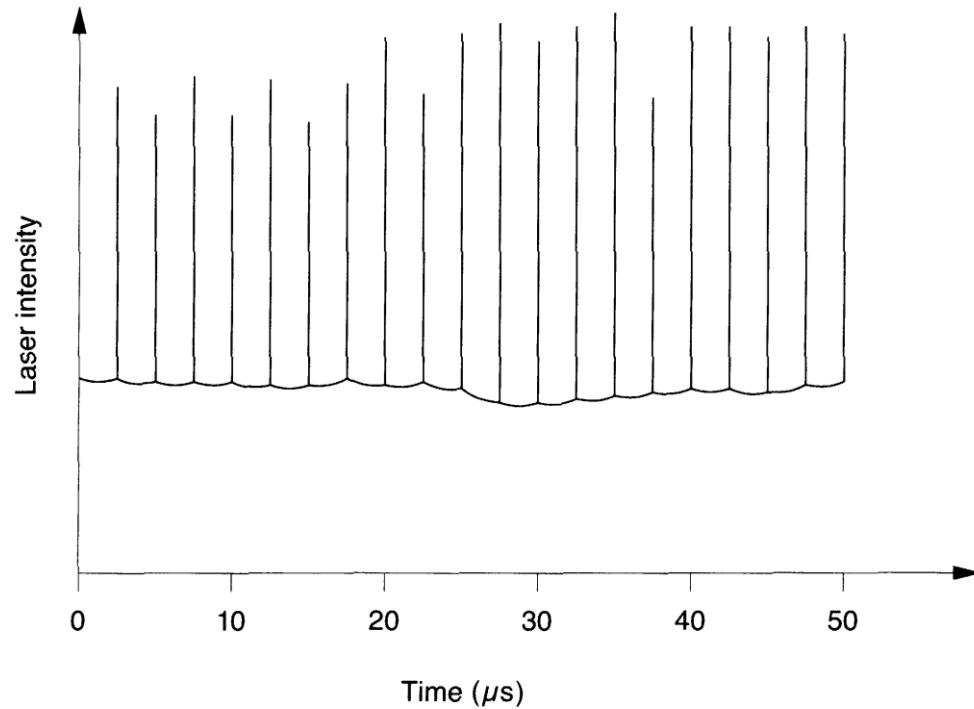
- ϕ crece mucho más rápido
 - M_u decrece (termino negativo en ec 2)
- (extraigo población del nivel u para soportar el rápido crecimiento de ϕ)

3-4) Caída de M_u por debajo del umbral

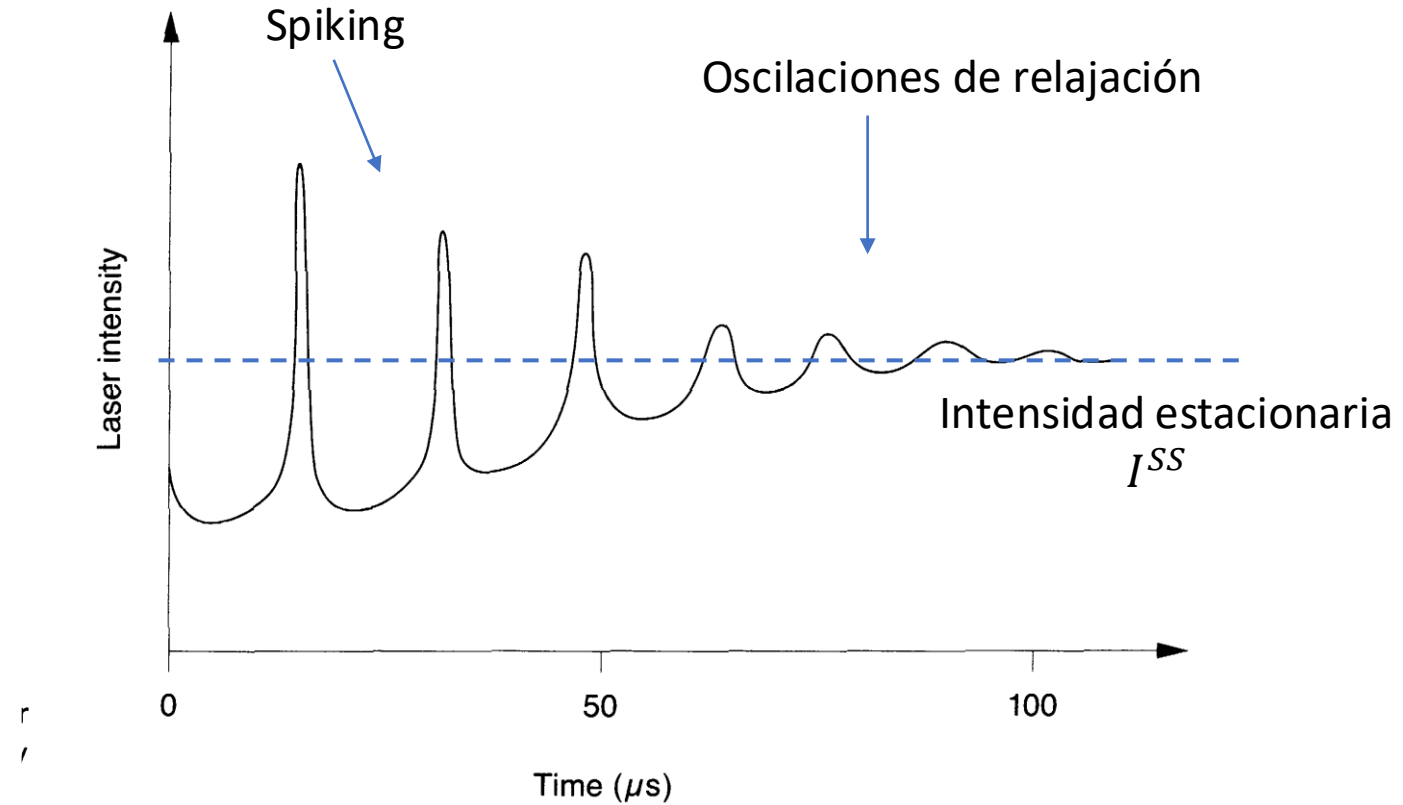
La población de M_u por debajo del umbral, ϕ comienza a bajar



Soluciones dependientes del tiempo: spiking



(a)



Soluciones dependientes del tiempo: oscilaciones de relajación

Si estamos muy por encima del umbral $\phi^{ss} \gg 1$

- Desprecio emisión espontánea (el término +1)
- $M_u^{ss} = M_u^{th}$

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi^{ss} + \phi(t), \\ M_u &\rightarrow M_u^{ss} + M(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) &\ll \phi^{ss} \\ M(t) &\ll M_u^{ss}\end{aligned}$$

$$M_u^{th} = \frac{1}{K\tau_c} \quad \phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th}K} (P_u - P_u^{th})$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c} \\ \frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - \frac{M_u}{\tau_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c} = K (M_u^{ss} + M(t)) (\phi^{ss} + \phi(t)) - \frac{\phi^{ss} + \phi(t)}{\tau_c} = \frac{d\phi(t)}{dt} \\ \frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - \frac{M_u}{\tau_u} = P_u - K (M_u^{ss} + M(t)) (\phi^{ss} + \phi(t)) - \frac{M_u^{ss} + M(t)}{\tau_u} = \frac{dM(t)}{dt} \end{cases}$$

Fluctuaciones a la salida del láser: oscilaciones de relajación

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = \cancel{K M_u^{ss} \phi^{ss}} + \cancel{K M_u^{ss} \phi(t)} + \cancel{K M(t) \phi^{ss}} + \cancel{K M(t) \phi(t)} - \cancel{\frac{\phi^{ss}}{\tau_c}} - \frac{\phi(t)}{\tau_c} \\ \frac{dM(t)}{dt} = \cancel{P_u} - \cancel{K M_u^{ss} \phi^{ss}} - \cancel{K M_u^{ss} \phi(t)} - \cancel{K M(t) \phi^{ss}} - \cancel{K M(t) \phi(t)} - \cancel{\frac{M^{ss}}{\tau_u}} - \frac{M(t)}{\tau_u} \end{cases}$$

$$M_u^{ss} = M_u^{th} = \frac{1}{K\tau_c}$$

$$\phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th} K} (P_u - P_u^{th})$$

$$P_u^{th} \approx M_u^{th} / \tau_u$$

— Se simplifican porque son soluciones de las ecs. estacionarias

— Desprecio fluctuaciones de segundo orden

Fluctuaciones a la salida del láser: oscilaciones de relajación

Son iguales

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = KM_u^{ss} \phi(t) + K M(t) \phi^{ss} - \frac{1}{\tau_c} \phi(t) = +K M(t) \phi^{ss} \\ \frac{dM(t)}{dt} = -KM_u^{ss} \phi(t) - K M(t) \phi^{ss} - \frac{M(t)}{\tau_u} = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \left(K \phi^{ss} + \frac{1}{\tau_u} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = K M(t) \phi^{ss} = M(t) \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{1}{\tau_u} \right) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{1}{\tau_u} + \frac{1}{\tau_u} \right) = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \frac{P_u}{M_u^{th}} \end{cases}$$

$$M_u^{ss} = M_u^{th} = \frac{1}{K\tau_c}$$

$$\phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th} K} (P_u - P_u^{th})$$

$$\phi^{ss} \approx \frac{1}{K} \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{P_u^{th}}{M_u^{th}} \right)$$

$$P_u^{th} \approx M_u^{th} / \tau_u$$

$$\phi^{ss} \approx \frac{1}{K} \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{1}{\tau_u} \right)$$

Fluctuaciones a la salida del láser: oscilaciones de relajación

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = M(t) \left(\frac{P_u}{M_u^{th}} - \frac{1}{\tau_u} \right) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \frac{P_u}{M_u^{th}} \end{cases}$$

Adimensionalizar el bombeo

$$\frac{P_u}{M_u^{th}} = \frac{P_u^{th}}{M_u^{th}} \frac{P_u}{P_u^{th}} = \frac{1}{\tau_u} R$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_u} M(t) (R - 1) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \frac{1}{\tau_u} R \end{cases}$$

Dos ecuaciones acopladas lineales

Proponemos soluciones exponenciales

$$\begin{aligned} \phi(t) &\approx e^{st} \\ M(t) &\approx e^{st} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} s & -(R-1)/\tau_u \\ 1/\tau_c & s + R/\tau_u \end{vmatrix} = 0$$

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2\tau_u} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2\tau_u}\right)^2 - (R-1)/\tau_u\tau_c}$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = M(t) \frac{1}{\tau_u} (R - 1) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \phi(t) - M(t) \frac{1}{\tau_u} R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &\approx e^{st} \\ M(t) &\approx e^{st} \end{aligned}$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2\tau_u} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2\tau_u}\right)^2 - (R-1)/\tau_u\tau_c}$$

Busco soluciones oscilatorias

$$\text{Si } \left(\frac{R}{2\tau_u}\right)^2 - \frac{(R-1)}{\tau_u\tau_c} < 0 \rightarrow \left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{1}{\tau_u} < \frac{(R-1)}{\tau_c} \rightarrow \frac{R}{4} < \frac{\tau_u}{\tau_c}$$

- $R \gg 1$ (bombeo muy por encima del umbral), entonces $R - 1 \sim R$
- $\tau_u \gg \tau_c$ el medio almacena energía mucho más tiempo que los fotones permanecen en la cavidad

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2\tau_u} \pm \sqrt{-\left(\frac{R}{2\tau_u}\right)^2 + \frac{(R-1)}{\tau_u\tau_c}} = -\gamma_{sp} \pm j \omega'_{sp}$$

$$M_u(t) = M^{SS} + M_o e^{-\gamma_{sp} t} \cos(\omega'_{sp} t + \psi)$$

$$\phi(t) = \phi^{SS} + \phi_o e^{-\gamma_{sp} t} \cos(\omega'_{sp} t)$$

$$s_{1,2} = -\gamma_{sp} \pm \sqrt{-(\gamma_{sp})^2 + \omega_{sp}^2} = -\gamma_{sp} \pm j \omega'_{sp}$$

γ_{sp} amortiguamiento

ω_{sp} frecuencia de la oscilación de relajación

Ejemplo: láser de Nd:YAG bombeado dos veces por encima del umbral

Ejemplo, para un láser de Nd:Yag, bombeado 2 veces por encima del umbral

Características de la cavidad

$L=10\text{mm}$ (largo del medio activo)

$d=200\text{ mm}$

$\alpha \sim 0$ pérdidas distribuidas

$R_1 \sim 99.9\%$

$R_2 \sim 90\%$

$\eta = 1.82$

Tiempo de vida de los fotones en la cavidad

$$\tau_c = \frac{\eta d}{c[\alpha L - \ln(R_1 R_2)^{1/2}]} = 22.8\text{ ns}$$

$$\frac{\tau_c}{T_{RT}} \sim 19$$

Recorridos antes de decaer
significativamente

Tiempo que tarda la luz en recorrer la cavidad (round trip)

$$T_{RT} = \frac{\eta d}{c} = 1.2\text{ ns}$$

Frecuencia de la oscilación de relajación y tasa de decaimiento

$R = 2$

$\tau_u = 230\text{ }\mu\text{s}$

$$\omega_{sp} = \sqrt{\frac{(R-1)}{\tau_u \tau_c}} \approx 70\text{ kHz} \quad \rightarrow \quad T_{sp} = \frac{2\pi}{\omega_{sp}} = 9\text{ }10^{-5}\text{ s}$$

$$\gamma_{sp} = \frac{R}{2\tau_u} \approx 4.3\text{ }10^3/\text{s}$$

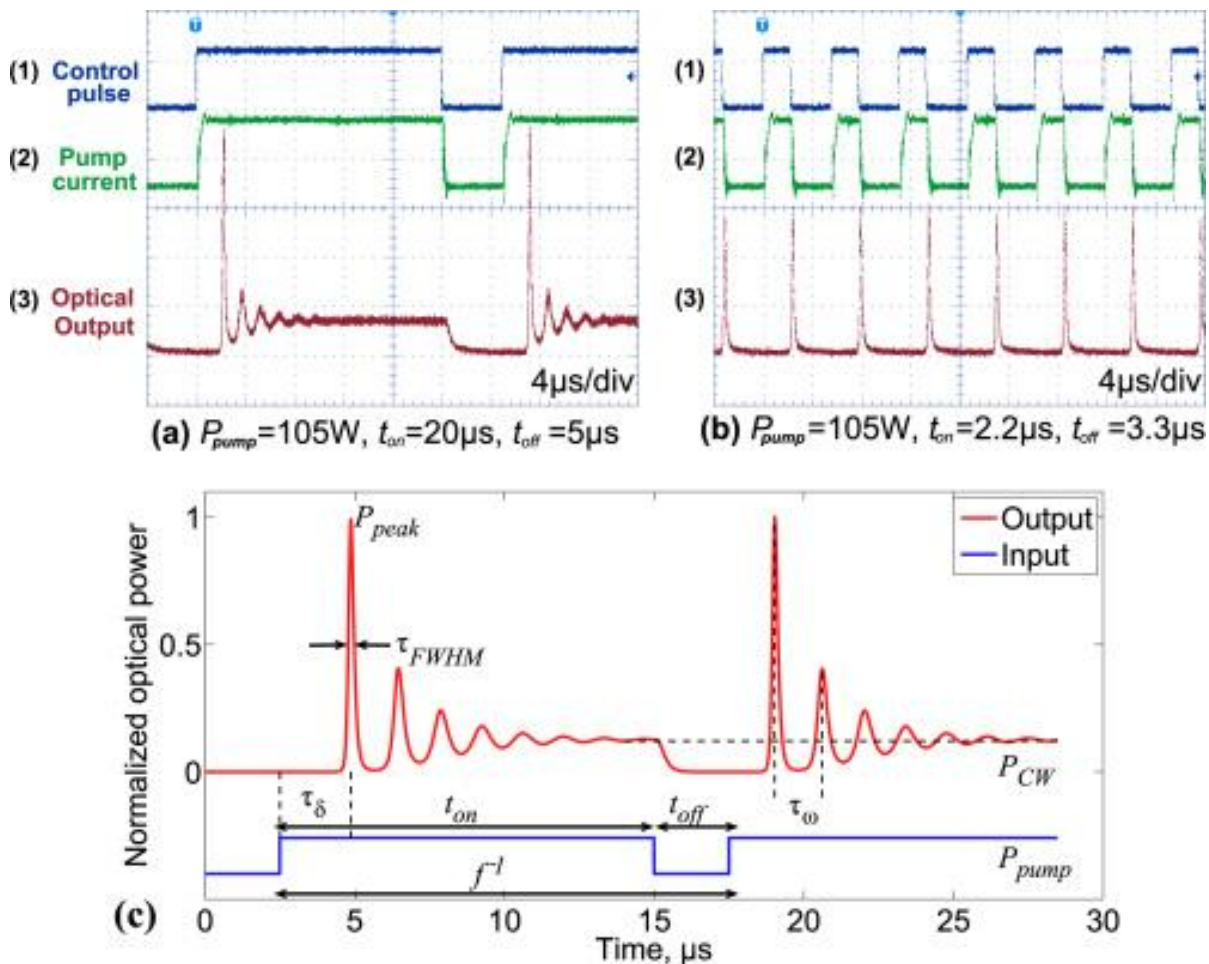
$$\frac{T_{sp}}{T_{RT}} = \frac{9\text{ }10^{-5}\text{ s}}{1.2\text{ }10^{-9}\text{ s}} \approx 10^4$$

$$Q = \frac{\omega_{sp}}{\gamma_{sp}} = \frac{70\text{ }10^3\text{ Hz}}{8.7\text{ }10^3\text{ /s}} \approx 8$$

La OR es una oscilación muy lenta y amortiguada

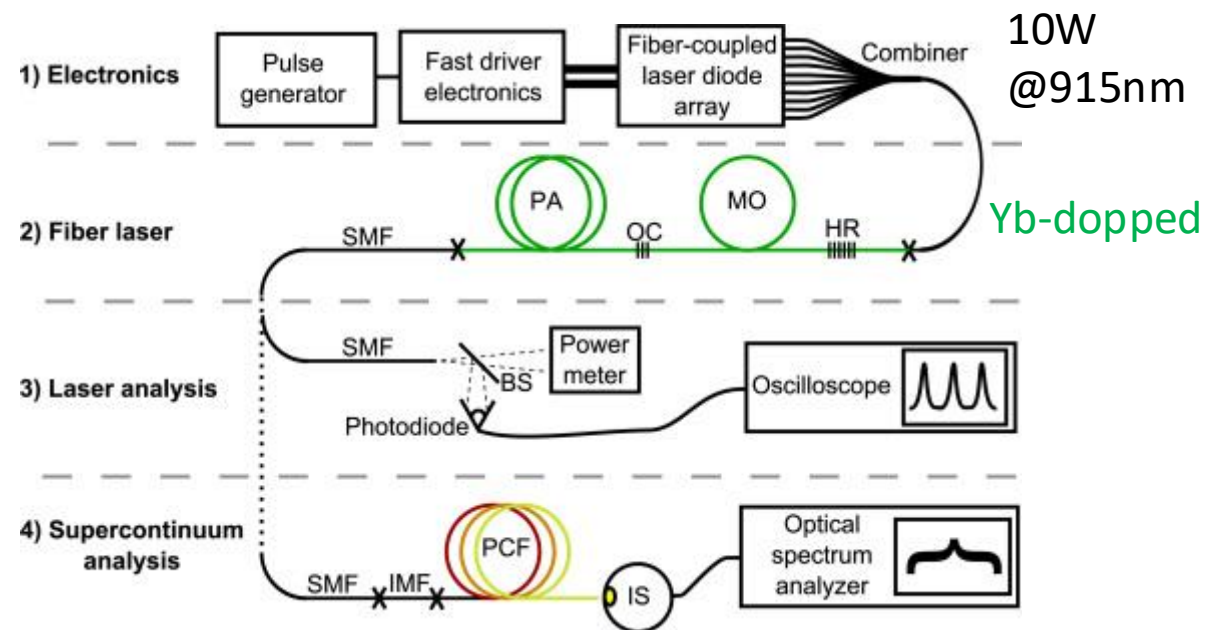
Fluctuaciones a la salida del láser: láser de fibra dopada

Gain Switching en laser de fibra bombeado con Yb



Gain Switching $\rightarrow$ modula la ganancia

Q-Switching. $\rightarrow$ modula las pérdidas en la cavidad



Opt. Express 19, 14883-14891 (2011)

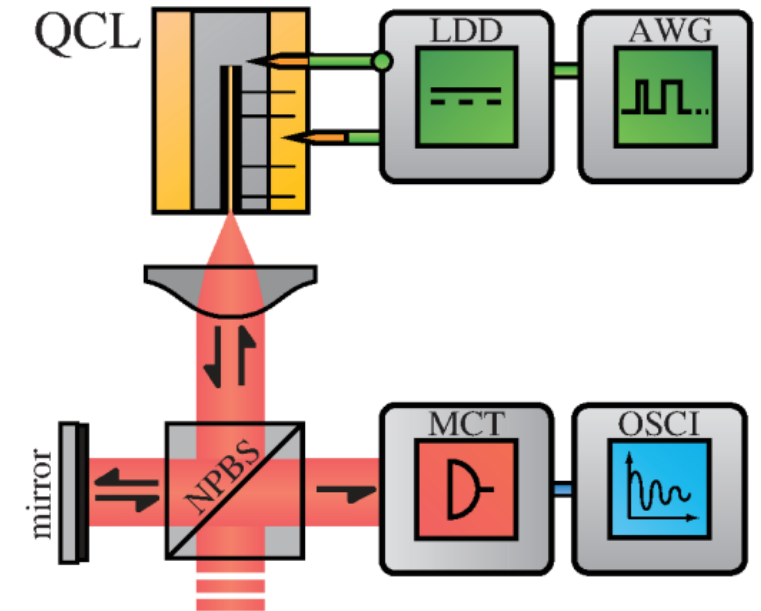
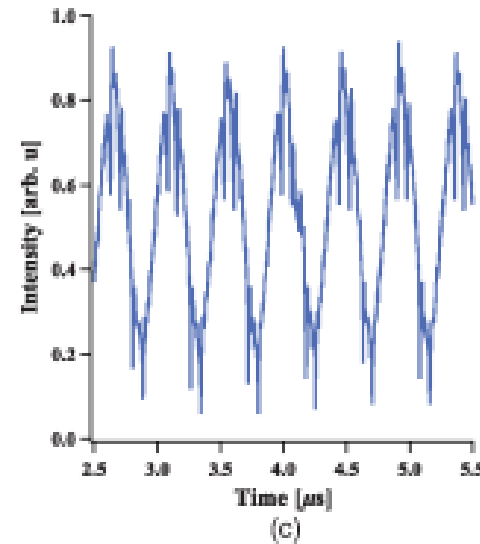
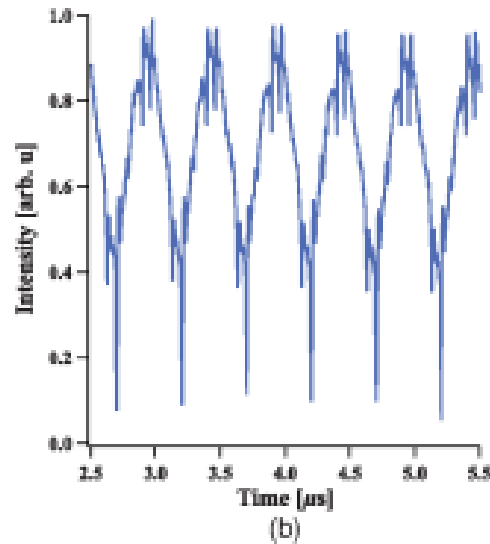
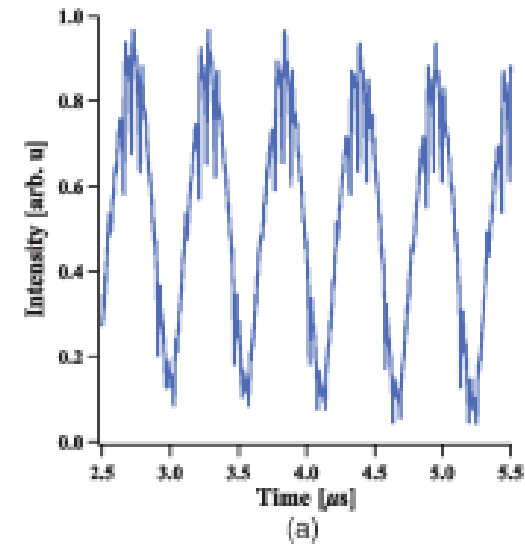
Fluctuaciones a la salida del láser: QCL



(a) 1.8 MHz,

(b) 2 MHz, and

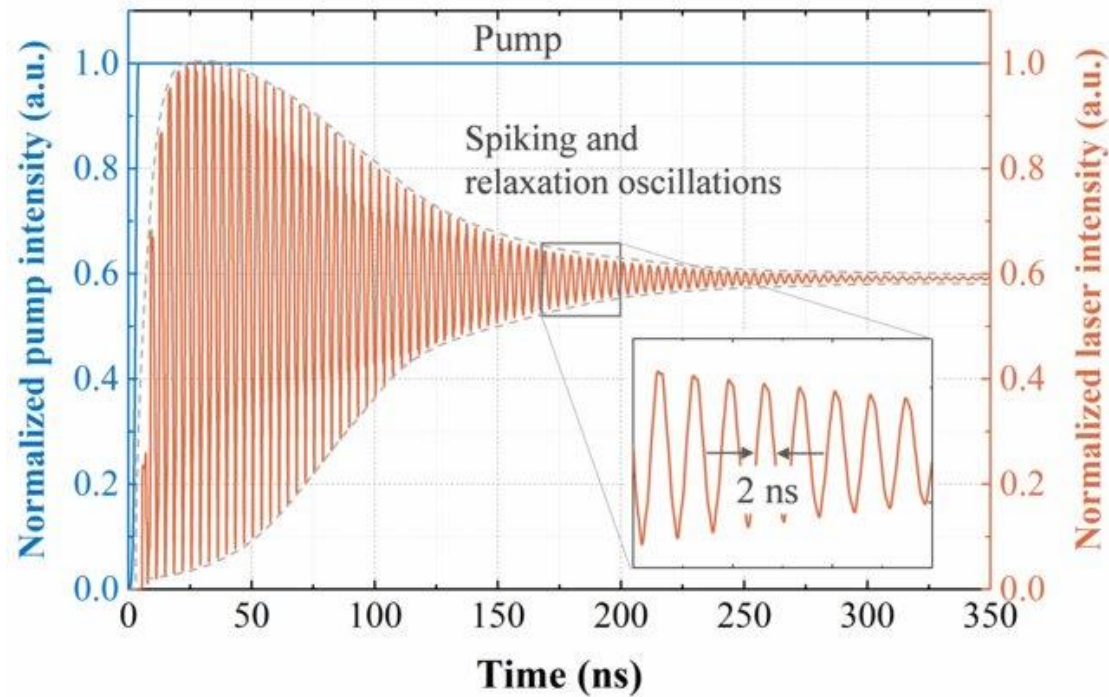
(c) 2.2 MHz;



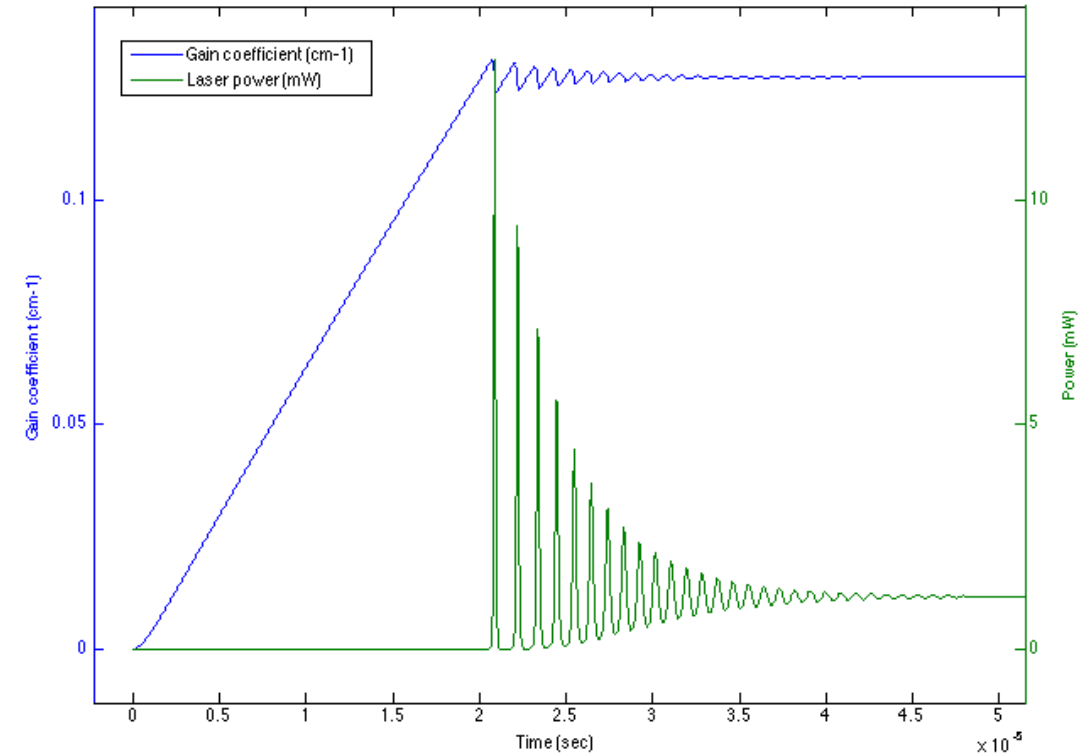
Corriente continua de 430 mA modulada senoidalmente con amplitud de 120 mA

Advanced Photonics, 2(6), 066001 (2020).
<https://doi.org/10.1117/1.AP.2.6.066001>

Fluctuaciones a la salida del laser: simulaciones



diode-pumped alkali vapor laser (DPAL)



Nd:Yag

<https://medium.com/@singhkul004/relaxation-oscillations-d94512200fd0>

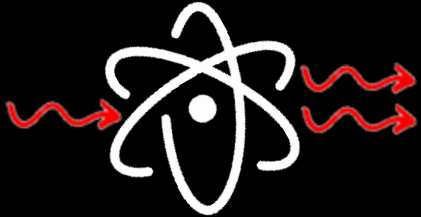
Optics Express 28(13) (2020)

•DOI: [10.1364/OE.395871](https://doi.org/10.1364/OE.395871)

Prof. MG Capeluto

- 1) La intensidad intracavidad crece por emisión estimulada; ese crecimiento satura la ganancia hasta que $g(I_{ss}) = g_{th}$. (g_{th} = pérdidas de cavidad)
- 2) Optimización del espejo de salida (*output coupler*) para obtener la mayor potencia de salida posible en función de los parámetros de la cavidad (pérdidas internas, transmisión del espejo y ganancia de baja señal)
- 3) Intercambio de energía entre la almacenada en el nivel superior y la de los fotones láser en la cavidad
 - estado estacionario por encima y debajo del umbral
 - estados transitorios: spiking y oscilaciones de relajación

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

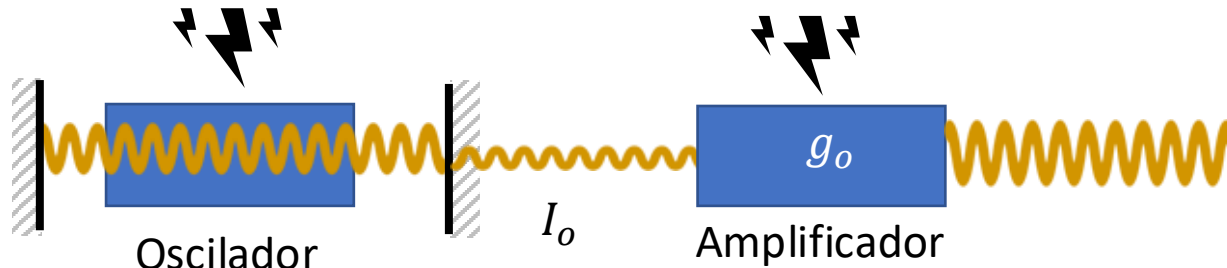
Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

1. **Condición necesaria para obtener ganancia en un medio activo:** inversión de población $\Delta N_{ul} > 0$
2. **Ganancia acumulada y saturación:** para que el campo crezca de manera apreciable, la ganancia debe superar las pérdidas y la intensidad puede alcanzar valores del orden de I_{sat}
3. **Saturación de la ganancia:** el campo crece por emisión estimulada, pero al crecer reduce la inversión de población; por eso la ganancia disminuye hasta igualar la ganancia umbral $g(I_{ss}) = g_{th}$ (en el modo de la cavidad)
4. **Optimización del espejo de salida:** existe un valor óptimo de transmisión del output coupler que maximiza la potencia útil, en función de la ganancia disponible y de las pérdidas internas de la cavidad.
5. **Dinámica temporal del láser:** intercambio de energía entre la población del nivel superior y los fotones en la cavidad.
 - Estado estacionario por debajo y por encima del umbral.
 - Estados transitorios: *spiking* y oscilaciones de relajación.

si ya optimicé el oscilador y quiero obtener más energía o más potencia, ¿qué hago?



Oscilador:

Genera campo óptico estable autosostenido compensando ganancia y pérdidas

Amplificador:

- Amplificar exponencialmente un laser de baja potencia (preservando sus características espaciales, temporales, espectrales)
- Agregar energía a un haz que ya es intenso

Láseres continuos: régimen de baja señal

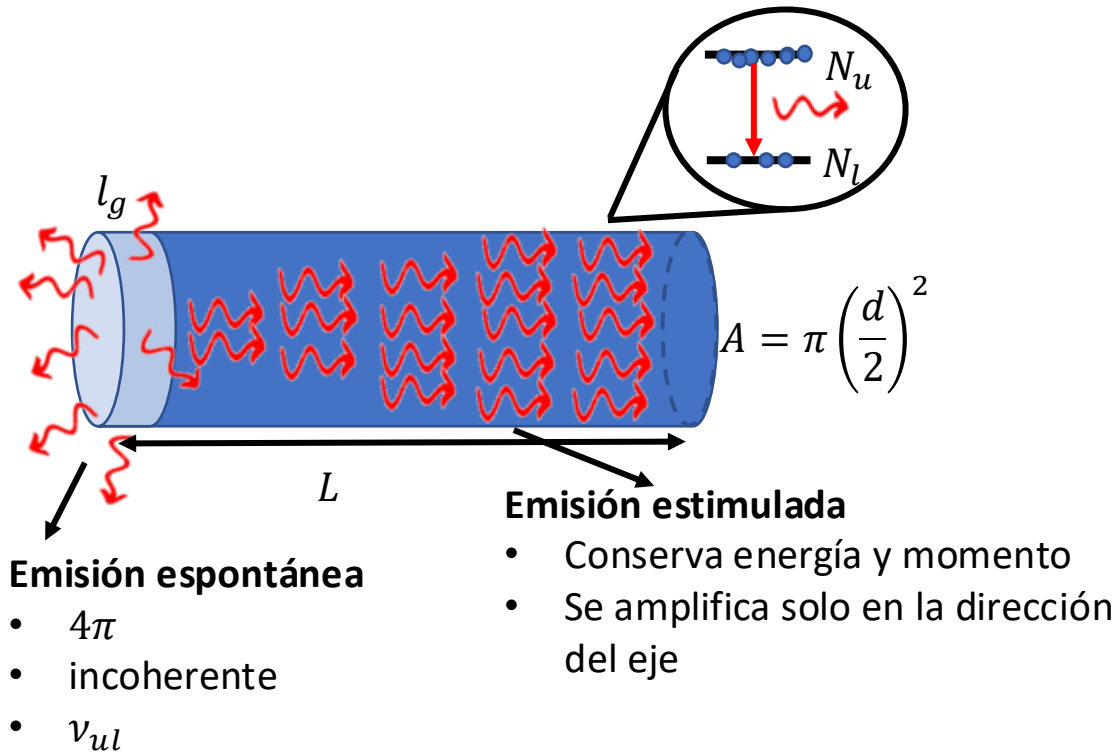
$I_{\text{espontánea}} \ll I_o \ll I_{\text{sat}}$ (del ampli): buscamos amplificación exponencial

$I_o e^{g_o L} < I_{\text{sat}}$ (para que el crecimiento se mantenga exponencial y no se transforme en lineal)

$$I_o < I_{\text{sat}} e^{-g_o L} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau \sigma_{ul}^H} e^{-g_o L}$$

Amplificación de la emisión espontánea compite con amplificación del laser

$$I_o \sim (10 - 100) I_{\text{espontánea}}$$



Energía radiada por emisión espontánea en 4π del volumen $l_g A$

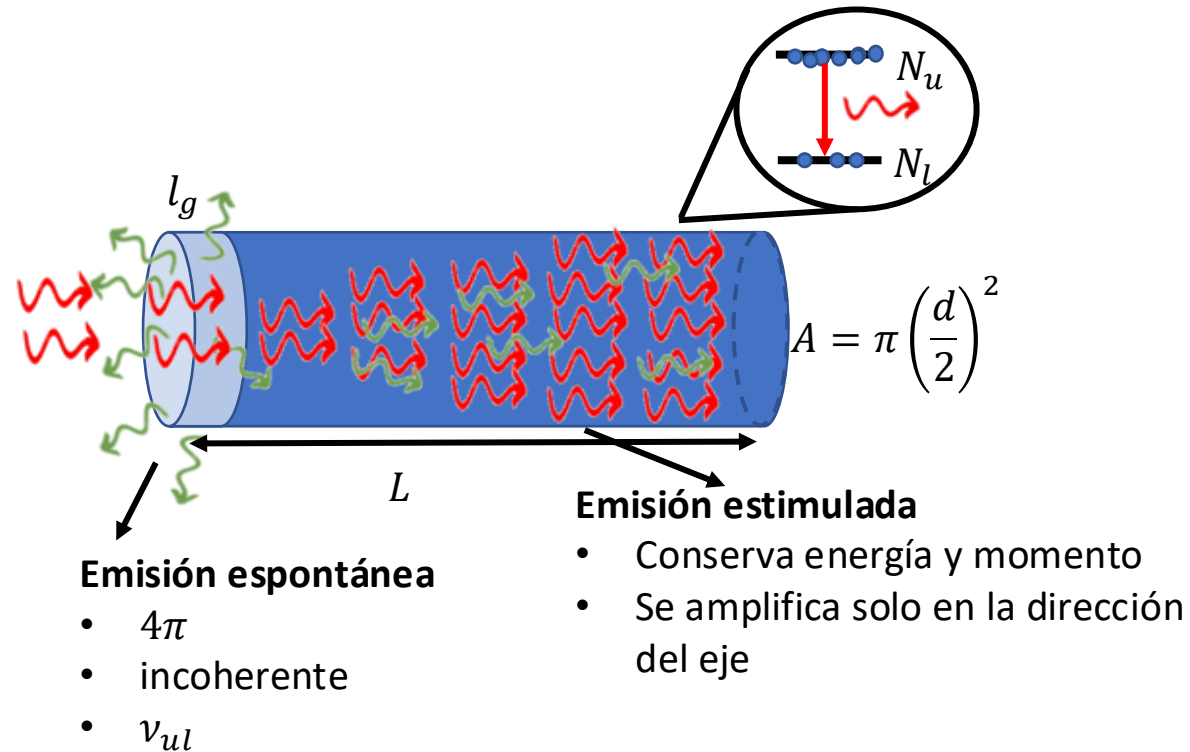
Fracción de ángulo sólido $\frac{A/L_{SAT}^2}{4\pi}$

$$(N_u A_{ul}) \cdot (A l_g) \cdot h\nu_{ul} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} e^{\sigma_{ul}(\nu) N_u L_{SAT}} \frac{1}{A} = I_{SAT} = \frac{h\nu_{ul}}{\tau_u \sigma_{ul}^H(\nu)}$$

ganancia para alcanzar I_{SAT}

Aquí necesitábamos la emisión espontánea como semilla para iniciar el proceso de amplificación

ASE: Amplificación de emisión espontánea



Dado un valor de ganancia en el medio amplificador, queremos que amplificación de ASE sea despreciable frente a lo

$$I_o \gg I_{sp}$$

$$I_o \sim (10 - 100) I_{sp}$$

Contribución de ASE (ruido en el amplificador)

Energía radiada por emisión espontánea en 4π del volumen $l_g A$

Fracción de ángulo sólido $\frac{A/L_{SAT}^2}{4\pi}$

ganancia

$$(N_u A_{ul}) \cdot (A l_g) \cdot h\nu_{ul} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} e^{\sigma_{ul}(\nu) N_u L} \frac{1}{A} = I_{ASE} = I_{sp} e^{gL}$$

- No coherente
- Degrada la calidad del haz
- Consume parte de la energía almacenada en el medio
- Limita la ganancia útil del amplificador

LASER

$$I_{LASER} = I_o e^{gL}$$

Amplificadores



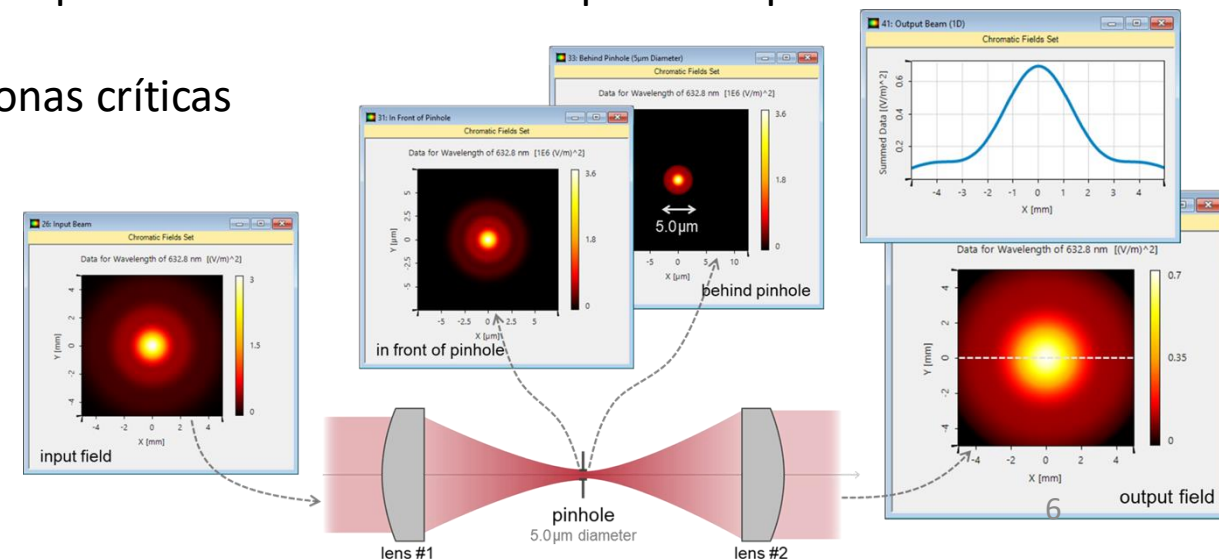
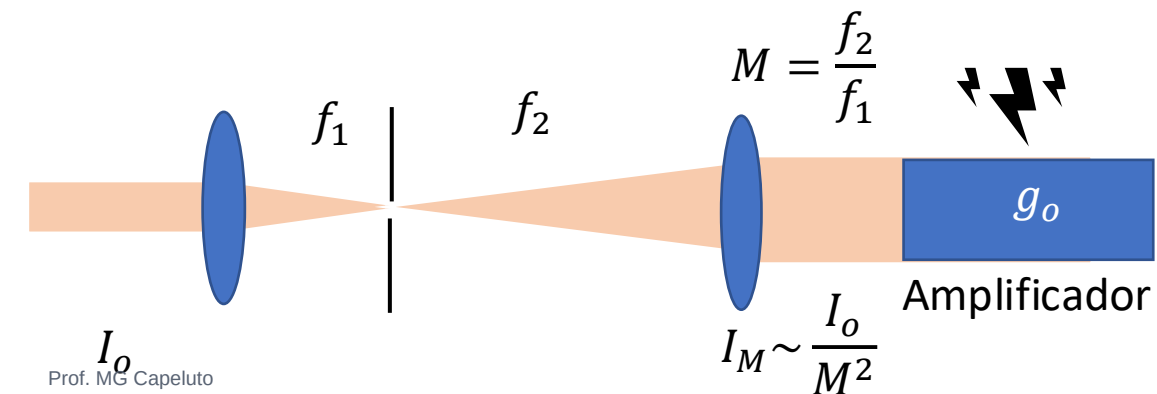
Láseres continuos: régimen de señal intensa

$$I_o > I_{sat}$$

Buscamos extraer eficientemente la energía almacenada en la inversión de población y transferirla al haz por emisión estimulada.

$$I(z) = I_o + g_o z I_{sat}$$

- Volumen del haz y volumen del medio de ganancia lo más parecidos posibles para provechar toda la ganancia
- Se puede aumentar el tamaño del haz (siempre y cuando se siga cumpliendo $I_o > I_{sat}$)
 - aprovechar mejor la energía almacenada
 - reducir la intensidad para la misma potencia $\rightarrow$ reducir la posibilidad de daño de la óptica o ruptura dieléctrica del medio
 - en sistemas de alta potencia, trabajar en vacío en las zonas críticas



Propagación lineal:

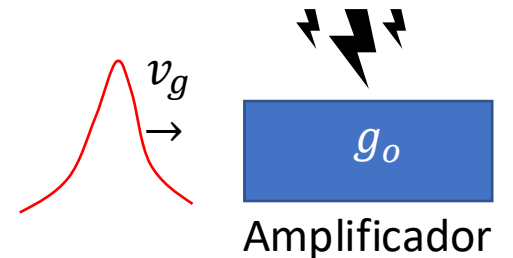
$v_g, v_f, GVD, TOD....$  Importante cuando los pulsos son muy cortos, y dispersiones grandes

Propagación no lineal

- Saturación no lineal de la ganancia
- Propagación no lineal en medios dispersivos, auto modulación de fase, solitones, etc)
- Generación de armónicos, FWM, absorción multifotónica...

Saturación no lineal de la ganancia:

- Si la fluencia del pulso es suficiente para saturar el amplificador en un pasaje, la ganancia cambia durante el paso del pulso a ganancia se reduce cuando pasa el pulso (la ganancia varia con el tiempo)
- Si la ganancia varia en el tiempo, el pulso se amplifica, pero también se distorsiona



Propagación de pulsos en amplificadores

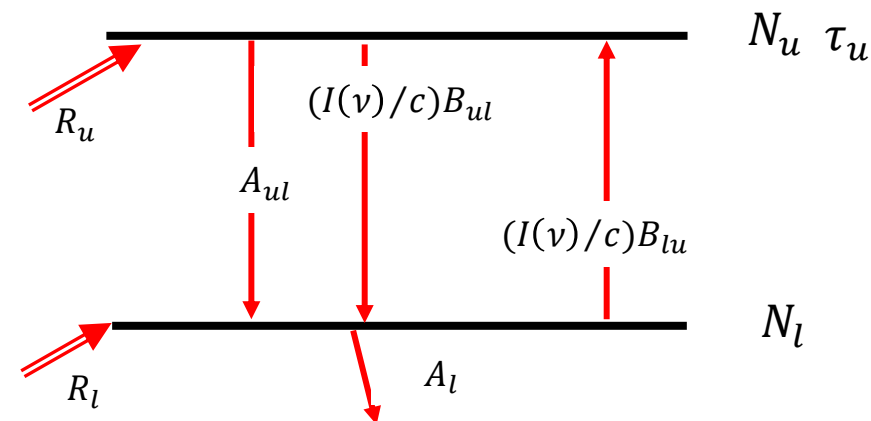


Láseres de alta potencia y pulsos cortos

Ecuaciones para la población total de los niveles laser M_u y M_l

$$\begin{aligned}\frac{dM_u}{dt} &= P_u - K(M_u - M_l)\phi - \frac{M_u}{\tau_u} \\ \frac{dM_l}{dt} &= P_l + K(M_u - M_l)\phi - \frac{M_l}{\tau_l}\end{aligned}$$

$$M_u = V_g N_u, \quad M_l = V_g N_l, \quad P_u = V_g R_u$$



- $\tau_p \ll \tau_u, \tau_l \rightarrow$ despreciamos tanto los efectos del bombeo como relajación de los niveles inferior y superior durante la propagación del pulso
- τ_p grande o distancias de propagación cortas como para despreciar efectos dispersivos lineales (compresión, expansión, GVD, etc)
- $\Delta N_{ul}(x, t_o) > 0$ desde antes que se propague el pulso

Propagación de pulsos en amplificadores



$$\tau_p \ll \tau_u, \tau_l \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_u}{dt} &= \cancel{P_u} - K(M_u - M_l)\phi - \cancel{\frac{M_u}{\tau_u}} \\ \frac{dM_l}{dt} &= \cancel{P_l} + K(M_u - M_l)\phi - \cancel{\frac{M_l}{\tau_l}} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d(M_u - M_l)}{dt} = -2K(M_u - M_l)\phi$$

$$K = \frac{\sigma_{ul}}{V_C} \frac{c}{\eta}$$

$$u = \frac{I}{c} \eta = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{\phi h \nu_{ul}}{V_C}$$

$$\phi = \frac{I \eta V_C}{c h \nu_{ul}}$$

$$\frac{d(M_u - M_l)}{dt} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{V_C} \frac{c}{\eta} (M_u - M_l) \frac{I \eta V_C}{c h \nu_{ul}}$$

$$\frac{d(M_u - M_l)}{V_g dt} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h \nu_{ul}} \frac{(M_u - M_l)}{V_g} I$$



$$\frac{d(N_u - N_l)}{dt} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h \nu_{ul}} (N_u - N_l) I$$

$$\frac{d\Delta N_{ul}}{dt} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h \nu_{ul}} \Delta N_{ul} I$$

Propagación de pulsos en amplificadores



Ecuación de propagación para la intensidad

$$\frac{d\phi}{dt} = K(M_u - M_l)\phi + \cancel{KM_u} - \cancel{\frac{\phi}{\tau_c}}$$

- Medio amplificador sin cavidad (desprecio pérdidas)
- Haz de alta intensidad se propaga en una única dirección, desprecio emisión espontánea en la dirección del haz

En un pulso $\phi = \phi(z, t), I = I(z, t)$

$$\frac{d\phi(z, t)}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_g = v_f = \frac{c}{\eta}$$

- Desprecio efectos dispersivos: longitud de propagación corta o $\frac{d^2\omega}{dk^2} \approx 0$

$$K = \frac{\sigma_{ul}}{V_c} \frac{c}{\eta}$$

$$N = \frac{M}{V_c}$$

$$\phi = \frac{I\eta V_c}{c h\nu_{ul}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} = K(M_u - M_l)\phi$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial I}{\partial z} = \sigma_{ul} \frac{c}{\eta} (N_u - N_l) I$$

Coefficiente de ganancia

$$g = \sigma_{ul} (N_u - N_l) = \sigma_{ul} \Delta N_{ul}$$
$$I \approx 0 \rightarrow g = g_0$$

Propagación de pulsos en amplificadores



Ecuación de propagación para la intensidad

$$\frac{d\phi}{dt} = K(M_u - M_l)\phi + \cancel{KM_u} - \cancel{\frac{\phi}{\tau_c}}$$

- Medio amplificador sin cavidad (desprecio pérdidas)
- Haz de alta intensidad se propaga en una única dirección, desprecio emisión espontánea en la dirección del haz

En un pulso $\phi = \phi(z, t), I = I(z, t)$

$$\frac{d\phi(z, t)}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_g = v_f = \frac{c}{\eta}$$

- Desprecio efectos dispersivos: longitud de propagación corta o $\frac{d^2\omega}{dk^2} \approx 0$

$$K = \frac{\sigma_{ul}}{V_c} \frac{c}{\eta}$$

$$N = \frac{M}{V_c}$$

$$\phi = \frac{I\eta V_c}{c h\nu_{ul}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} = K(M_u - M_l)\phi$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial I}{\partial z} = \sigma_{ul} \frac{c}{\eta} (N_u - N_l) I$$

Corregir error libro

Coefficiente de ganancia

$$g = \sigma_{ul} (N_u - N_l) = \sigma_{ul} \Delta N_{ul}$$
$$I \approx 0 \rightarrow g = g_0$$

Propagación de pulsos en amplificadores



$$\frac{d\Delta N_{ul}}{dt} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h\nu_{ul}} \Delta N_{ul} I$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial I}{\partial z} = \sigma_{ul} \frac{c}{\eta} \Delta N_{ul} I$$

Ecuaciones en coordenadas de laboratorio

1) Transformación a coordenadas que se mueven con el pulso (el pulso se propaga hacia $z+$)

$$\begin{aligned} z' &\rightarrow z \\ t' &\rightarrow t - z/v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta N'_{ul}(z', t') &= \Delta N_{ul}(z, t) \\ I'(z', t') &= I(z, t) \end{aligned}$$

$$I'(z', t') = I(z, t)$$

Ecuaciones en coordenadas solidarias al pulso

$$\frac{dI'(z', t')}{dt} = \frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'}$$

$$\frac{dI'(z', t')}{dz} = \frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} = \frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'} \left(-\frac{1}{v}\right) + \frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} = \sigma_{ul} \Delta N'_{ul} I'(z', t')$$

$$\cancel{\frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'}} + \frac{c}{\eta} \left(\cancel{\frac{\partial I'(z', t')}{\partial t'}} \left(-\frac{1}{v}\right) + \frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} \right) = \sigma_{ul} \frac{c}{\eta} \Delta N_{ul} I'(z', t')$$

$$\frac{\partial \Delta N'_{ul}(z', t')}{\partial t'} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h\nu_{ul}} \Delta N'_{ul} I'(z', t')$$

$$\frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} = \sigma_{ul} \Delta N'_{ul} I'(z', t')$$

$$\int_{I_o}^{I_{out}} \frac{dI'}{I'} = \sigma_{ul} \int_0^L \Delta N'_{ul}(z', t') dz' = \sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')$$

$$I_{out}(t') = I_o(t') e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} = G(t') I_o(t')$$

$\Delta N_{ul}^{tot}(t')$ inversión de población integrada a lo largo del amplificador

Ganancia exponencial $G(t') = e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}$

si la inversión de población no cambia a lo largo del pulso, recuperamos el resultado anterior $\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = g_o L$

$$\frac{d\Delta N'_{ul}(z', t')}{dt'} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h\nu_{ul}} I'(z', t') \Delta N'_{ul}(z', t')$$

$$\Delta N_{ul} = \Delta N_{ul}^o \exp \left\{ - \left(2^* \frac{\sigma_{ul}}{h\nu_{ul}} \int_{-\infty}^t I(z', t') dt' \right) \right\}$$

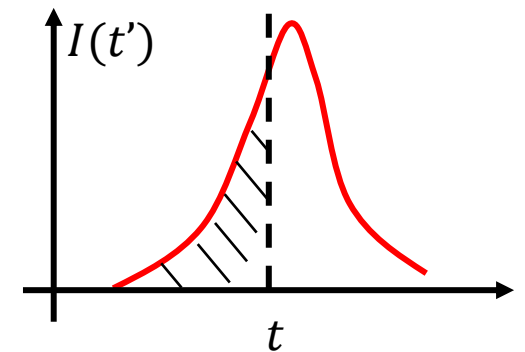
Fluencia (energía por unidad de área [J/cm²])

$$F(t) = \int_{-\infty}^t I(z', t') dt'$$



Energía acumulada hasta el tiempo t'

$$F_{SAT} = \frac{h\nu_{ul}}{\delta \sigma_{ul}} \quad \delta = 2^* \begin{cases} 2 \text{ si el nivel inferior acumula población} \\ 1 \text{ si el nivel inferior se vacía rápido (láseres de estado sólido)} \end{cases}$$



$$\Delta N_{ul} = \Delta N_{ul}^o \exp \left\{ - \frac{F(t)}{F_{SAT}} \right\}$$

La saturación ocurre cuando $F(t) = F_{SAT}$

$$g = \sigma_{ul} \Delta N_{ul}$$

Cuando $F(t) = F_{SAT}$ la ganancia se reduce a $\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^o / e$

$$\frac{d\Delta N'_{ul}(z', t')}{dt'} = -2 \frac{\sigma_{ul}}{h\nu_{ul}} \Delta N'_{ul}(z', t') I'(z', t')$$

$$\frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} = \sigma_{ul} \Delta N'_{ul} I'(z', t')$$


$$\frac{d\Delta N'_{ul}(z', t')}{dt'} = -\frac{2}{h\nu_{ul}} \frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'}$$

Integro en la longitud del amplificador

$$\frac{d}{dt'} \int_0^L \Delta N'_{ul}(z', t') dz' = -\frac{2}{h\nu_{ul}} \int_0^L \frac{\partial I'(z', t')}{\partial z'} dz'$$

$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} (I_{out}(t') - I_o(t'))$$

Conservación de energía: el pulso extrae energía almacenada en la inversión de población

Derivación de Frantz–Nodvik: ganancia instantánea y fluencia

$$I_{out}(t') = I_o(t') e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} = G(t') I_o(t')$$


$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} (I_{out}(t') - I_o(t'))$$

$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} (e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} - 1) I_o(t')$$

$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} (1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}) I_{out}(t')$$

$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} \left(e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} - 1 \right) I_o(t')$$

$$\int_{\Delta N_o}^{\Delta N_{ul}^{tot}(t')} \frac{1}{\left(e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}} - 1 \right)} d\Delta N_{ul}^{tot} = -\frac{2}{h\nu_{ul}} \int_{-\infty}^{t'} I_o(t') dt' = -\frac{2}{h\nu_{ul}} F_o(t')$$

*Inversión de población total inicial
(antes de la llegada del pulso)*

$$\Delta N_{ul}^{tot,o} = \Delta N_o = \int_{z=0}^{z=L} \Delta N_{ul}(z, t_o) dz$$

$$G_o = e^{\sigma_{ul} \Delta N_o}$$

$$F_o(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_o}}{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}} \right] = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - 1/G_o}{1 - 1/G(t')} \right]$$

Siendo t' un tiempo dentro del pulso, esta expresión relaciona la fluencia inicial $F_o(t')$ con la inversión de población o la ganancia variable en el tiempo

Si $F_o(t') \ll F_{SAT}$ defino ganancia de baja señal

$$\ln[\quad] \sim 0 \rightarrow G(t') \approx G_o$$
$$\sigma_{ul} \Delta N_o \approx g_o L$$

Análogamente

$$\frac{d}{dt'} \Delta N_{ul}^{tot}(t') = -\frac{2}{h\nu_{ul}} \left(1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}\right) I_{out}(t')$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{e^{\sigma_{ul} \Delta N_o} - 1}{e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} - 1} \right] = F_{SAT} \ln \left[\frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \right]$$

$$F_o(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_o}}{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}} \right] = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - 1/G_o}{1 - 1/G(t')} \right]$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - 1 \right) \right]$$

Auxiliar 1

Despejar $\frac{G_o - 1}{G(t') - 1}$ de la expresión para $F_o(t')$ y reemplazar en la expresión de $F_{out}(t')$

Auxiliar 1 (no se explica en clase)



Objetivo: Despejar $\frac{G_o - 1}{G(t') - 1}$ de la expresión para $F_o(t')$ y reemplazar en la expresión de $F_{out}(t')$

$$F_o(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_o}}{1 - e^{-\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')}} \right] = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - 1/G_o}{1 - 1/G(t')} \right]$$

$$e^{F_o(t')/F_{SAT}} = \frac{1 - 1/G_o}{1 - 1/G(t')} = \frac{G(t')}{G_o} \frac{G_o - 1}{G(t') - 1}$$

$$\frac{G(t')}{G_o} \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} - \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \frac{1}{G_o} + \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \frac{1}{G_o} = \left(\frac{G(t')}{G_o} - \frac{1}{G_o} \right) \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} + \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \frac{1}{G_o}$$

$$e^{F_o(t')/F_{SAT}} = (G_o - 1) \frac{1}{G_o} + \frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \frac{1}{G_o}$$

$$G_o e^{F_o(t')/F_{SAT}} - (G_o - 1) = \frac{G_o - 1}{G(t') - 1}$$

$$1 + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - 1 \right) = \frac{G_o - 1}{G(t') - 1}$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \right]$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - 1 \right) \right]$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - 1 \right) \right]$$

Laser pulsado

- $F_o(t') \ll F_{SAT}$

$$F_{out}(t') \simeq F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} \right]$$

- Si además $G_o F_o(t') \ll F_{SAT}$

$$F_{out}(t') \approx F_o(t') e^{g_o L}$$

$$F_o(t') \gg F_{SAT}$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} g_o L + F_o(t')$$

Auxiliar 2: (no se explica en clase)



Aproximaciones de la fluencia

$$e^x \sim 1 + x$$
$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - 1 \right) \right]$$

$$F_o(t') \ll F_{SAT}$$
$$G_o \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} \ll 1$$

$$F_{out}(t') \approx F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \left(1 + \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} - 1 \right) \right] = F_{SAT} \ln \left[1 + G_o \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} \right] \approx F_{SAT} G_o \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} = F_o(t') G_o = F_o(t') e^{\sigma_{ul} \Delta N_o} = F_o(t') e^{g_o L}$$

$$F_o(t') \gg F_{SAT}$$
$$G_o = e^{g_o L}$$

$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[\cancel{1} + G_o \left(e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} - \cancel{1} \right) \right] \sim F_{SAT} \ln \left[G_o e^{\frac{F_o(t')}{F_{SAT}}} \right] \sim F_{SAT} \left(\ln[G_o] + \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} \right) \approx F_{SAT} \left(g_o L + \frac{F_o(t')}{F_{SAT}} \right)$$
$$= F_{SAT} g_o L + F_o(t')$$

Laser pulsado

régimen de baja señal

$$F_o(t') \ll F_{SAT} \text{ y } G_o F_o(t') \ll F_{SAT}$$

$$F_{out}(t') \approx F_o(t') e^{g_o L}$$

Laser continuo

$$I_o \ll I_{SAT}$$

$$I \approx I_o e^{g_o L}$$

Amplificador saturado

$$F_o(t') \gg F_{SAT}.$$

$$F_{out}(t') \approx F_{SAT} g_o L + F_o(t')$$

$$I_o \gg I_{SAT}$$

$$I \approx I_{SAT} g_o L + I_o$$

Son las mismas formas funcionales, solo que para pulsado valen para la fluencia (dependiente del tiempo) y para CW valen para la intensidad (constante)

$$F_o(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{1 - 1/G_o}{1 - 1/G(t')} \right] \rightarrow G(t') = e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul}^{tot}(t')} = \frac{G_o}{G_o - (G_o - 1) \exp[-F_o(t')/F_{SAT}]}$$

Corregir fórmula 8.95 Silvfast según esta expresión

Dado $I_o(t')$ puedo calcular la forma del pulso a la salida $I_{out}(t') = G(t')I_o(t')$ con $t' = t - z/v$

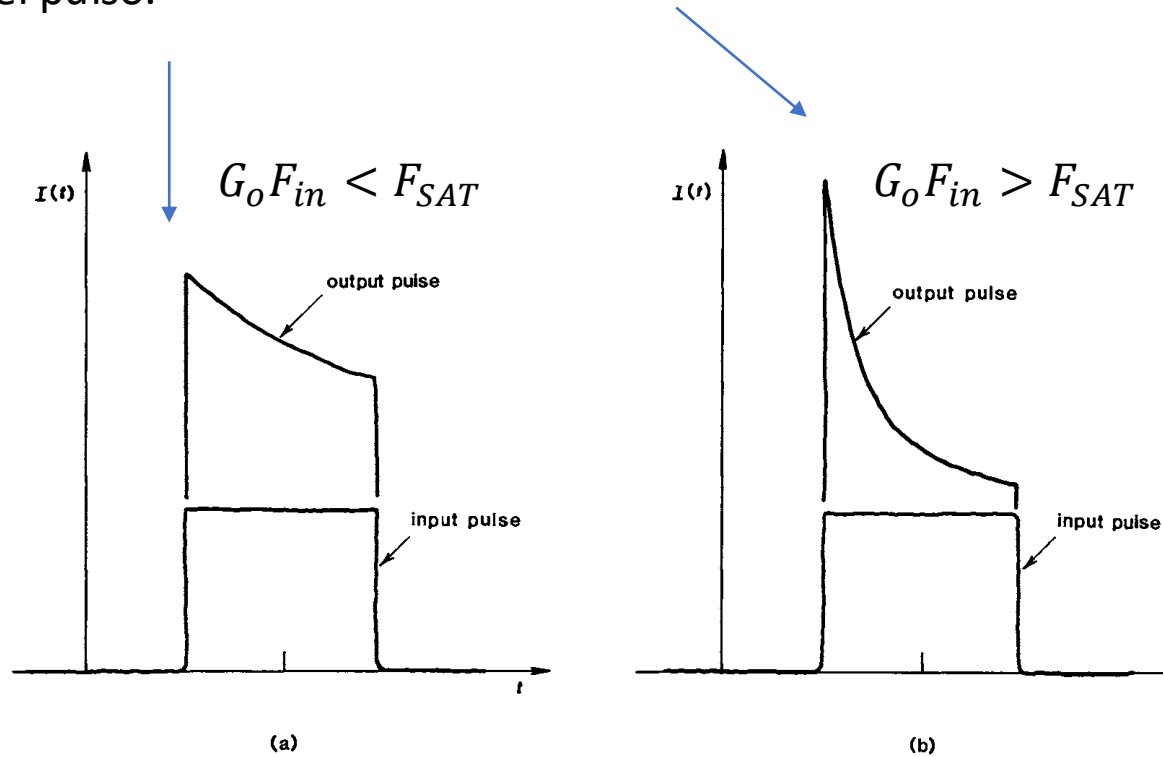
$$F_{out}(t') = F_{SAT} \ln \left[\frac{G_o - 1}{G(t') - 1} \right] \rightarrow G(t') = 1 + (G_o - 1) \exp[-F_{out}(t')/F_{SAT}]$$

Que pulso de entrada necesito $I_o(t')$ si quiero obtener determinada salida $I_{out}(t') \Rightarrow I_o(t') = \frac{I_{out}(t')}{G(t')}$ con $t' = t - z/v$

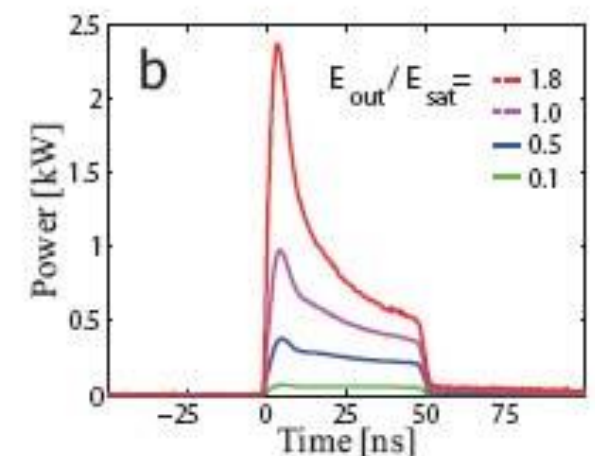
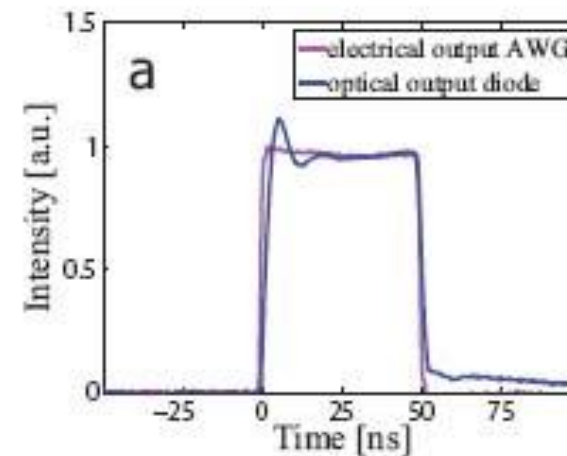
Propagación de pulsos en amplificadores



El borde delantero extrae primero la energía almacenada (satura la ganancia) y reduce la ganancia disponible para el resto del pulso.

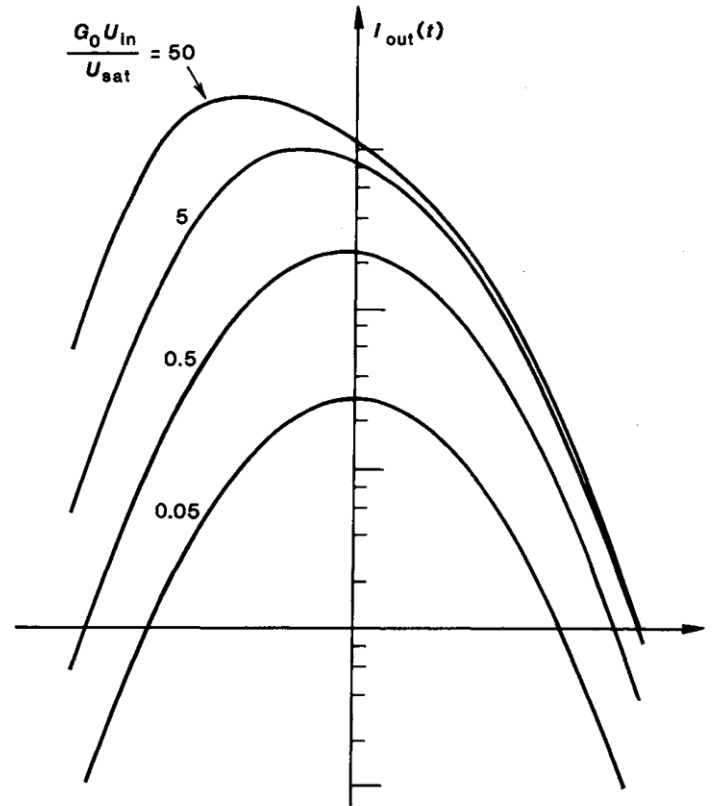


Diodo laser (E=F)



Optics Express 16 (22) 17637-17646 (2008)
<https://doi.org/10.1364/OE.16.017637>

Pulso gaussiano con distintas intensidades iniciales



Q-Switched Nd:Yag (pulsos largos)

Energía por pulso

$$E_{pulso} = 0.5 - 1 \text{ J}$$

$$\lambda = 1064 \text{ nm}$$

$$\phi = 0.01 \text{ m (diámetro)}$$

$$\tau_p = 10 - 50 \text{ ns}$$

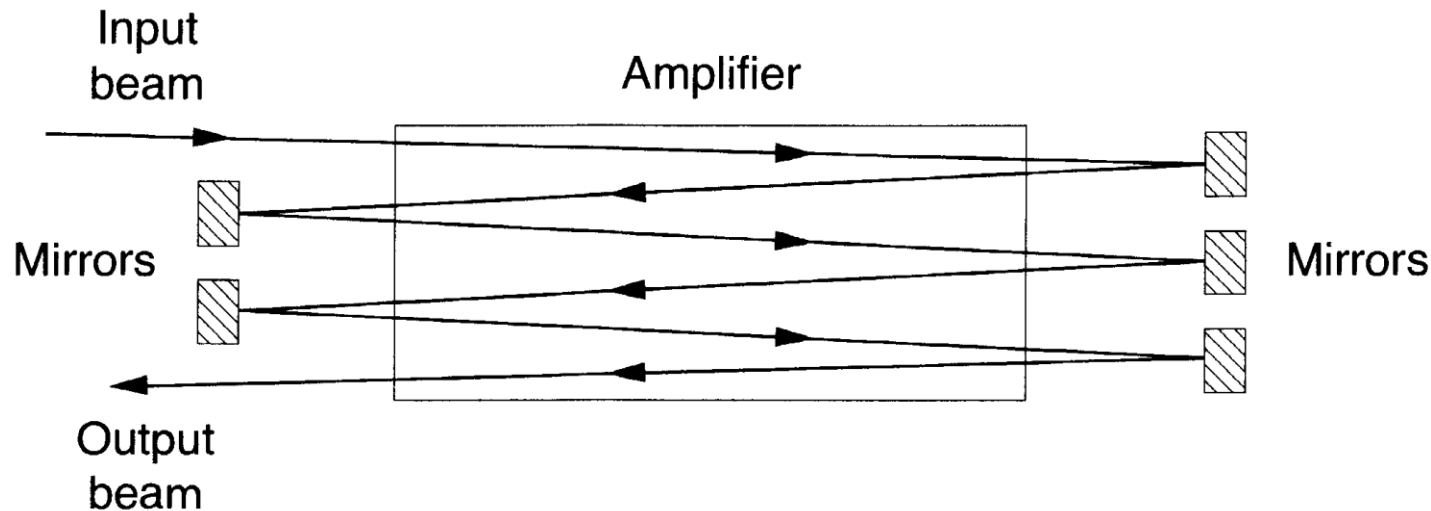
$$F_{SAT} = \frac{h\nu_{ul}}{\sigma_{ul}} = \frac{1.87 \times 10^{-19} \text{ J}}{6.5 \times 10^{-23} \text{ m}^2} = \frac{2.87 \text{ kJ}}{\text{m}^2}$$

$$E_{SAT} = \frac{2.87 \text{ kJ}}{\text{m}^2} \pi \left(\frac{0.01}{2} \right)^2 \text{ m}^2 \approx 226 \text{ mJ}$$

$$E_{pulso} \geq E_{SAT} \rightarrow F_{out}(t') \approx F_{SAT} g_o L + F_o(t') \text{ en un pasaje}$$

Si $E_{pulso} < E_{SAT}$ necesito mas de un pasaje por el amplificador

Amplificador de múltiples pasajes



Propagación de pulsos en amplificadores



Pulsos ultracortos 10 – 100 fs

osciladores ultracortos típicos tienen energías muy bajas, del orden de nJ, por lo que producen solo una pequeña perturbación de la inversión de población en un único pasaje

Pulso ultracorto (100 fs) de igual energía que $E_{SAT} \approx 226 \text{ mJ}$

Potencia instantánea

$$P \approx \frac{226 \text{ mJ}}{100 \text{ fs}} = \frac{226 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{100 \cdot 10^{-15} \text{ s}} \sim 2 \times 10^{12} \text{ W}$$

En un foco de $\phi = 100 \mu\text{m}$ (diámetro) $I \sim 6 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2$

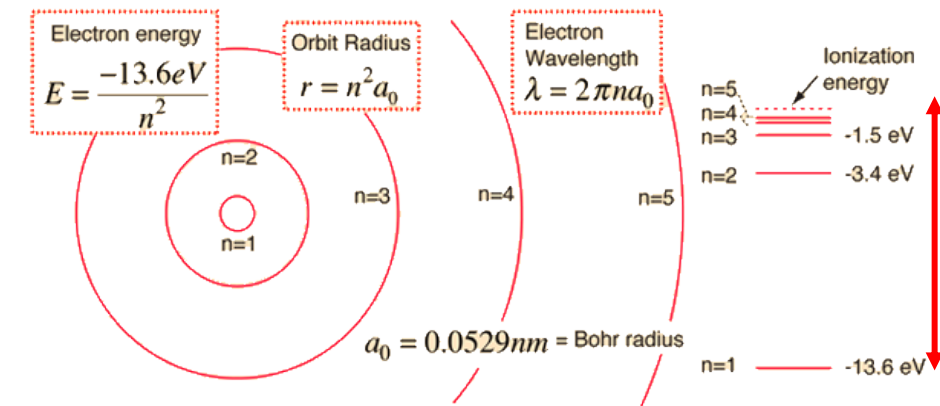
¡Puedo arrancar electrones de los átomos!

Mode-locked Ti:Saph laser

$$E_{\text{pulso}} \sim 10 \text{ nJ}$$

$$\frac{E_{SAT}}{E_{\text{pulso}}} \sim 2 \times 10^7$$

Necesito muchos más pasajes por el amplificador



Campo eléctrico (1er radio de Bohr)

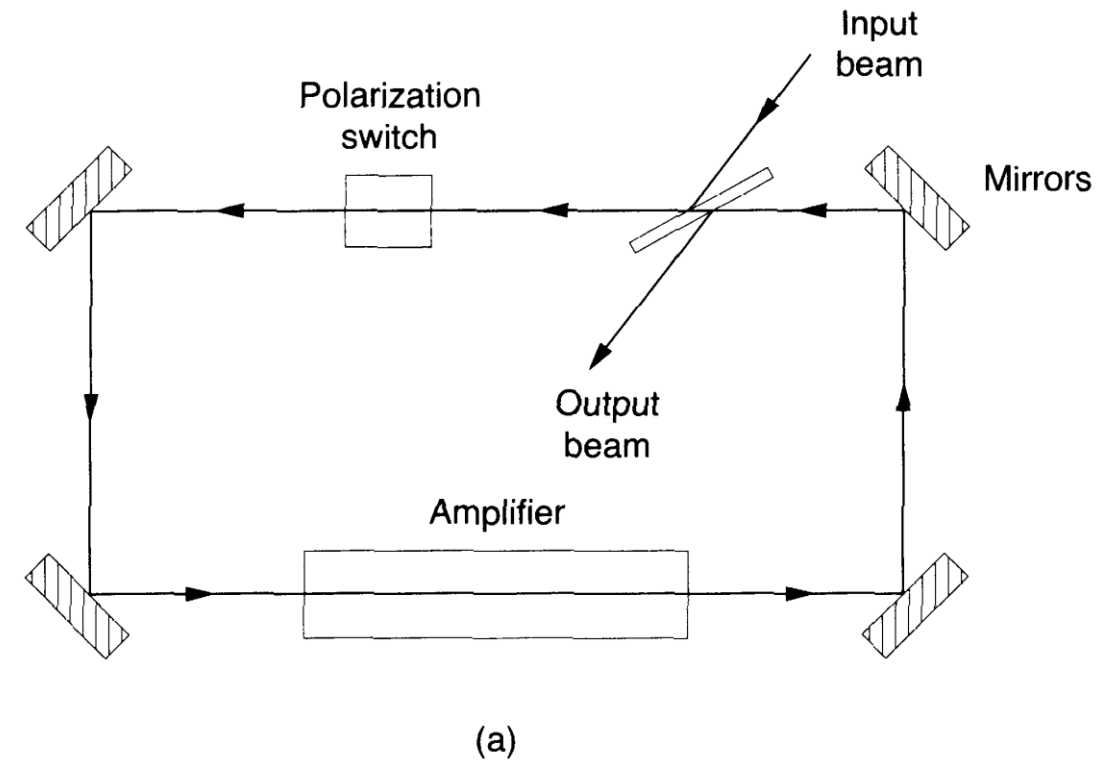
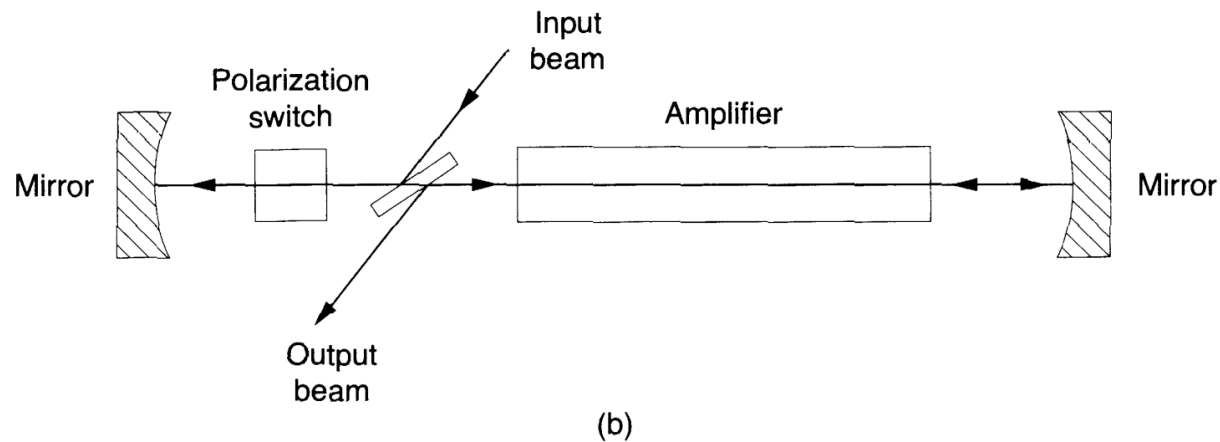
$$E_o = \frac{e}{4\pi\epsilon_o a_o^2} \sim 5 \times 10^{11} \text{ V/m}$$

Campo óptico de igual amplitud

$$E(r, t) = \hat{E} e^{i(\omega t - k \cdot r)},$$

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_o E_o^2 \sim 3 \times 10^{16} \text{ W cm}^{-2}$$

Amplificador regenerativo



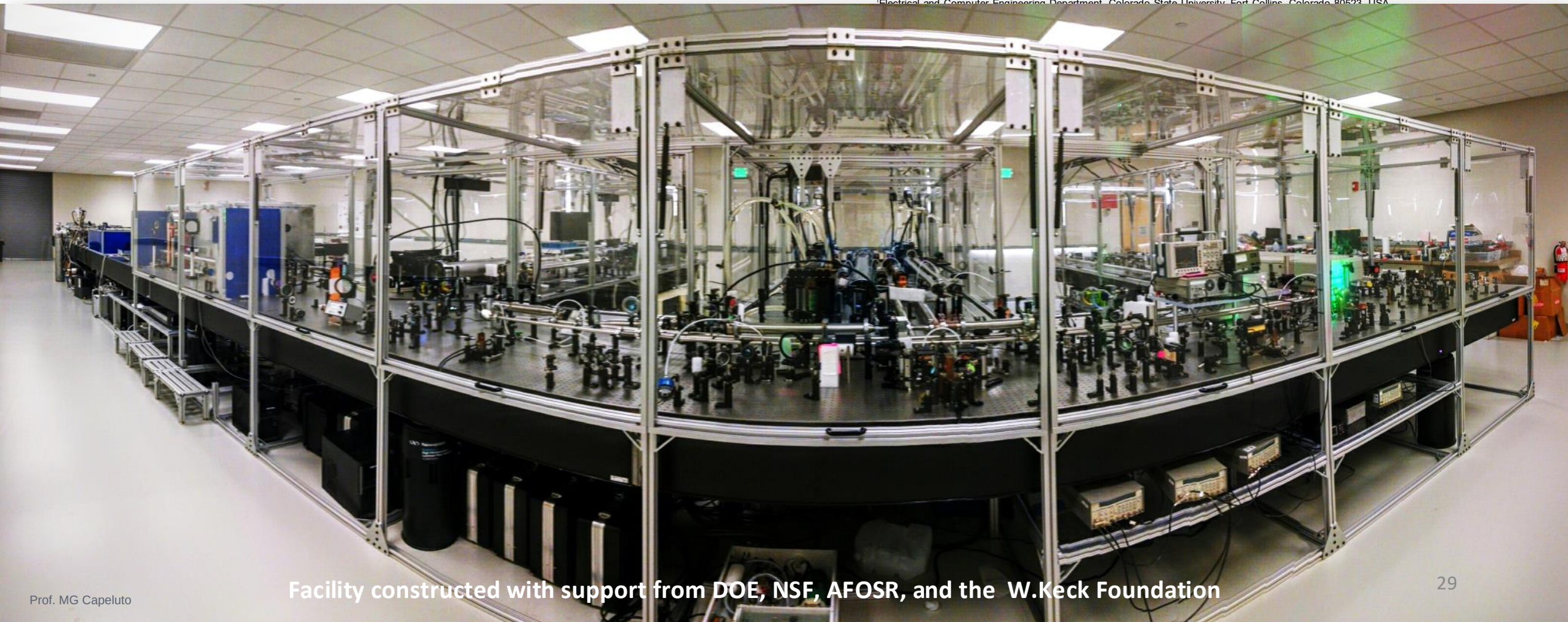
- El pulso realiza muchos pasajes por el medio de ganancia: típicamente 10 a cientos de pasajes
- El switch controla la entrada, el atrapamiento y la salida del pulso.
- En cada pasaje aumenta su energía por emisión estimulada.
- Cuando alcanza la energía deseada, el switch cambia la polarización y el pulso se extrae de la cavidad.



0.85 PW laser operation at 3.3 Hz and high-contrast ultrahigh-intensity $\lambda = 400$ nm second-harmonic beamline

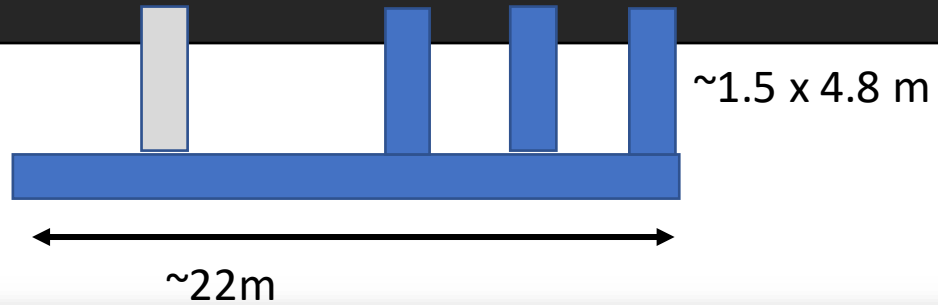
YONG WANG,^{1,†,*} SHOUJUN WANG,^{1,†} ALEX ROCKWOOD,^{2,†} BRADLEY M. LUTHER,³ REED HOLLINGER,¹ ALDEN CURTIS,¹ CHASE CALVI,² CARMEN S. MENONI,^{1,3} AND JORGE J. ROCCA^{1,2}

¹Electrical and Computer Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 80523, USA



Facility constructed with support from DOE, NSF, AFOSR, and the W.Keck Foundation

3.3 Hz, 0.85 PW- Ti:Sapphire Laser System

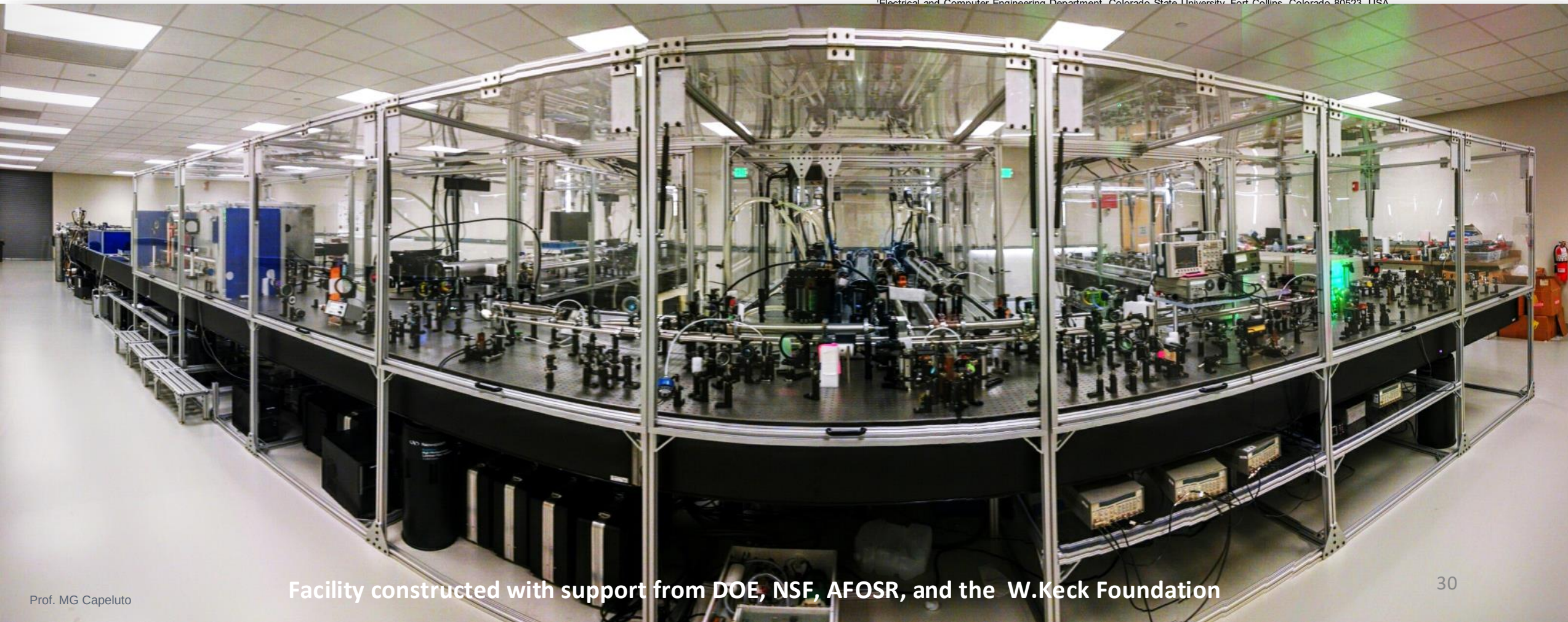


Optics Letters

0.85 PW laser operation at 3.3 Hz and high-contrast ultrahigh-intensity $\lambda = 400$ nm second-harmonic beamline

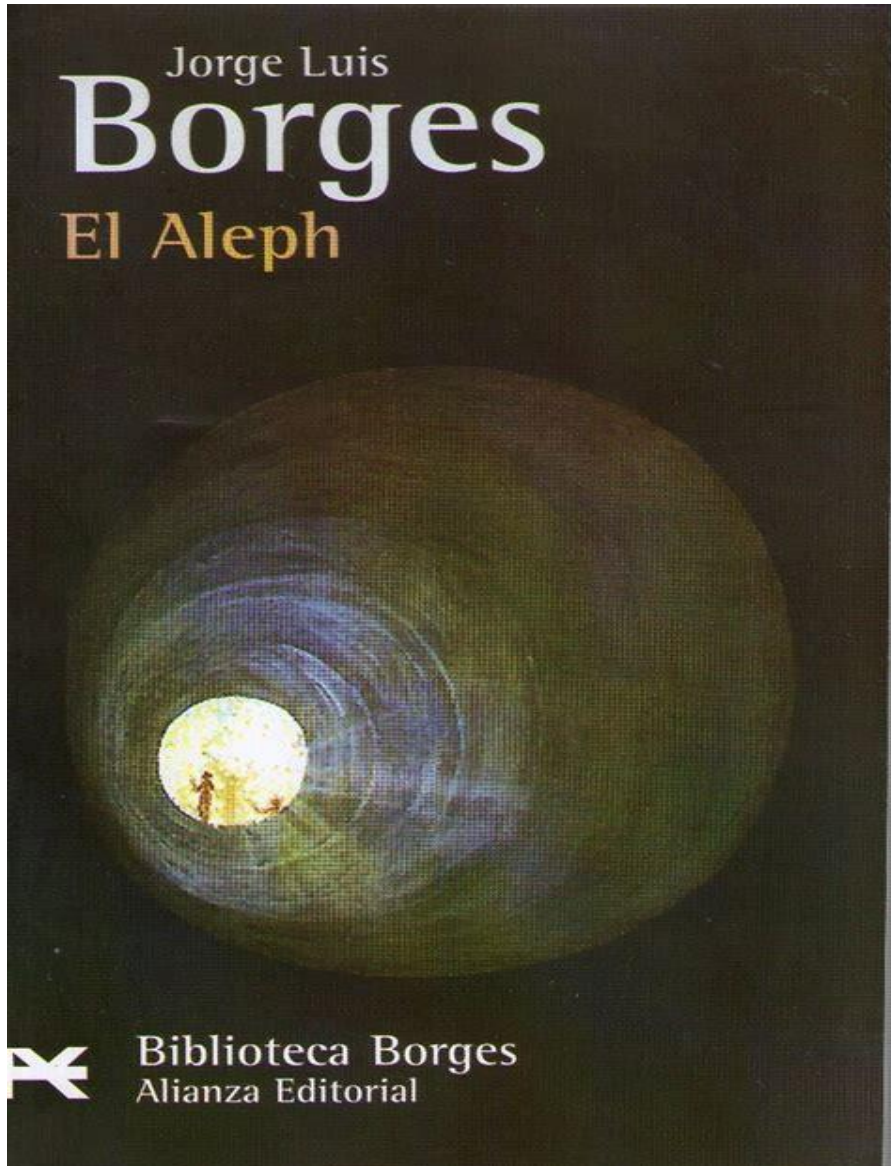
YONG WANG,^{1,†,*} SHOUJUN WANG,^{1,†} ALEX ROCKWOOD,^{2,†} BRADLEY M. LUTHER,³ REED HOLLINGER,¹ ALDEN CURTIS,¹ CHASE CALVI,² CARMEN S. MENONI,^{1,3} AND JORGE J. ROCCA^{1,2}

¹Electrical and Computer Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, Colorado 80523, USA



Facility constructed with support from DOE, NSF, AFOSR, and the W.Keck Foundation

ALEPH: Advanced Laser for Extreme Photonics

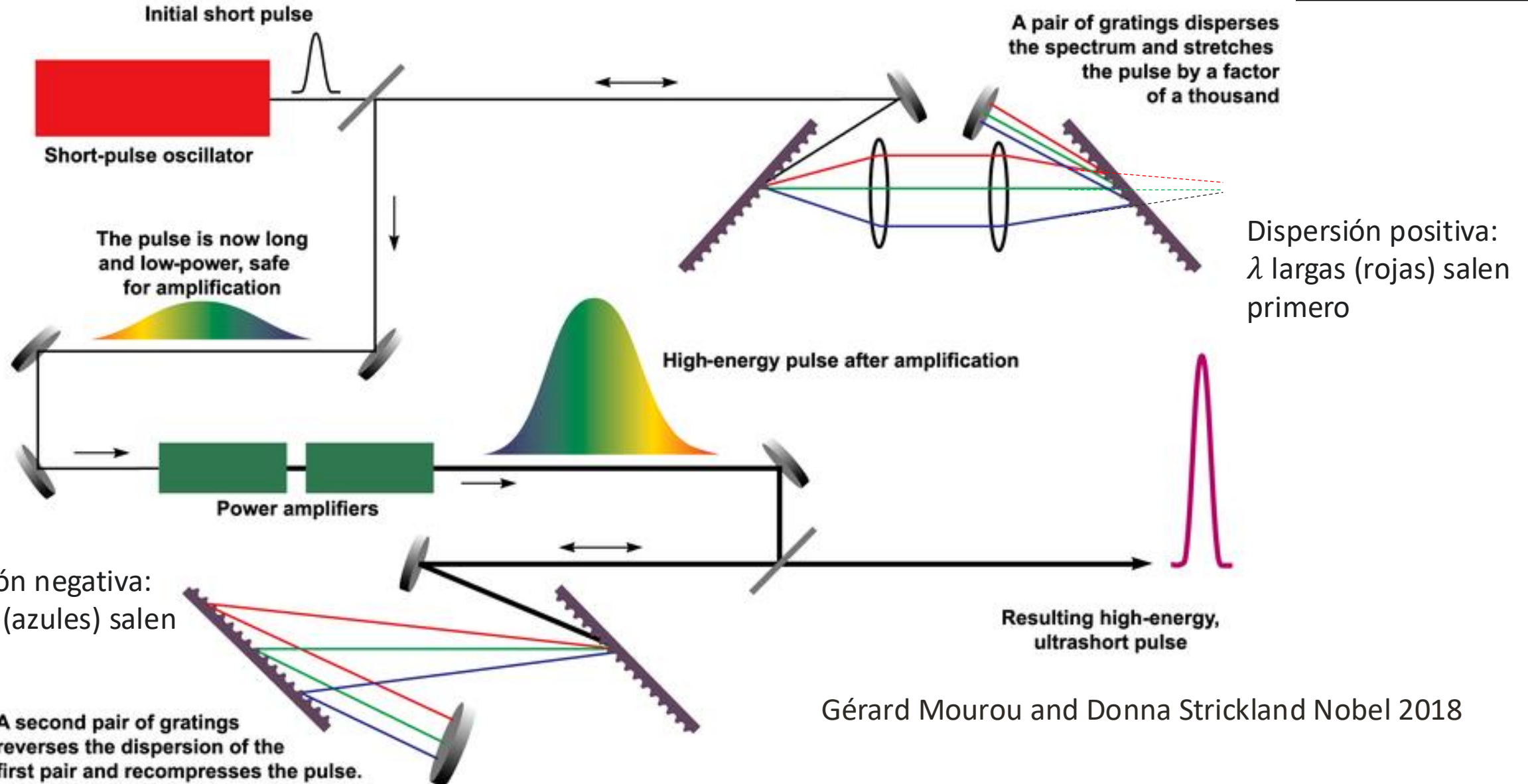


“vi una pequeña esfera tornasolada, de casi intolerable fulgor.”

JLB



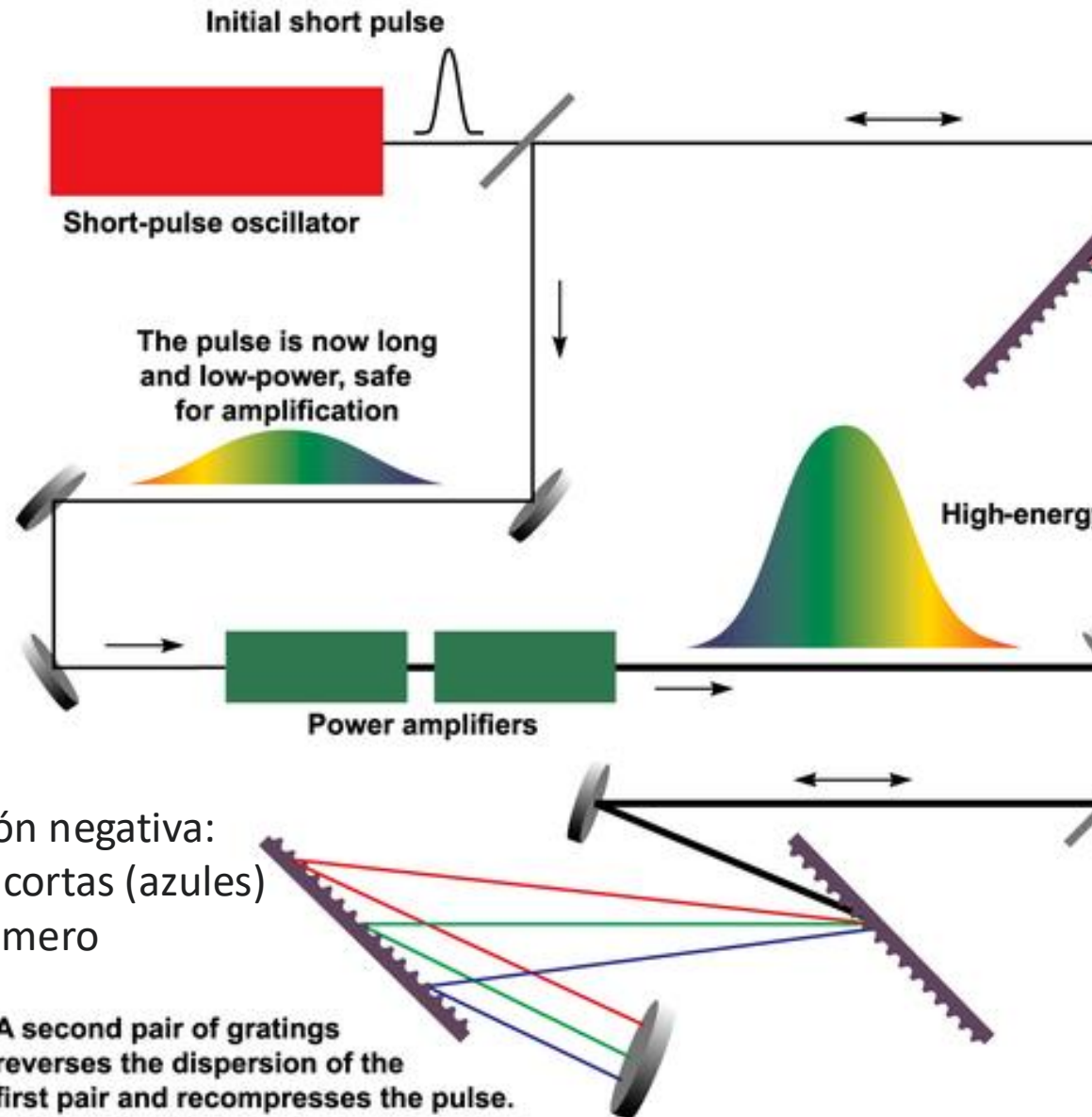
Concepto general de funcionamiento: Chirped pulse amplification



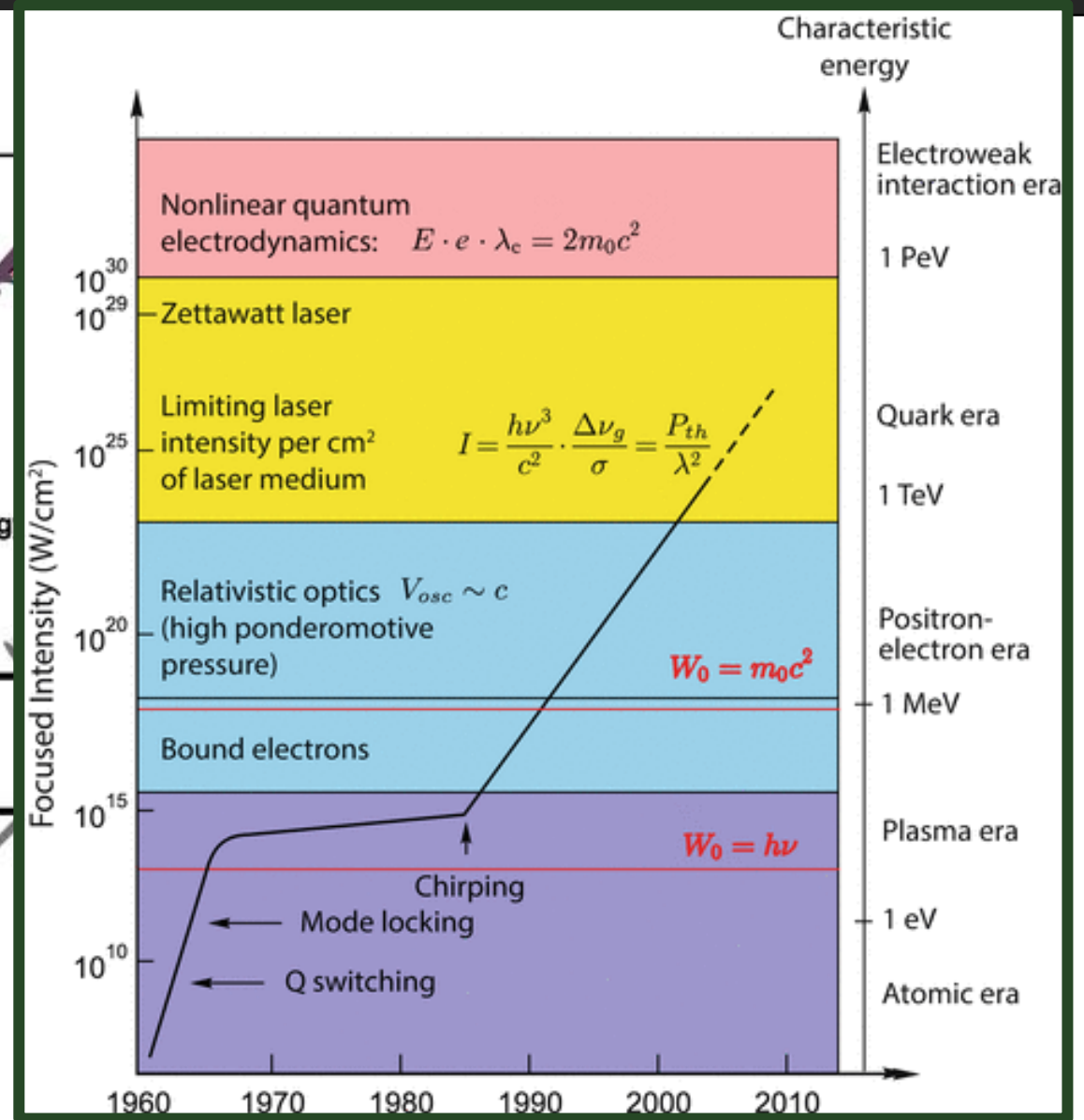
Gérard Mourou and Donna Strickland Nobel 2018

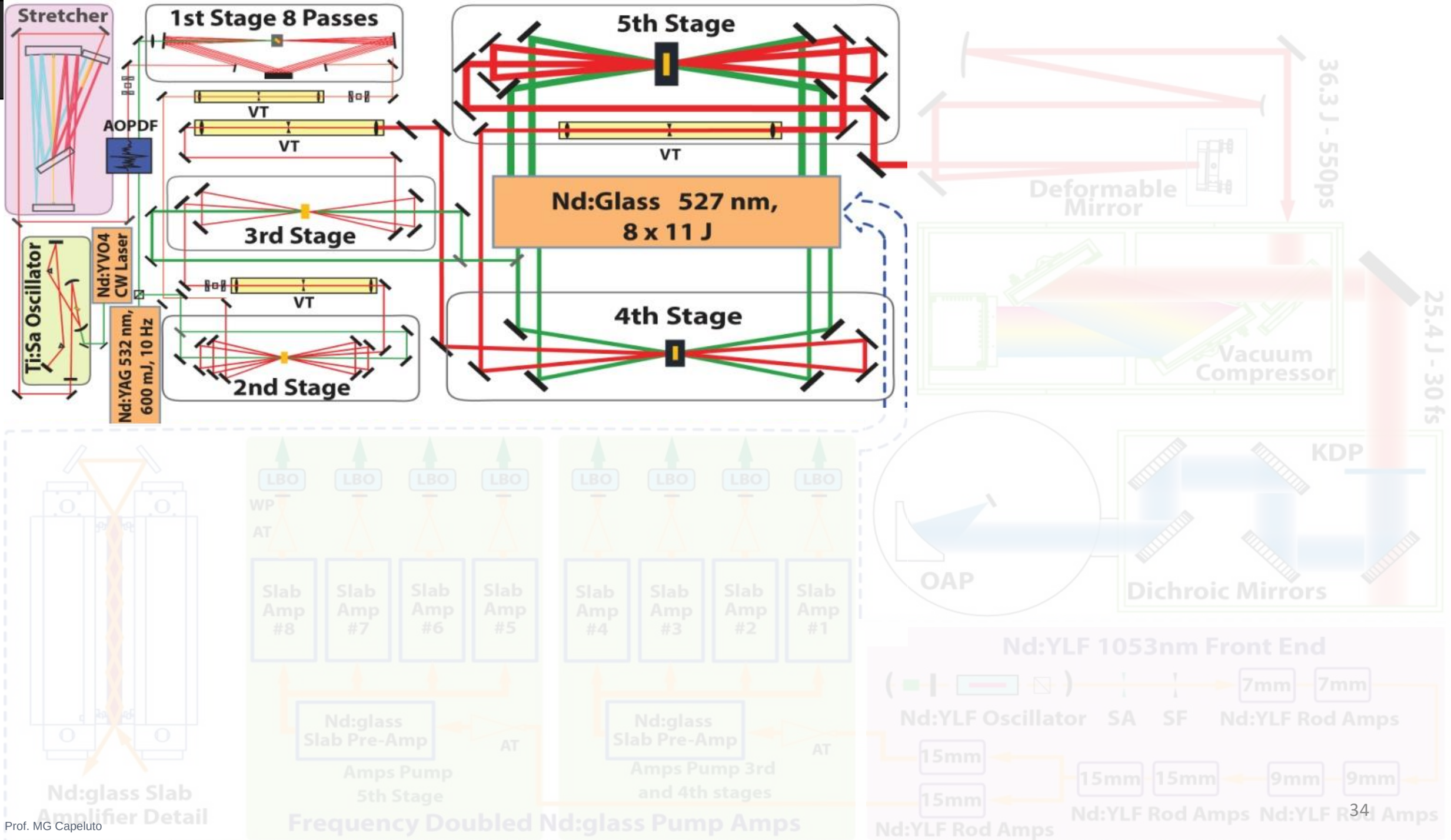
Chirp: la frecuencia varía en el tiempo

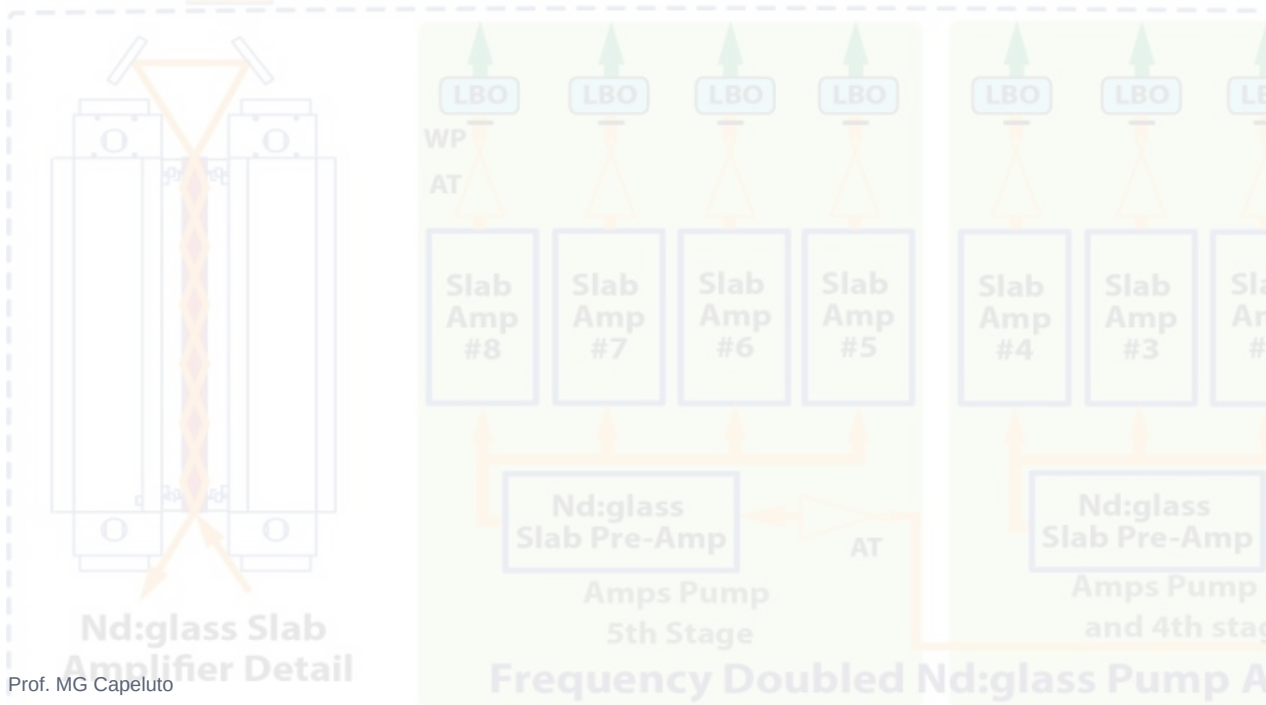
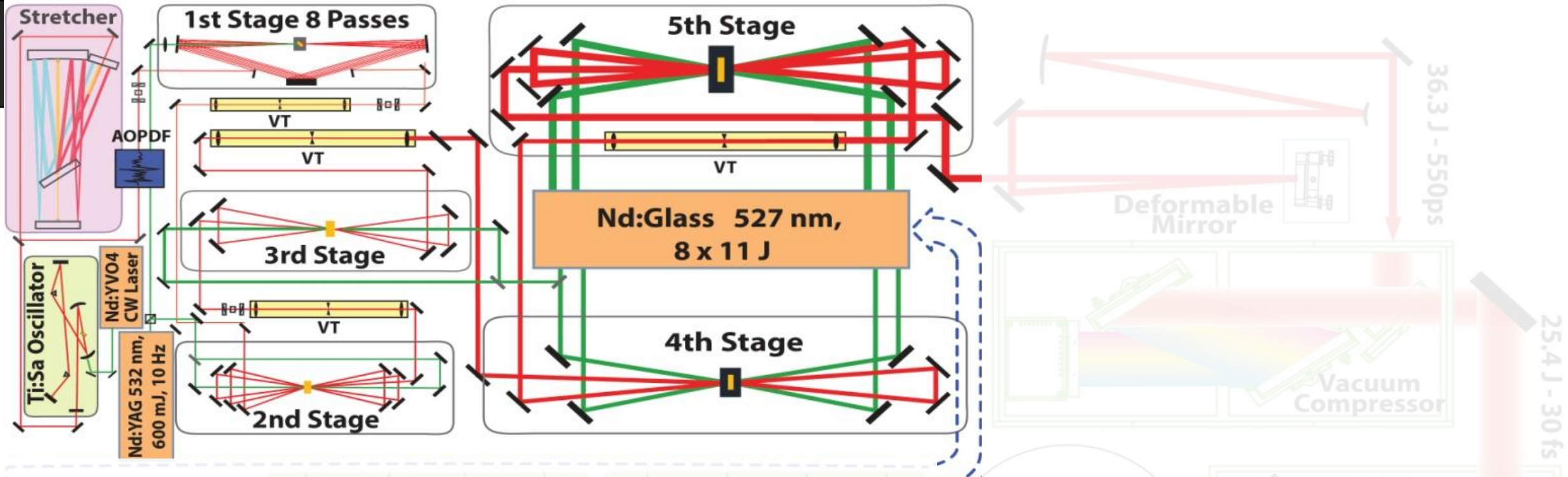
Concepto general de funcionamiento: Pulsed chirped amplification

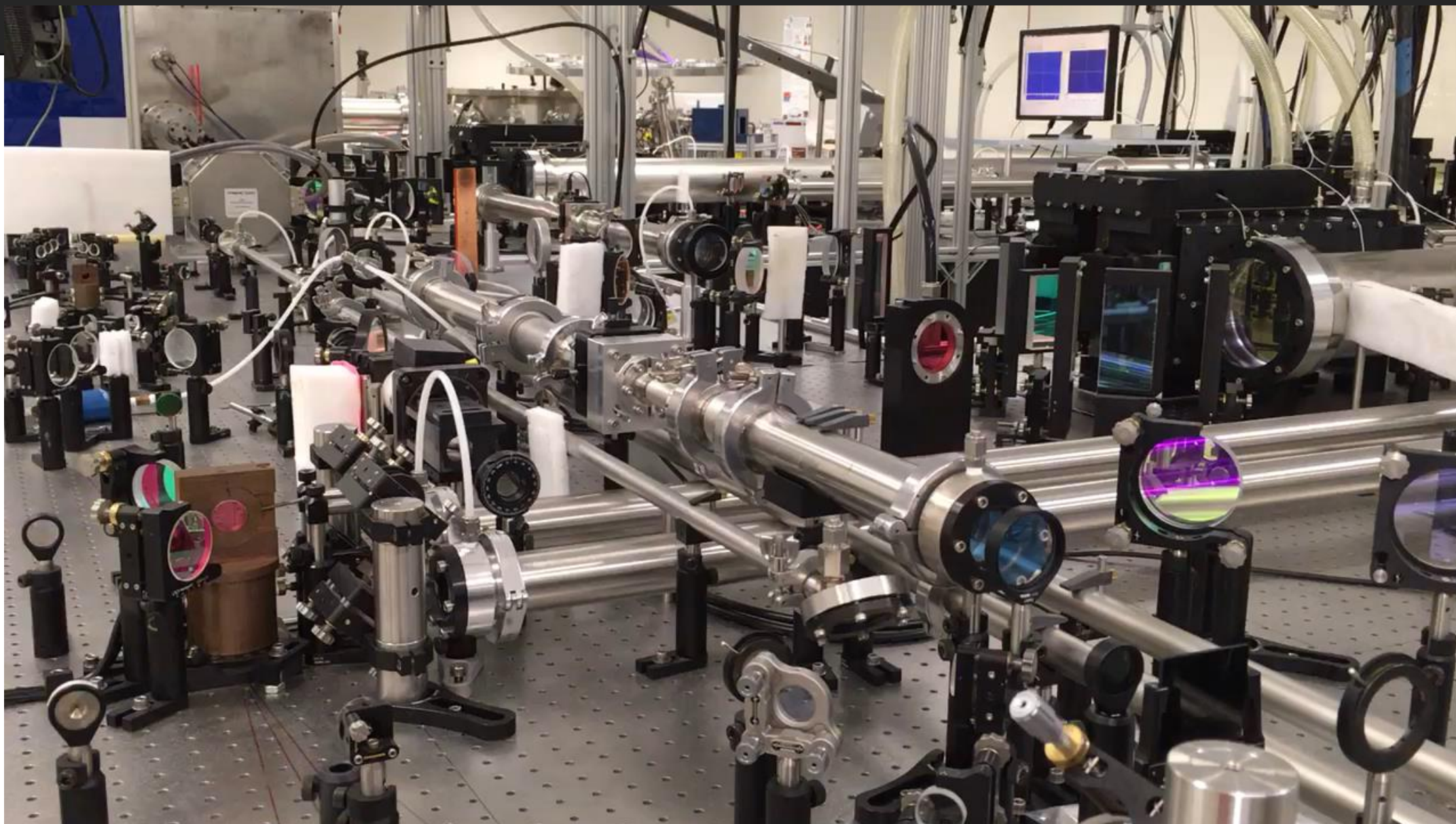


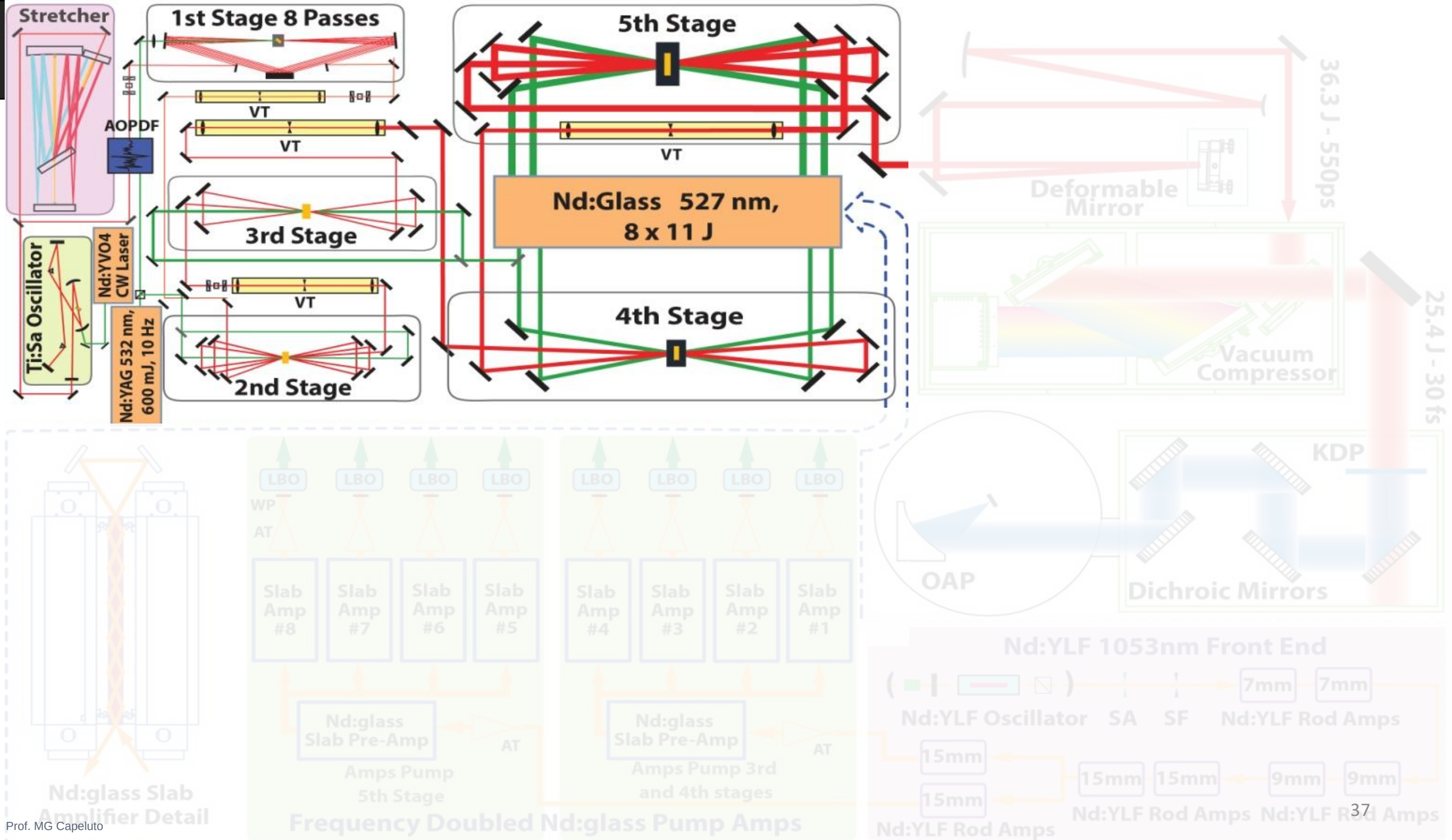
Dispersión negativa:
Lambda cortas (azules)
salen primero







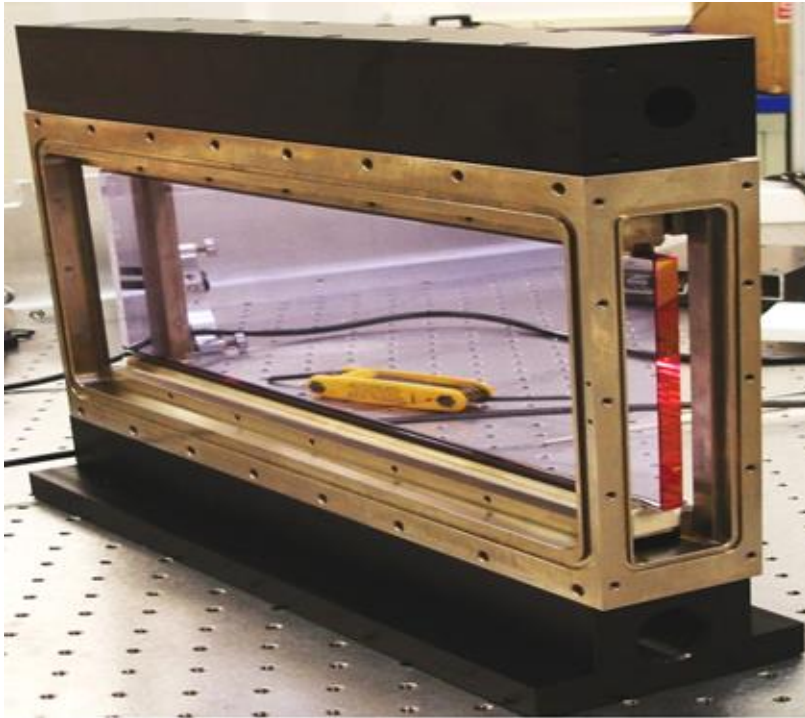
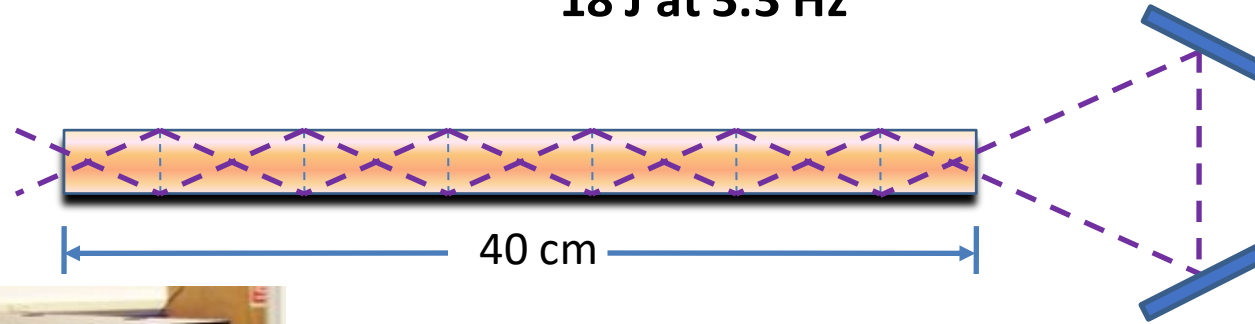




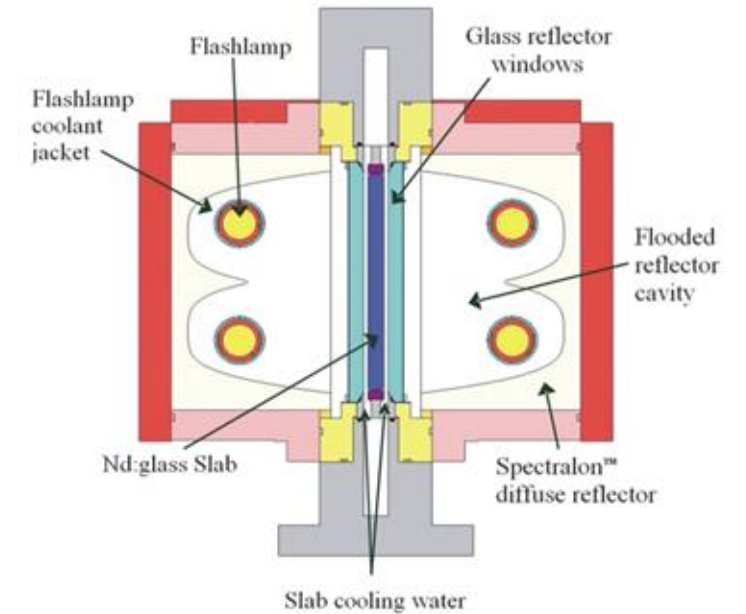
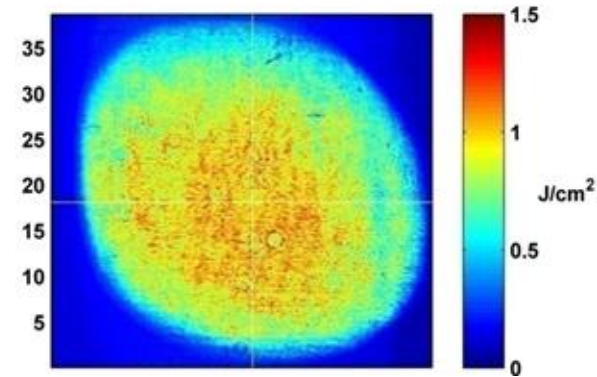
Slab amplifier on double-pass configuration



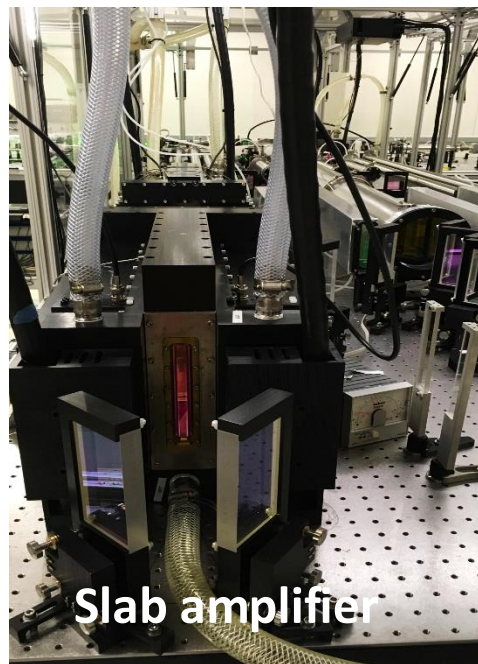
18 J at 3.3 Hz



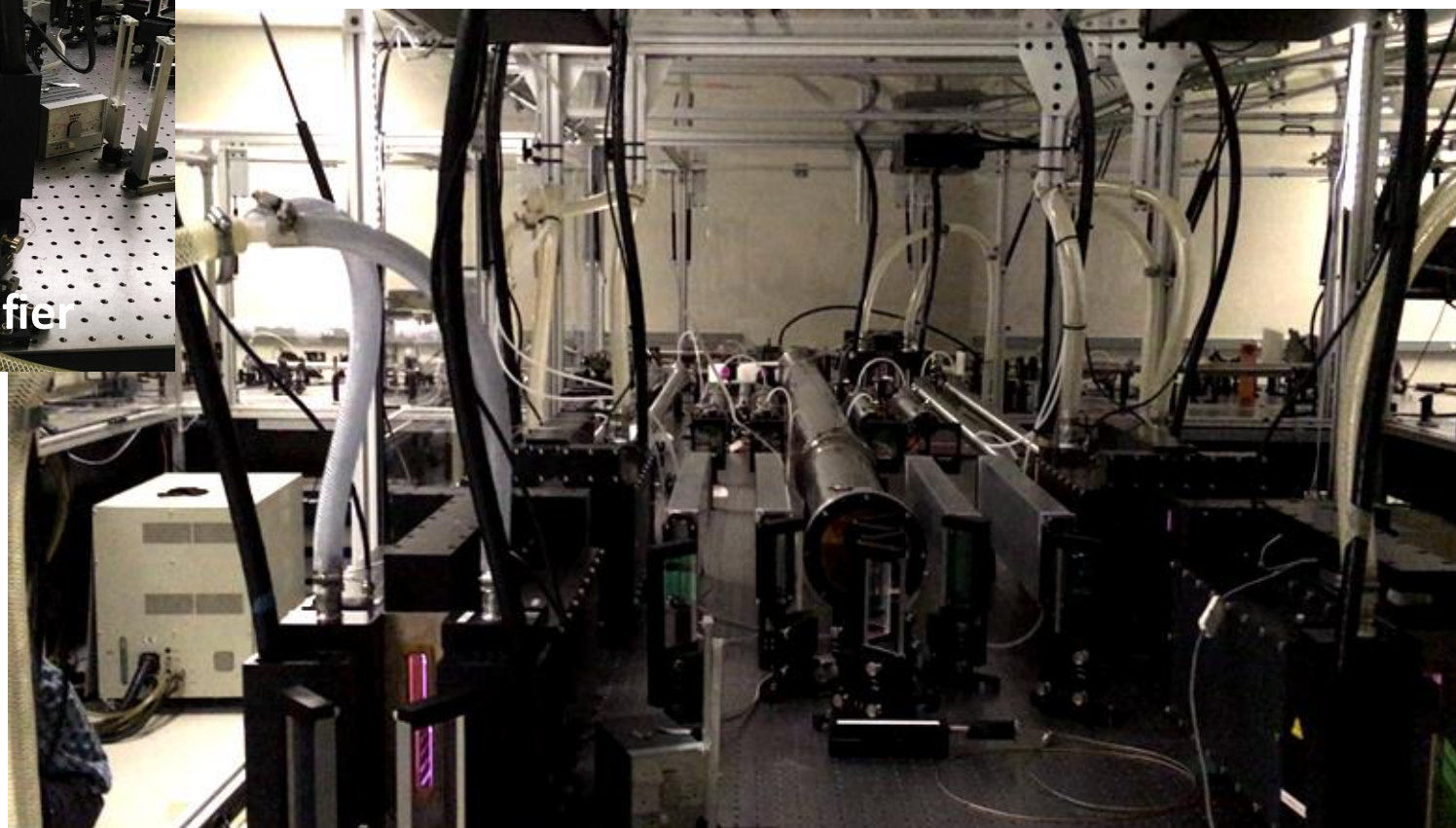
Good beam uniformity

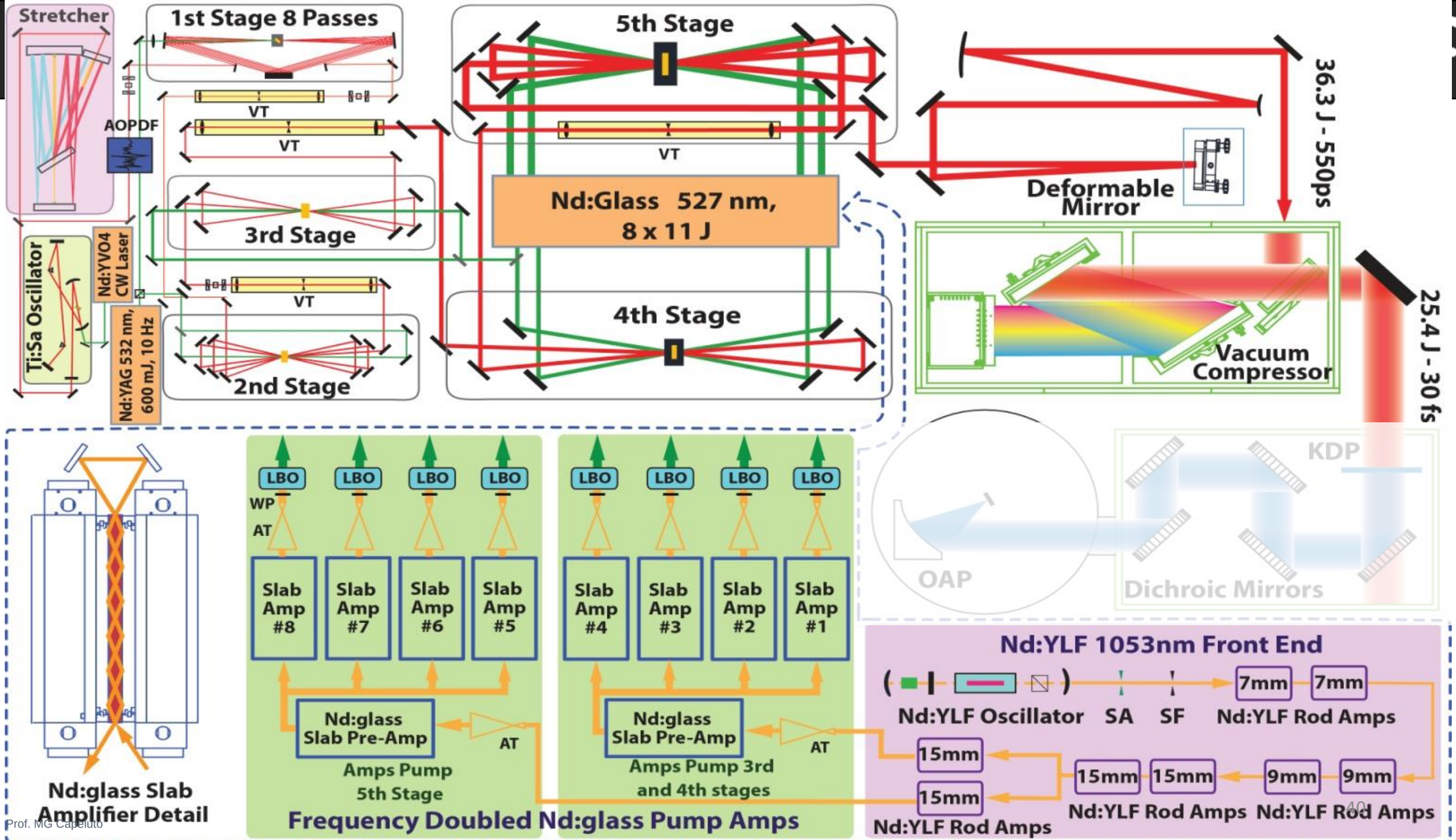


Pump laser slab amplifiers for 36 J ti:sapphire amplifier operating at 3.3 kHz repetition rate

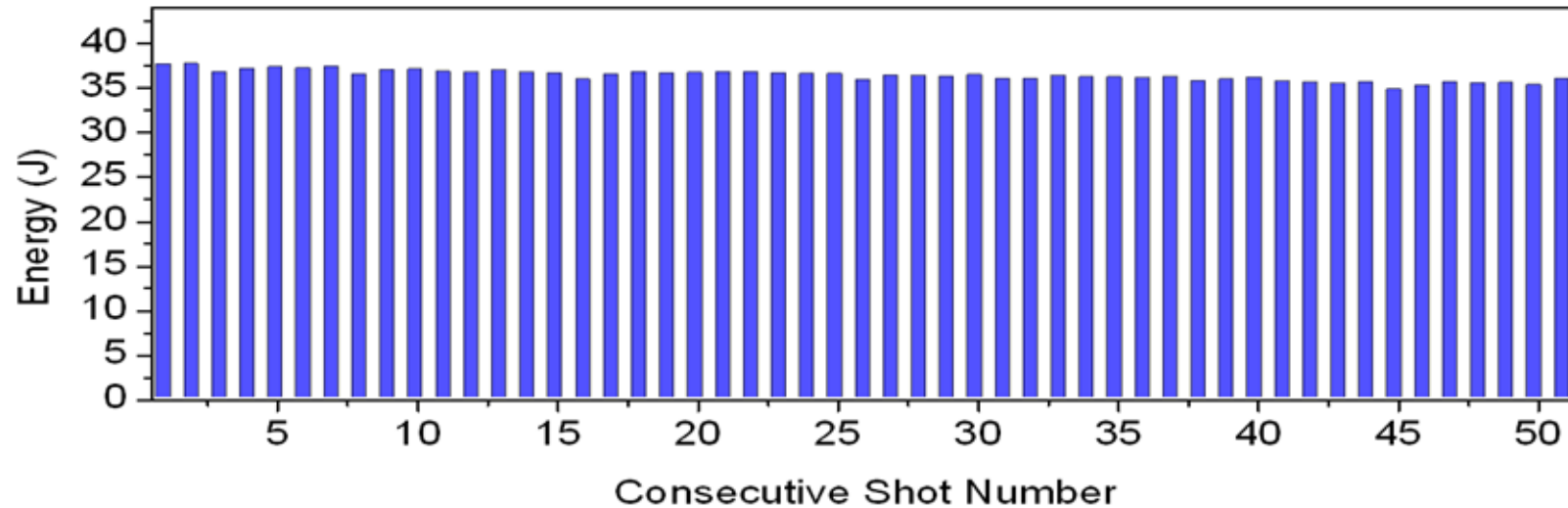


Slab amplifier

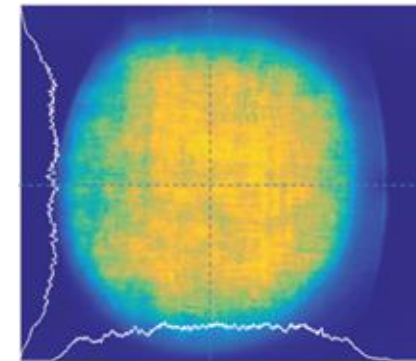




3.3 Hz laser run, 36.3 J average energy before compressor



- ❑ Average pulse energy 36.3 J
- ❑ Shot-to-shot variation ~1.7% rms

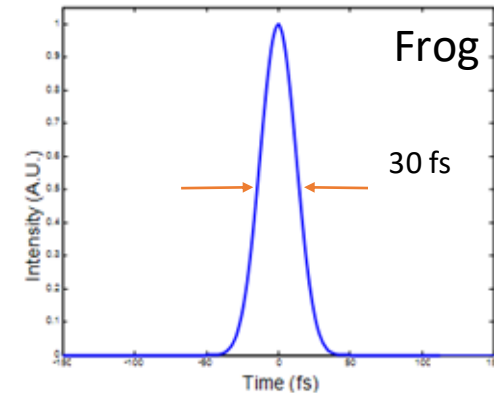
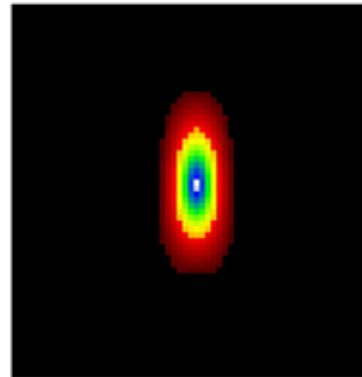
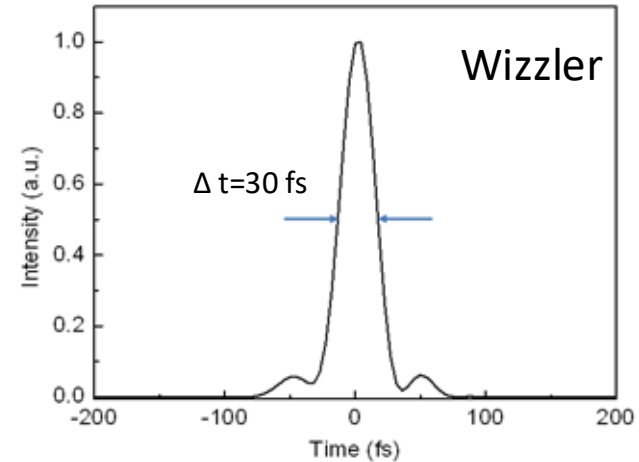
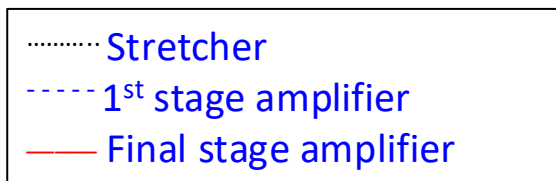
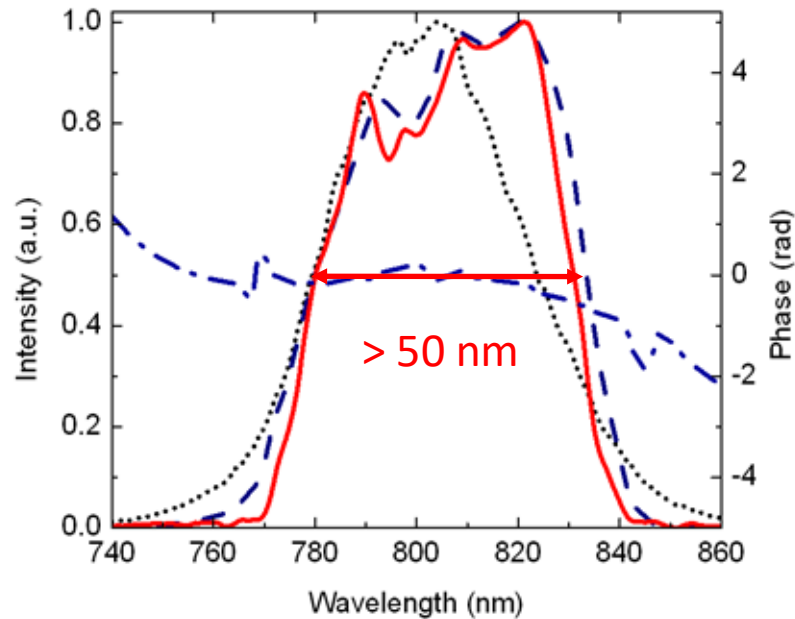


Spatial beam profile

Laser spectra, 30 fs pulse duration

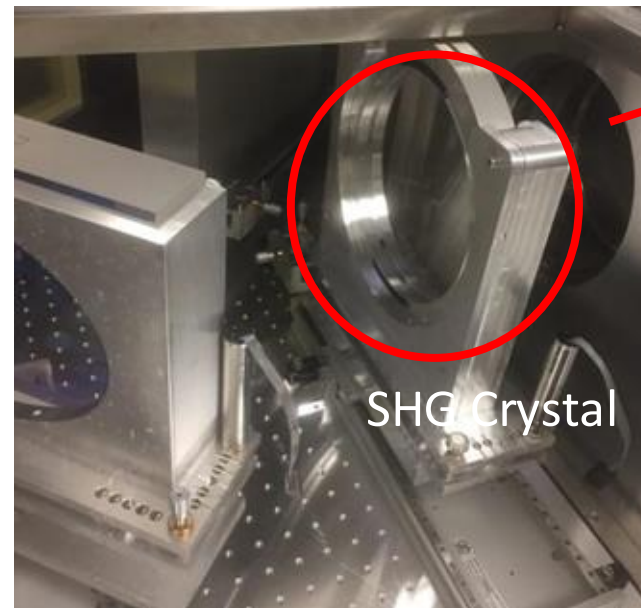
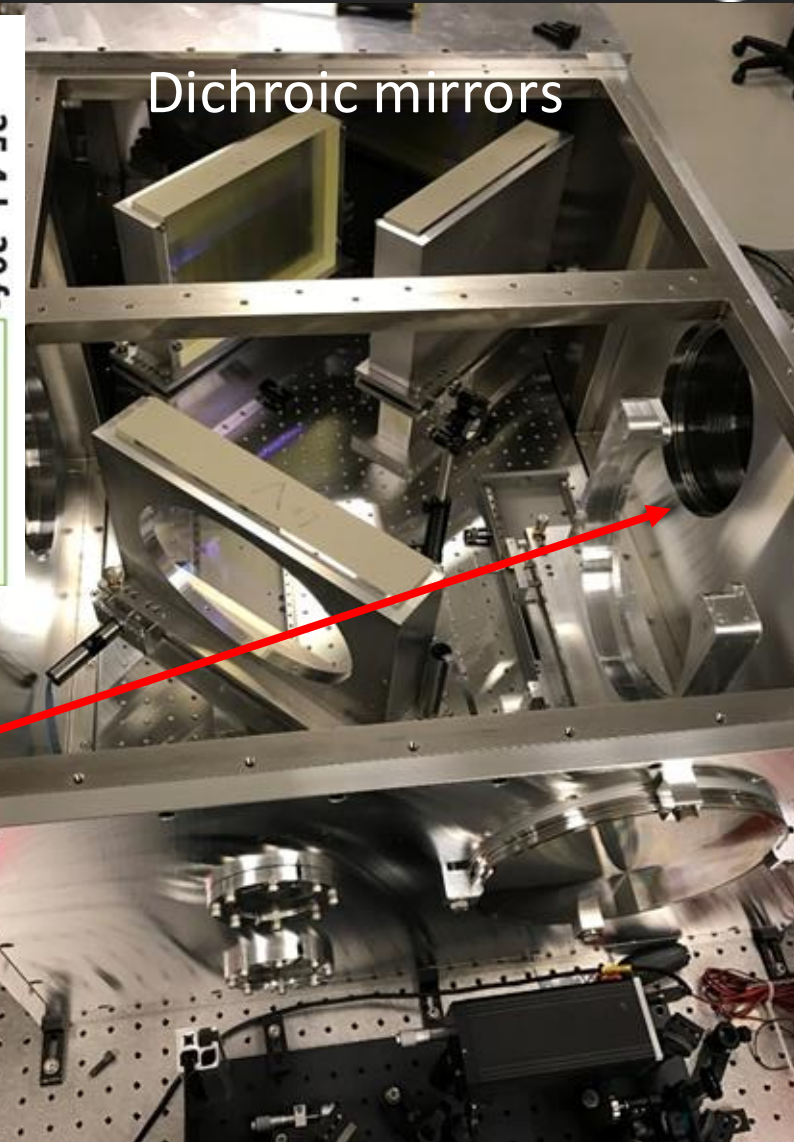
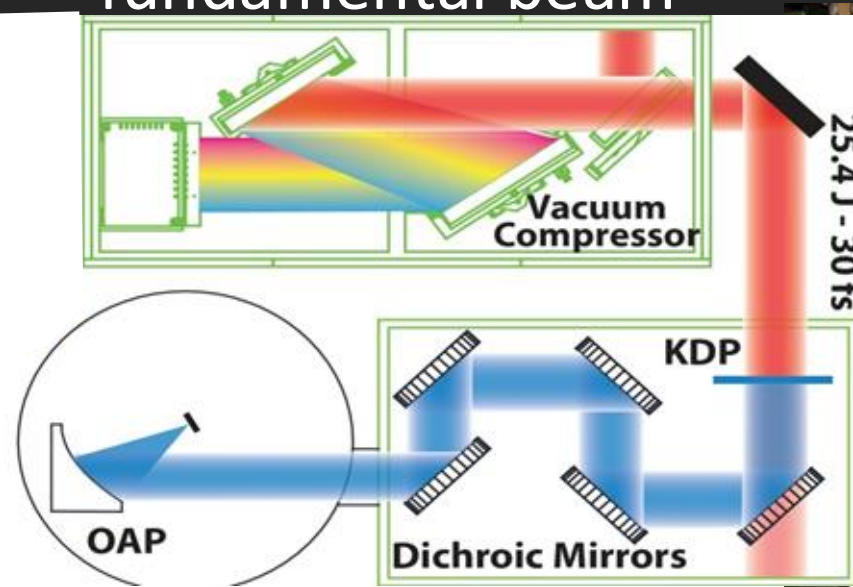
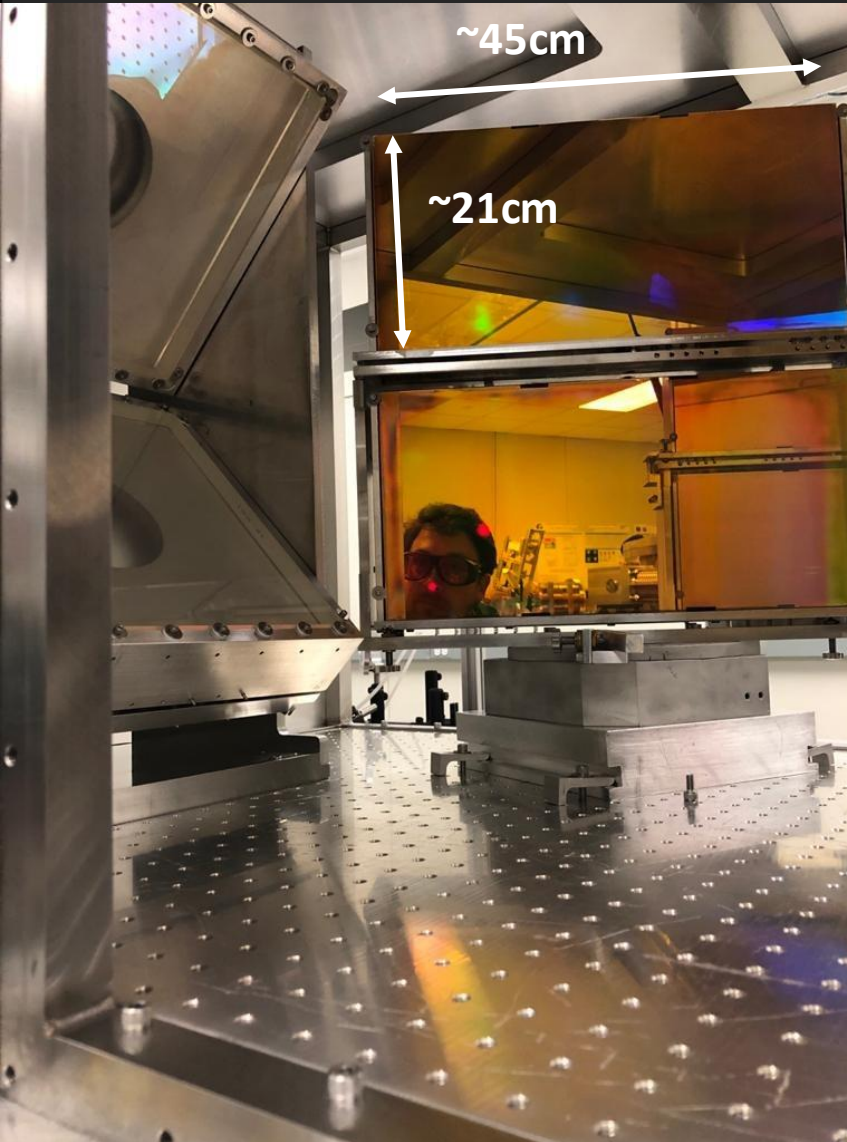


laser spectra through the system



Autocorrelation trace of the compressed pulses obtained from a single shot real-time spectral phase measurement.

Ultra-high contrast pulses: $> 1 \times 10^{12}$ Frequency Doubling and filtering of fundamental beam



f/2 parabola achieves $6.5 \times 10^{21} \text{ W/cm}^2$ ($\gg I_R \sim 10^{19} \text{ Wcm}^{-2} @ 400 \text{ nm}$)

High contrast ($> 1 \times 10^{12}$) in second harmonic beamline



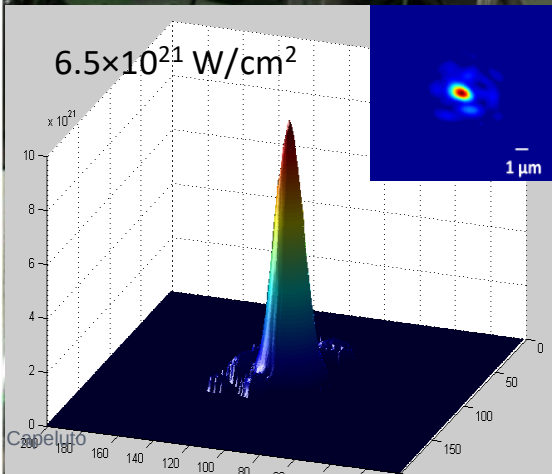
Pulsos $\Delta t = 45 \text{ fs}$

Energía 10 J

$\lambda = 400 \text{ nm}$

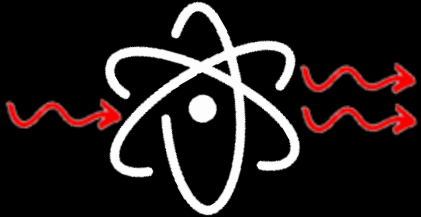
$\phi = 185 \text{ mm}$

$6.5 \times 10^{21} \text{ W/cm}^2$



Y. Wang et al. Optics Letters, 42, 3828 (2017)

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

¿Que vimos? ¿Que veremos?

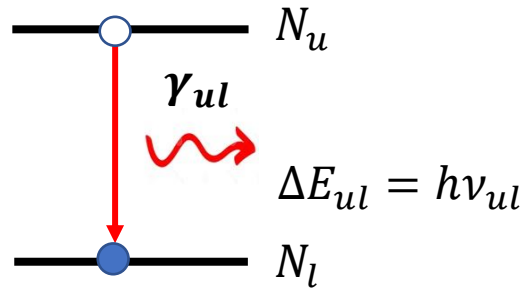


- **Inversión de población** es condición necesaria pero no suficiente para obtener emisión láser
- Ganancia necesaria para alcanzar la **Intensidad de saturación**

¿Cómo se obtiene la inversión de población?

¿Cuáles son los mecanismos que hacen que no se pueda obtener inversión o la destruyen?

Inversión de población en sistemas de dos niveles



- $\nu_{ul} \sim vis \rightarrow$ excitación térmica (colisiones) @RT de $N_l \rightarrow N_u$ no es posible
- $\gamma_{ul} \geq A_{ul}$ (se puede ensanchar por colisiones)
- $\sigma_{ul}(\nu)$ puede ser Homogéneo o Doppler según que proceso predomine

Átomos en equilibrio térmico @RT, según distribución de Boltzmann

$$N_l \sim N$$

$$N_u \ll N_l$$

$$\frac{g_l}{g_u} \sim 1$$

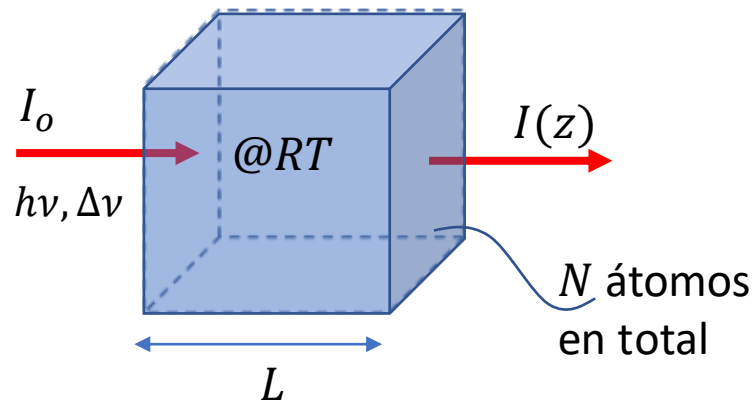
$$\Delta N_{ul} = N_u - \frac{g_u}{g_l} N_l \sim (N_u - N_l) \sim -N_l = -N$$

y no se puede poblar N_u térmicamente (termalizado por colisiones)

2) Bombeamos con intensidad I_o y frecuencia ν_{ul}

- los átomos en nivel N_l absorben fotones excitándose al nivel superior N_u
- Los átomos en nivel N_u decaen al nivel N_l emitiendo fotones (espontáneo o estimulado)

$$I(L) = I_o e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} L} \approx I_o e^{-\sigma_{ul} N_l L} \approx I_o e^{-\sigma_{ul} N L}$$



Inversión de población en sistemas de dos niveles



- Si inicialmente toda la población está en el nivel l

$$I(L) = I_0 e^{\sigma_{ul} \Delta N_{ul} L} \approx I_0 e^{-\sigma_{ul} N_l L} \approx I_0 e^{-\sigma_{ul} N L} \longrightarrow \text{Aquí solo hay absorción!}$$

- Si hubiera población en $N_u \Rightarrow N = N_u + N_l$

$$I(L) = I_0 e^{\sigma_{ul} (N_u - N_l) L} = I_0 e^{\sigma_{ul} (1 - 2 \frac{N_l}{N}) N L}$$

$$\left(1 - 2 \frac{N_l}{N}\right) \leq 0 \rightarrow \text{absorción siempre hasta que } \frac{N_l}{N} = 0.5$$

- * N_l disminuye porque los átomos son promovidos al nivel N_u
- * $\frac{N_l}{N} = 0.5$ deja de absorber y por lo tanto $N_l = N_u$

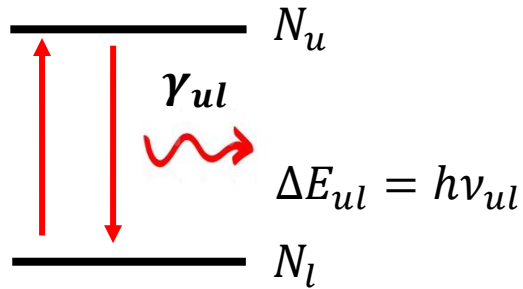
A lo sumo puedo obtener poblaciones iguales

2) Excitación colisional (electrones energéticos que excitan por choques)

$$\frac{N_u}{N_l} = e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e} < 1 \text{ siempre!}$$

- Principio de balance detallado: en equilibrio colisional la tasa de excitación $l \rightarrow u$ es igual a la tasa de decaimiento por colisiones del $u \rightarrow l$
- Decaimiento radiativo A_{ul} disminuye aun más N_u

Inversión de población en sistemas de dos niveles



$$\frac{dN_u}{dt} = B_{lu}I(\nu)(1/c)N_l - B_{ul}I(\nu)N_u(1/c) - A_{ul}N_u = -B_{ul}I(\nu)\Delta N(1/c) - A_{ul}N_u$$

$$\frac{dN_l}{dt} = -B_{lu}I(\nu)N_l(1/c) + B_{ul}I(\nu)N_u(1/c) + A_{ul}N_u = B_{ul}I(\nu)\Delta N(1/c) + A_{ul}N_u$$

Las restamos

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -2B_{lu}I(\nu)\Delta N(1/c) - 2A_{ul}N_u = -2B_{lu}I(\nu)\Delta N(1/c) - A_{ul}\Delta N - A_{ul}N$$

$$2N_u = (N_u + N_l) + (N_u - N_l) = N + \Delta N$$

$$\frac{g_l}{g_u} \sim 1 \rightarrow B_{lu} \sim B_{ul}$$

$$\Delta N = N_u - N_l$$

$$N = N_u + N_l$$

En el estacionario

$$0 = -2B_{lu}I(\nu)\Delta N(1/c) - A_{ul}\Delta N - A_{ul}N$$

$$\Delta N = -\frac{A_{ul}N}{2B_{lu}I(\nu)(1/c) + A_{ul}} = -\frac{N}{1 + \frac{2I(\nu)}{I_{SAT}}} < 0 \text{ siempre!}$$

Es imposible obtener inversión de población con un sistema de dos niveles

Inversión de población en sistemas de más niveles

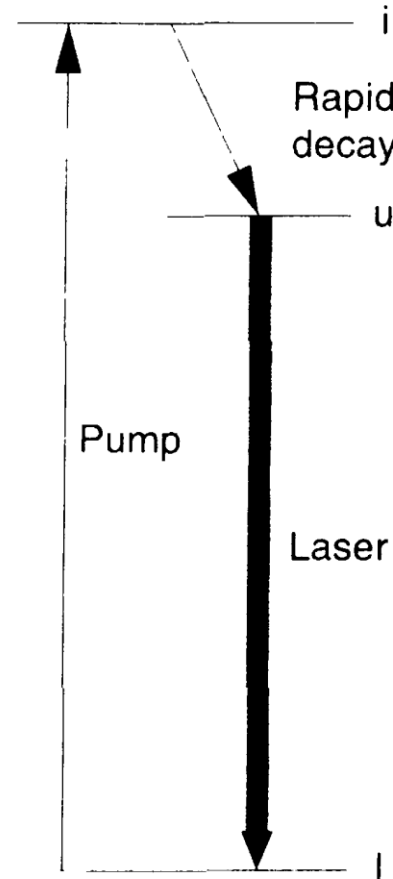


Buscamos

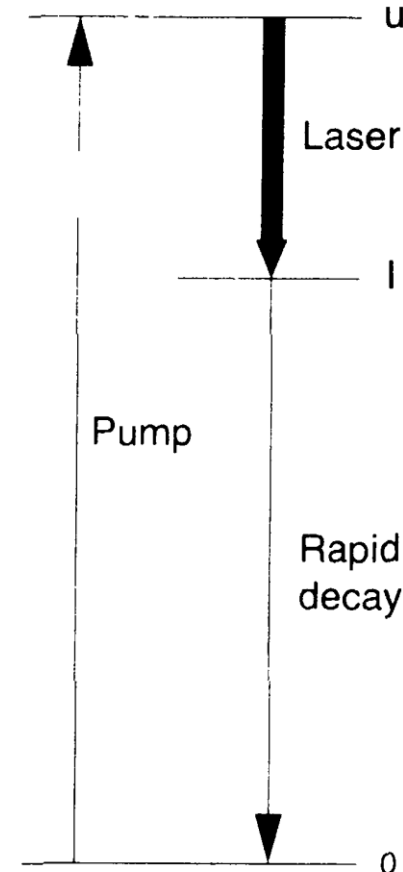
$$N_u > \frac{g_u}{g_l} N_l$$

Condiciones estacionarias

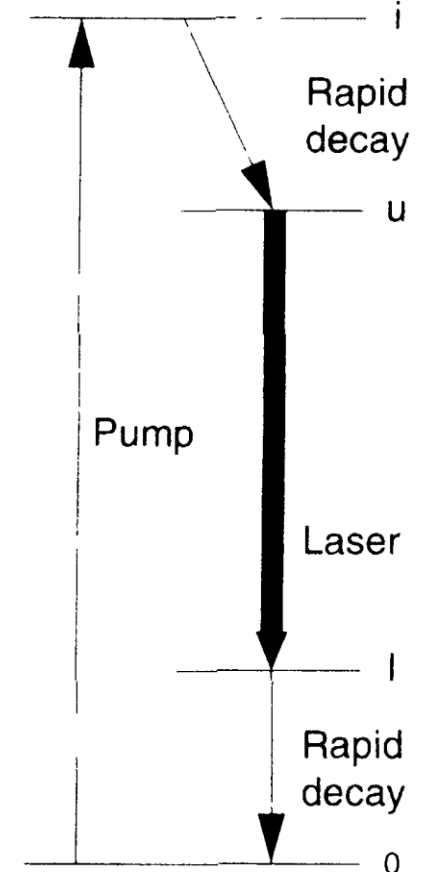
- Bombeo constante
- Poblaciones no cambian en el tiempo



Traditional
solid-state
lasers



Gas lasers



Solid-state
and
organic dye
lasers

Rubí

$$N_u \sim \frac{10^{25}}{\text{cm}^3}$$

$$N_u \sim \frac{10^{14}}{\text{cm}^3}$$

$$\sigma_{ul}^{\text{solid}} < \sigma_{ul}^{\text{gas}}$$

Tasas de decaimiento radiativas y colisionales



Decaimiento radiativo $u \rightarrow l$

$A_{ul} \propto \nu_{ul}^2 f_{ul} \propto \Delta E_{ul}^2 \rightarrow$ aumenta con la separación de niveles

Decaimiento colisional $u \rightarrow l$

Colisiones con electrones (formula empírica de Seaton):

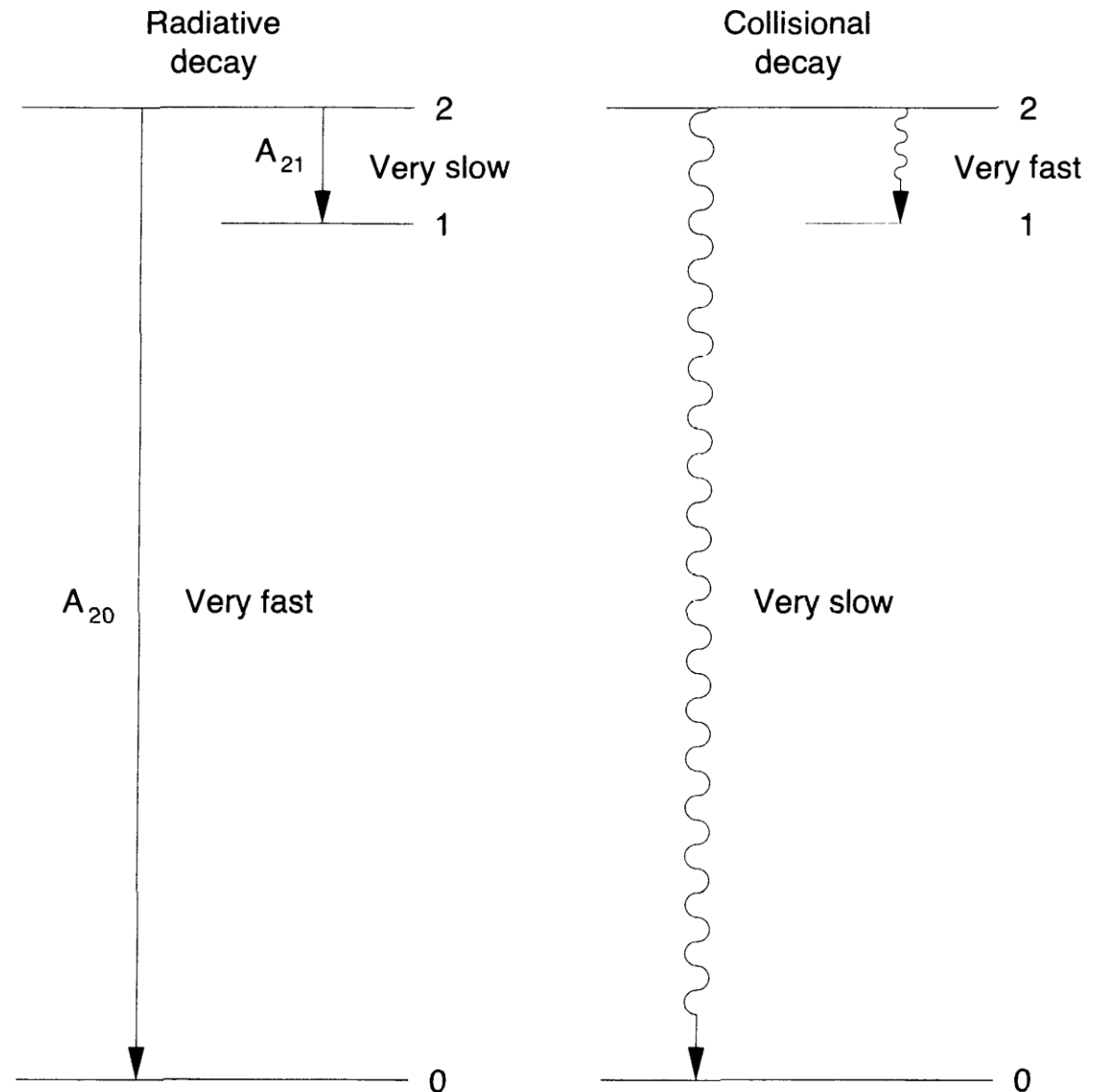
$$k_{ul} = \frac{f_{lu}}{\Delta E \sqrt{T}} \left(\frac{g_u}{g_l} \right) e^{-\Delta E_{ul}/k_B T_e} \propto \frac{1}{\Delta E_{ul}}$$

gases: colisiones electrónicas;

sólidos: relajación no radiativa/fonones.

En ambos casos, las transiciones entre niveles cercanos suelen ser más eficientes.

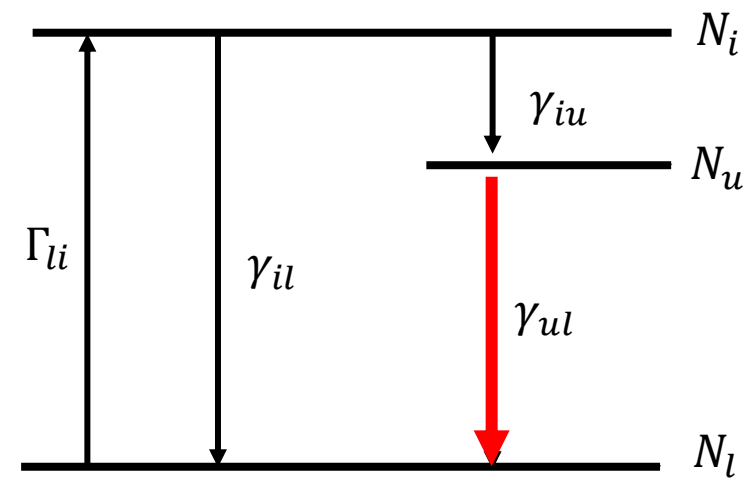
$$\frac{A_{ul}}{k_{ul}} \sim \Delta E_{ul}^3$$



Colisiones vs radiación

Característica (átomo de H)	Línea de 21 cm (Radio)	Línea H-alpha (Visible)
Transición	Estructura hiperfina (Spin)	Salto de nivel $n = 3 \rightarrow 2$
Energía ΔE_{ul}	0.000006 eV (Muy baja)	1.89 eV (Alta)
Probabilidad A_{ul}	$2.9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$	$4.4 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$
Tiempo de vida	¡11 millones de años!	10 nanosegundos
¿Quién gana la competencia?	La Colisión. El átomo choca antes de poder emitir.	La Radiación. El átomo emite antes de que alguien lo toque
Efecto en el gas	El gas se calienta/enfría por choques. (gas en equilibrio)	El gas brilla y pierde energía rápido. (gas fuera de equilibrio)

Para enfriar un gas caliente, la naturaleza usa **colisiones** en las energías bajas para equilibrar los niveles, pero usa **radiación** en las energías altas para 'deshacerse' del exceso de energía rápidamente



- El medio activo se encuentra en equilibrio térmico antes de encender el bombeo
- ΔE_{ul} y ΔE_{il} grandes en comparación con la energía térmica $k_B T$
- $N = N_i + N_l + N_u$

Principio de balance detallado:

$$N_u \gamma_{ul} = N_l \gamma_{lu}$$

$$g_u = g_l$$

Distribución de Boltzmann

$$\frac{N_u}{N_l} = e^{-\Delta E_{ul}/k_B T} = \frac{\gamma_{lu}}{\gamma_{ul}}$$

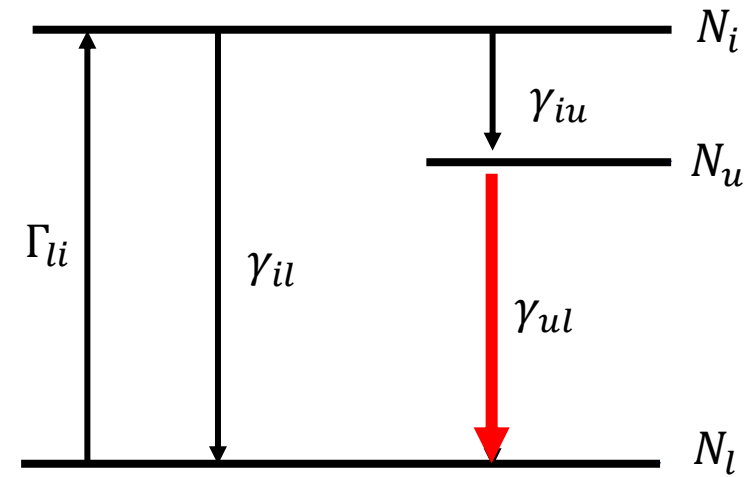
Vimos que @RT ($k_B T \sim 26$ meV), en visible o IR $\Delta E_{ul} \gg k_B T$

$$e^{-\Delta E_{ul}/k_B T} \ll 1 \rightarrow \gamma_{lu} \ll \gamma_{ul} \text{ (analogamente } \gamma_{li} \ll \gamma_{il} \text{ y } \gamma_{ui} \ll \gamma_{iu})$$

Entonces desprecio γ_{lu} , γ_{li} y γ_{ui}

Γ_{li} tasa de excitación
 γ tasas de decaimiento

Sistema de tres niveles con nivel superior intermedio



$$\frac{dN_l}{dt} = -\Gamma_{li}N_l + \gamma_{ul}N_u + \gamma_{il}N_i = 0$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \Gamma_{li}N_l - \gamma_{iu}N_i - \gamma_{il}N_i = 0$$

$$\frac{dN_u}{dt} = \gamma_{iu}N_i - \gamma_{ul}N_u = 0$$

$$N_l = \frac{\gamma_{ul}(\gamma_{iu} + \gamma_{il})}{\gamma_{ul}(\gamma_{il} + \gamma_{iu}) + (\gamma_{ul} + \gamma_{iu})\Gamma_{li}} N$$

$$N_u = \frac{\gamma_{iu}\Gamma_{li}}{\gamma_{ul}(\gamma_{il} + \gamma_{iu}) + (\gamma_{ul} + \gamma_{iu})\Gamma_{li}} N$$

$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{\gamma_{iu}\Gamma_{li}}{\gamma_{ul}(\gamma_{iu} + \gamma_{il})} > 1$$

$$\Gamma_{li} > \gamma_{ul} \left(1 + \frac{\gamma_{il}}{\gamma_{iu}} \right)$$

Condiciones favorables para obtener inversión de población

- $\frac{\gamma_{il}}{\gamma_{iu}} \ll 1$ es lógico en sólidos:

Relajación colisional $k_{ul} \propto \frac{1}{\Delta E_{ul}}$

$$k_{iu} \propto \frac{1}{\Delta E_{iu}} \gg k_{il} \propto \frac{1}{\Delta E_{il}} \rightarrow \frac{k_{il}}{k_{iu}} \ll 1$$

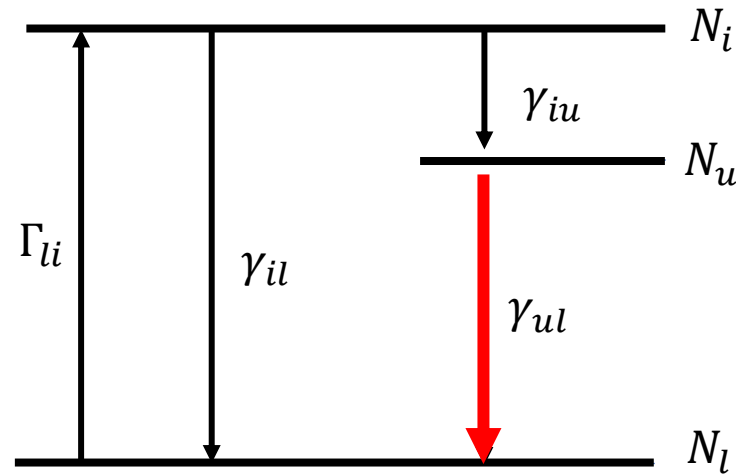
$$\Gamma_{li} > \gamma_{ul}$$

El nivel bombeado se acopla rápidamente al nivel superior laser por relajación no radiativa

- Decaimiento radiativo $u \rightarrow l$, $\gamma_{ul} \sim A_{ul}$

$$\Gamma_{li} > A_{ul}$$

Tasa de bombeo debe superar a la tasa de decaimiento espontaneo $u \rightarrow l$



$$\Gamma_{li} > \gamma_{ul} \sim A_{ul}$$

Síntesis:

- transfiere rápidamente la población de $l \rightarrow i$
- Relajación colisional $i \rightarrow u$ rápida
- El tiempo de vida del nivel superior largo comparado con el tiempo que tarda en bombear

$$\tau_{pump} = \frac{1}{\Gamma_{li}} < \tau_{ul} = \frac{1}{A_{ul}}$$

Vacío rápido l , transfiere población hacia u y la almacena allí durante un tiempo suficientemente largo

Sistema de tres niveles con nivel superior intermedio

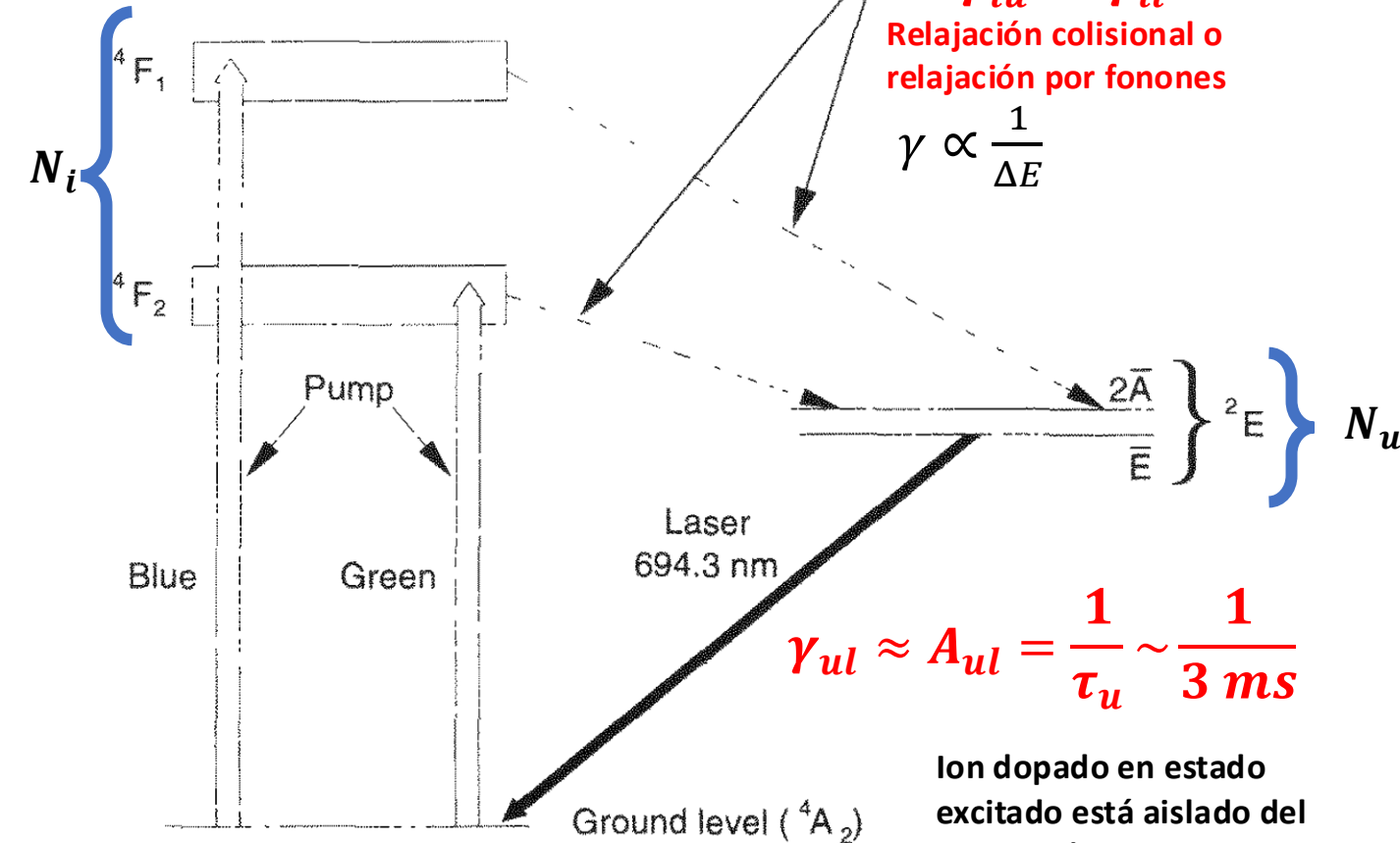


Laser de Rubí

Pumping bands

Fast nonradiative decay

$\gamma_{iu} \gg \gamma_{il}$
Relajación colisional o
relajación por fonones
 $\gamma \propto \frac{1}{\Delta E}$



$$\gamma_{ul} \approx A_{ul} = \frac{1}{\tau_u} \sim \frac{1}{3 \text{ ms}}$$

Ion dopado en estado
excitado está aislado del
entorno (y por lo tanto de
las colisiones)

$$\Gamma_{li} > A_{ul} = 3.33 \times 10^2 \text{ 1/s}$$

de transiciones (por V y t) para llegar al umbral

$$R_p = \Gamma_{li} N_o > N_o A_{ul}$$

- N_o densidad de iones de Cr^{3+}

$$0.05\% \text{ wt} \rightarrow N_o = 1.6 \times 10^{25} / m^3$$

$$R_p^{min} = N_o A_{ul} = 5.3 \times 10^{27} \text{ 1/m}^3 \text{ s}$$

Número total de fotones durante τ_{ul} :

- Geometría medio activo

$$\phi = 6 \text{ mm}, L = 0.1 \text{ m}$$

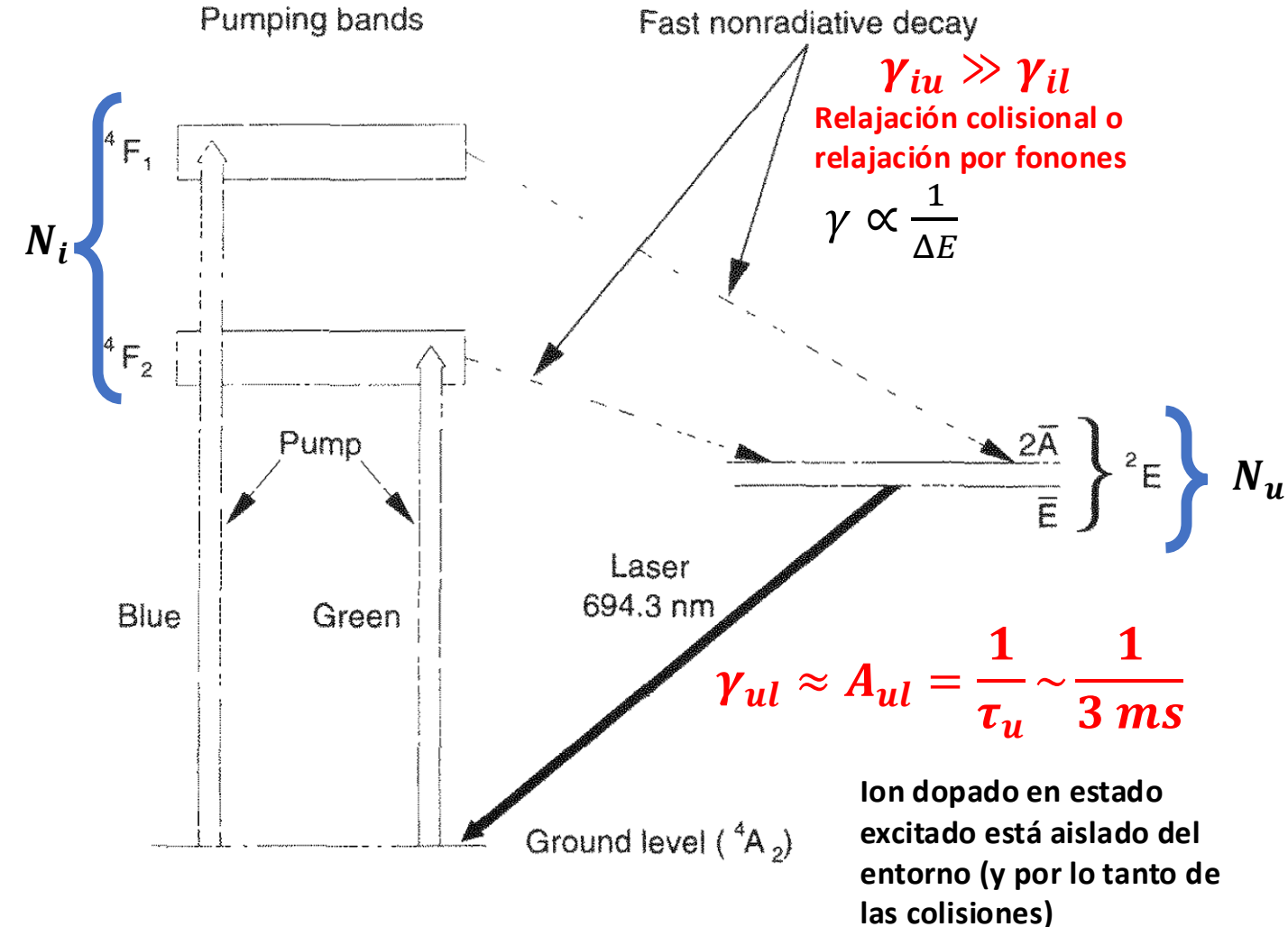
$$V = L\pi R^2 = 2.8 \times 10^{-6} m^3$$

$$N_f = N_o A_{ul} V \tau_{ul} = 4.5 \times 10^{19} \text{ fotones}$$

Sistema de tres niveles con nivel superior intermedio



Laser de Rubi



Energía mínima $E_{\min} = N_f h\nu$

- Bombeo en verde 550 nm

$$h\nu = \frac{1240}{550} \text{ eV} \sim 2.25 \text{ eV}$$

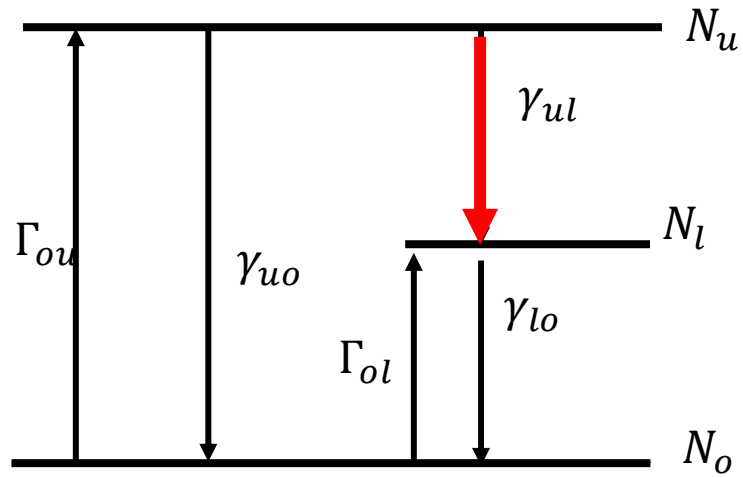
$$E_{\min} = N_f h\nu = 4.5 \times 10^{19} \times 2.25 \text{ eV} \sim 10^{20} \text{ eV}$$

$$E_{\min} = 10^{20} \times 1.6 \times 10^{-19} = 16 \text{ J}$$

Potencia

$$P_{\min} = \frac{E_{\min}}{\tau_{ul}} = \frac{16 \text{ J}}{3 \times 10^{-3} \text{ s}} \sim 5.3 \text{ kW}$$

Sistema de tres niveles con nivel inferior intermedio



- Antes de encender el bombeo $N_o \sim N$
- ΔE_{lo} y $\Delta E_{uo} \gg k_b T$
- No hay excitación térmica $\gamma_{ou} \sim 0, \gamma_{ol} \sim 0, \gamma_{lu} \sim 0$

$$\frac{dN_l}{dt} = \Gamma_{ol}N_o + \gamma_{ul}N_u - \gamma_{lo}N_l = 0$$

$$\frac{dN_u}{dt} = \Gamma_{ou}N_o - (\gamma_{uo} + \gamma_{ul})N_u = 0$$

$$N_u = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{(\gamma_{uo} + \gamma_{ul})}$$

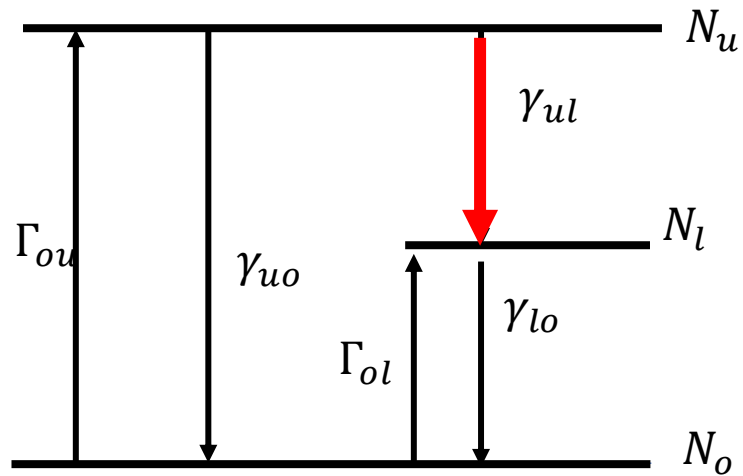
$$N_l = \frac{N_o [\Gamma_{ol} + \Gamma_{ou} \gamma_{ul} / (\gamma_{uo} + \gamma_{ul})]}{\gamma_{lo}}$$

Busco

$$\Delta N_{ul} = N_u - \left(\frac{g_u}{g_l} \right) N_l > 0 \rightarrow \frac{g_l N_u}{g_u N_l} > 1$$

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{\gamma_{lo} \Gamma_{ou}}{\gamma_{uo} \Gamma_{ol} + \gamma_{ul} [\Gamma_{ol} + \Gamma_{ou}]} > 1$$

Sistema de tres niveles con nivel inferior intermedio



$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{\gamma_{lo} \Gamma_{ou}}{\gamma_{uo} \Gamma_{ol} + \gamma_{ul} [\Gamma_{ol} + \Gamma_{ou}]} > 1$$

- Sistemas atómicos en donde los procesos colisionales son despreciables respecto radiativos

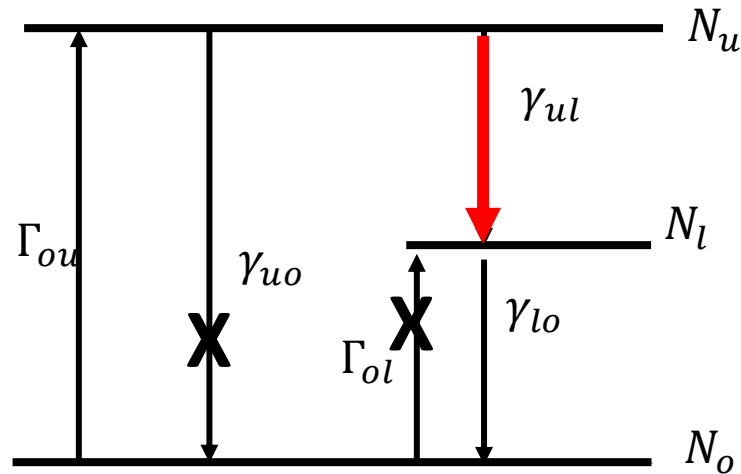
$$\gamma_{uo} \sim A_{uo}, \gamma_{lo} \sim A_{lo}, \gamma_{ul} \sim A_{ul}$$

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo} \Gamma_{ou}}{A_{uo} \Gamma_{ol} + A_{ul} [\Gamma_{ol} + \Gamma_{ou}]} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo}}{(A_{uo} + A_{ul}) \Gamma_{ol} / \Gamma_{ou} + A_{ul}} > 1$$

Condiciones favorables para obtener inversión de población

- $\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} < 1$ bombeo más rápido el nivel u que el l
- si $A_{lo} \gg (A_{ul} + A_{uo})$ el decaimiento desde el nivel l es mucho más rápido que desde el u
- $A_{lo} \gg A_{ul}$;
- $A_{uo} \sim 0$ si u y o niveles de igual paridad

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo}}{A_{ul} [\Gamma_{ol} / \Gamma_{ou} + 1]} > 1$$



$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo}}{A_{ul} [\Gamma_{ol}/\Gamma_{ou} + 1]} > 1$$

Síntesis:

- Para llenar N_u , bombeo $o \rightarrow u$ más eficiente que $o \rightarrow l$

$$\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} < 1 \text{ predomina bombeo a } u$$

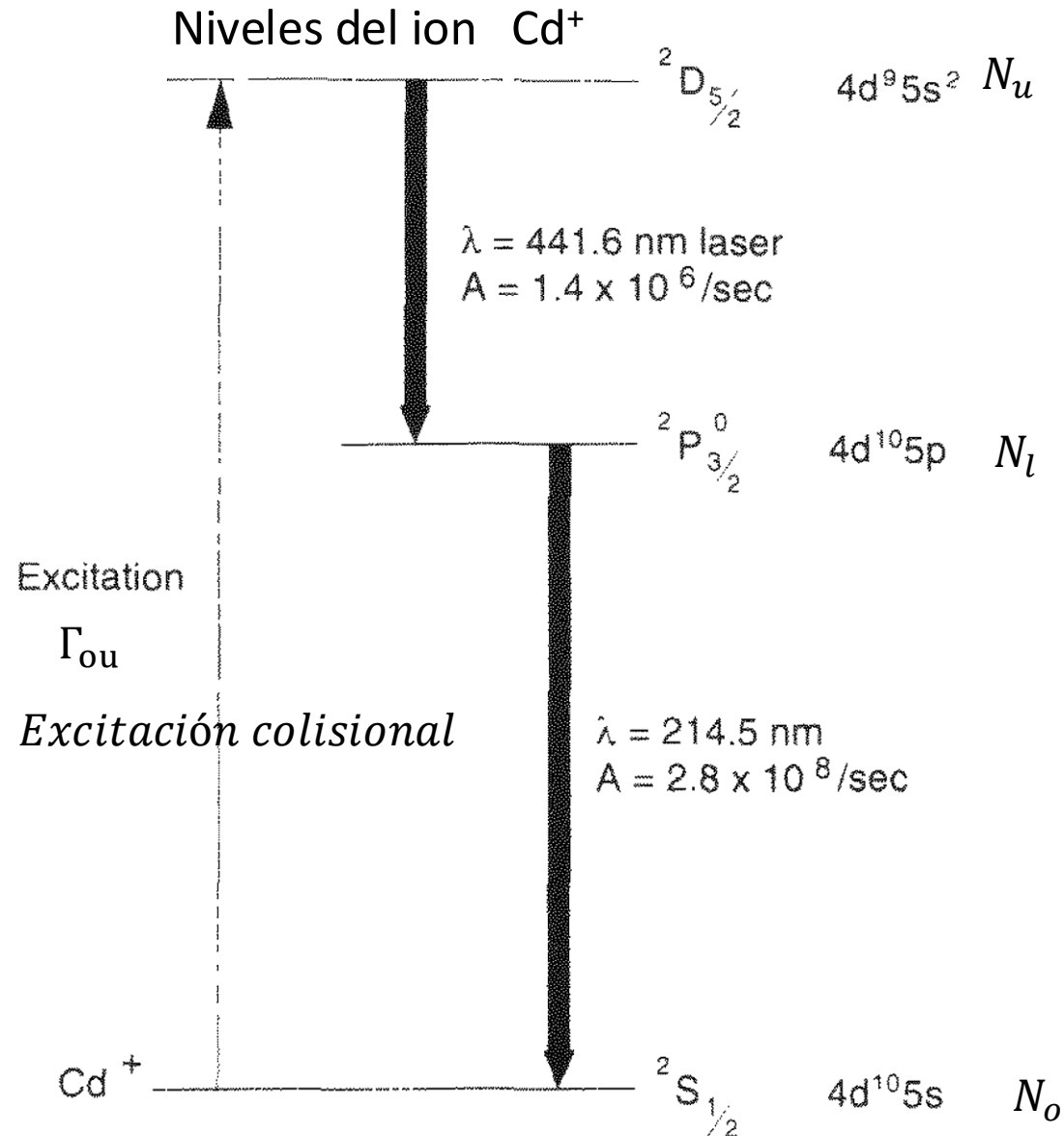
- Tiempo de vida del nivel superior largo
- El nivel inferior laser l debe vaciarse rápido hacia o

$$A_{lo} \gg A_{ul}$$

$$\tau_{lo} \ll \tau_{ul}$$

Lleno u , evito llenar l , y vacío u lo más rápido posible

Ejemplo: láser He-Cd



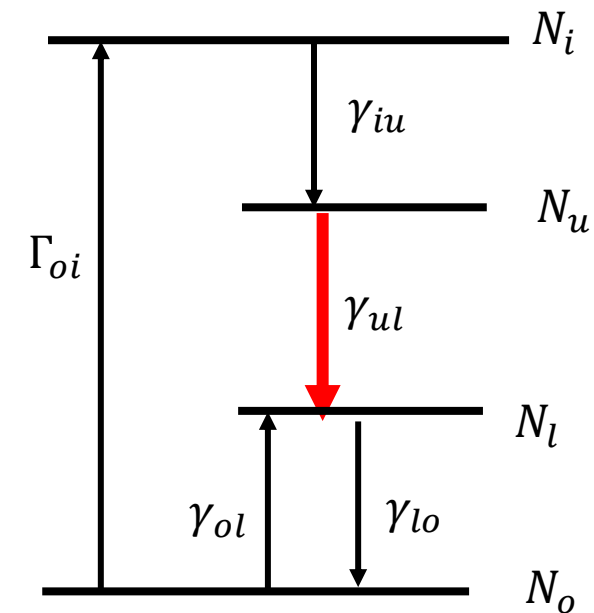
$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo}}{A_{ul} [\Gamma_{ol} / \Gamma_{ou} + 1]} > 1$$

$$g_u = 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 6 \quad g_l = 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 4$$

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{4}{6} \right) \frac{2.8 \times 10^8 \text{ 1/s}}{1.4 \times 10^8 \text{ 1/s} [\Gamma_{ol} / \Gamma_{ou} + 1]} = \left(\frac{4}{6} \right) \frac{200}{[\Gamma_{ol} / \Gamma_{ou} + 1]} > 1$$

$$\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} < \mathbf{132}$$

Sistema láser de cuatro niveles (estado sólido y orgánicos)



- Antes de encender el bombeo $N_o \sim N$

Transiciones colisionales $\gamma \sim \frac{1}{\Delta E}$: separaciones entre niveles de energía grandes entonces se desprecian

- **Transiciones hacia arriba:** $\gamma_{ou}, \gamma_{oi}, \gamma_{lu}, \gamma_{li}, \gamma_{ui}$
- **Transiciones hacia abajo:** $\gamma_{il}, \gamma_{io}, \gamma_{uo}$
- **Excepción** γ_{ol}, γ_{lo} excitación y desexcitación térmica (chicos pero importan, porque esos niveles no están muy separados)

Transiciones radiativas

- $\gamma_{ul} = A_{ul} + \frac{1}{T_1}$
- $g_u = g_l$ para simplificar

$$\frac{dN_l}{dt} = \gamma_{ul}N_u - \gamma_{lo}N_l + \gamma_{ol}N_o = 0$$

$$\frac{dN_u}{dt} = -\gamma_{ul}N_u + \gamma_{iu}N_i = 0$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \Gamma_{oi}N_o - \gamma_{iu}N_i = 0$$

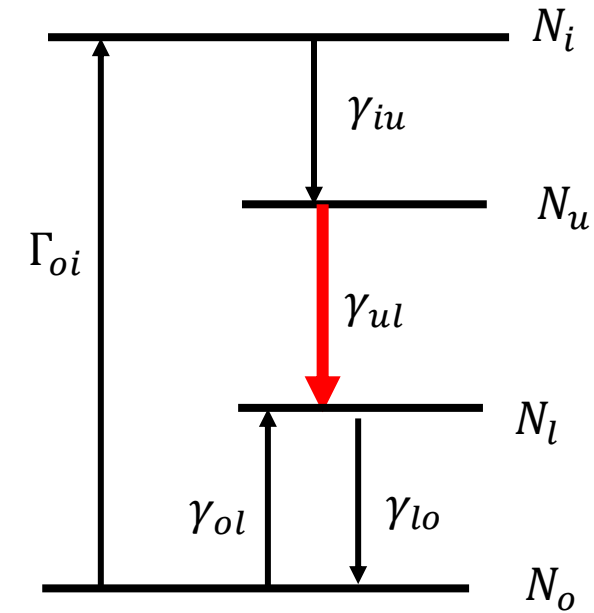
$$N = N_o + N_i + N_u + N_l = cte$$

$$N_u = \frac{\Gamma_{oi}}{\gamma_{ul}} N_o$$

$$N_l = \frac{\gamma_{ol} + \Gamma_{oi}}{\gamma_{lo}} N_o$$

$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{\gamma_{lo}\Gamma_{oi}}{\gamma_{ul}(\gamma_{ol} + \Gamma_{oi})} > 1$$

Sistema láser de cuatro niveles



$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{\gamma_{lo}\Gamma_{oi}}{\gamma_{ul}(\gamma_{ol} + \Gamma_{oi})} > 1 \rightarrow \Gamma_{oi} > \frac{\gamma_{ol}\gamma_{ul}}{(\gamma_{lo} - \gamma_{ul})} \sim \frac{\gamma_{ol}\gamma_{ul}}{(\gamma_{lo})}$$

$\gamma_{lo} \gg \gamma_{ul}$ (por la separación de niveles)

$$\Gamma_{oi} > \frac{\gamma_{ol}}{\gamma_{lo}} \gamma_{ul} \sim \gamma_{ul} e^{-\Delta E_{lo}/k_b T}$$



Antes de encender el bombeo, por el principio de balance detallado

$$\gamma_{ol}N_o = \gamma_{lo}N_l$$

$$\frac{\gamma_{ol}}{\gamma_{lo}} = \frac{N_l}{N_o} \sim e^{-\Delta E_{lo}/k_b T}$$

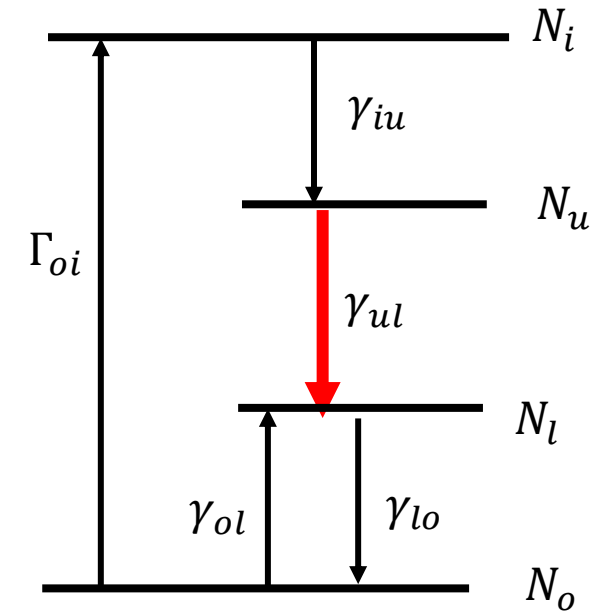
Análogamente

$$\frac{N_i}{N_u} \sim e^{-\Delta E_{iu}/k_b T}$$

Los niveles $l - o$ e $i - u$ alcanzan el equilibrio térmico (por medio de colisiones) en tiempos $\sim 10^{-13}s$

$$\frac{\Delta E_{lo}}{k_b T} > 1$$

Sistema láser de cuatro niveles



$$\frac{N_u}{N_l} = \frac{\gamma_{lo}\Gamma_{oi}}{\gamma_{ul}(\gamma_{ol} + \Gamma_{oi})} > 1 \rightarrow \Gamma_{oi} > \frac{\gamma_{ol}\gamma_{ul}}{(\gamma_{lo} - \gamma_{ul})} \sim \frac{\gamma_{ol}\gamma_{ul}}{(\gamma_{lo})}$$

$\gamma_{lo} \gg \gamma_{ul}$ (por la separación de niveles)

$$\Gamma_{oi} > \frac{\gamma_{ol}}{\gamma_{lo}} \gamma_{ul} \sim \gamma_{ul} e^{-\Delta E_{lo}/k_b T}$$

En comparación con sistema de 3 niveles, los requerimientos de bombeo son menores gracias a que $e^{-\Delta E_{lo}/k_b T} \ll 1$ (Recordar en 3 niveles $\Gamma_{oi} > \gamma_{ul}$)

Antes de encender el bombeo, por el principio de balance detallado

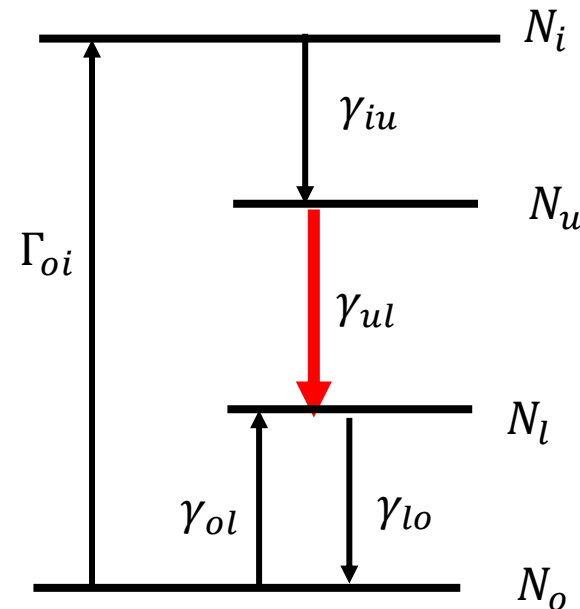
$$\gamma_{ol}N_o = \gamma_{lo}N_l$$

$$\frac{\gamma_{ol}}{\gamma_{lo}} = \frac{N_l}{N_o} \sim e^{-\Delta E_{lo}/k_b T}$$

Análogamente

$$\frac{N_i}{N_u} \sim e^{-\Delta E_{iu}/k_b T}$$

Los niveles $l - o$ e $i - u$ alcanzan el equilibrio térmico (por relajación no radiativa colisiones/ fonones) en tiempos $\sim 10^{-13} s$



En síntesis

$$\gamma_{lo} \gg \gamma_{ul}$$

$$\tau_{lo} \ll \tau_{ul}$$

- El nivel inferior se vacía rápido
- El nivel superior tiene tiempo de vida largo

$$\Gamma_{oi} > \frac{\gamma_{ol}}{\gamma_{lo}} \gamma_{ul} \sim \gamma_{ul} e^{-\Delta E_{lo}/k_b T}$$

- El bombeo tiene que ser más rápido que la tasa $u \rightarrow l$ ferior, reducida por el factor de Boltzmann asociado a la baja población térmica del nivel inferior.

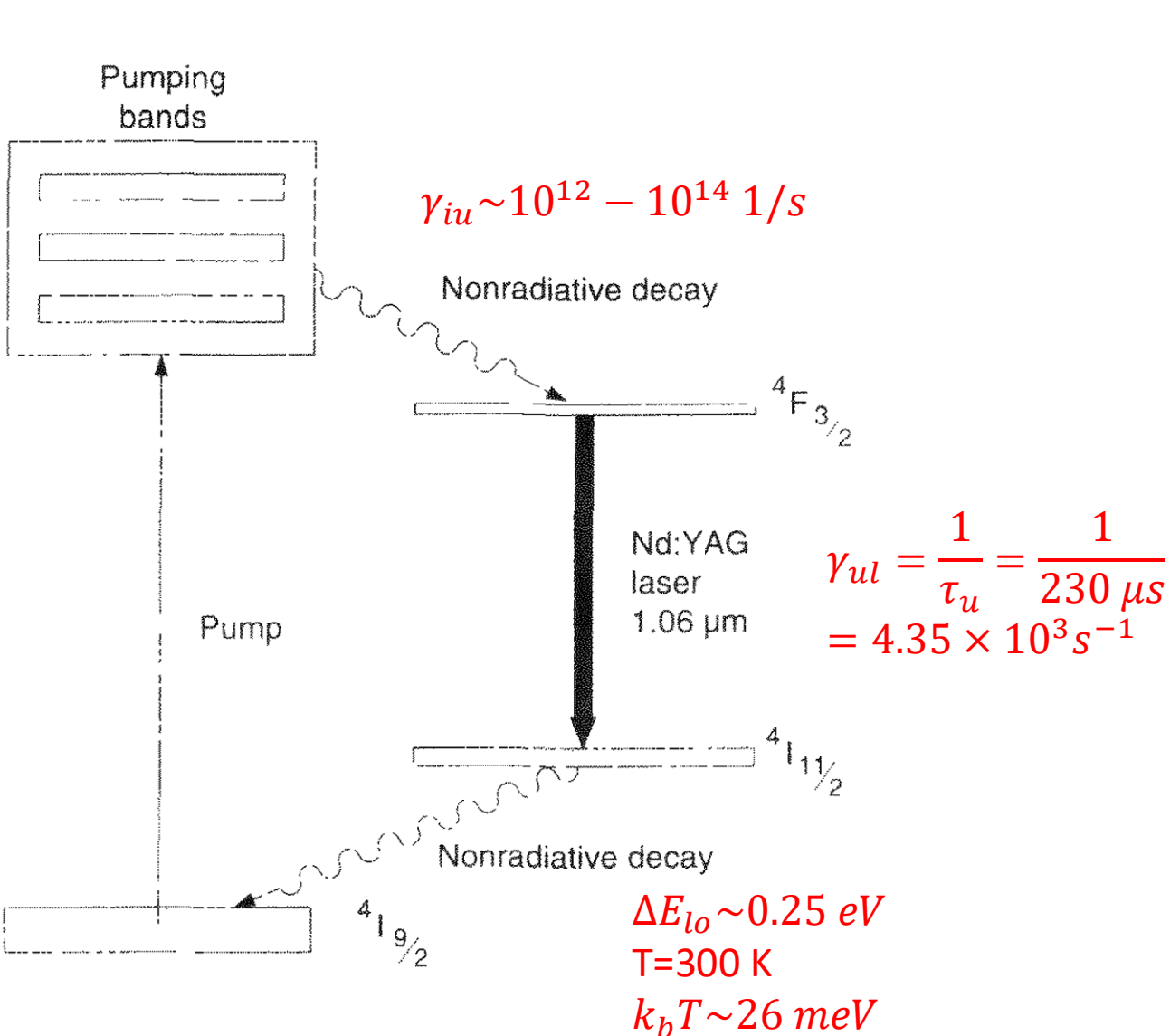
$$\gamma_{ul} = A_{ul} + \frac{1}{T_1}$$

Molesta pero está

Cuatro niveles $\Rightarrow N_l$ pequeño y vaciado rápido $\Rightarrow$ menor umbral de bombeo.

El factor de Boltzmann reduce fuertemente el bombeo mínimo requerido frente a un sistema de tres niveles.

Nd:Yag vs Rubi



$$\gamma_{ul}^{Nd:Yag} \gg \gamma_{ul}^{Rubi}$$

Nd:Yag 4 niveles

$$\Gamma_{oi} > \gamma_{ul} e^{-\Delta E_{lo}/k_b T} \sim 0.265 \text{ 1/s}$$

Reduce los requerimientos de bombeo

Rubí 3 niveles

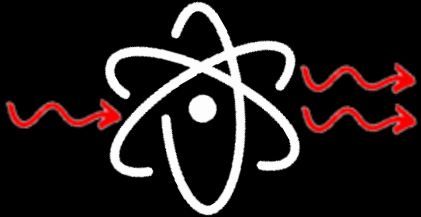
$$\Gamma_{li} > A_{ul} \sim 333/\text{s}$$

$$\frac{\Gamma_{li} \text{ min}(rubi)}{\Gamma_{oi} \text{ min}(Nd:Yag)} = \frac{333}{0.265} = 1257$$

A pesar que

$$\tau_{ul}^{rubi}(3 \text{ ms}) > \tau_{ul}^{Nd:Yag}(230 \mu\text{s})$$

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

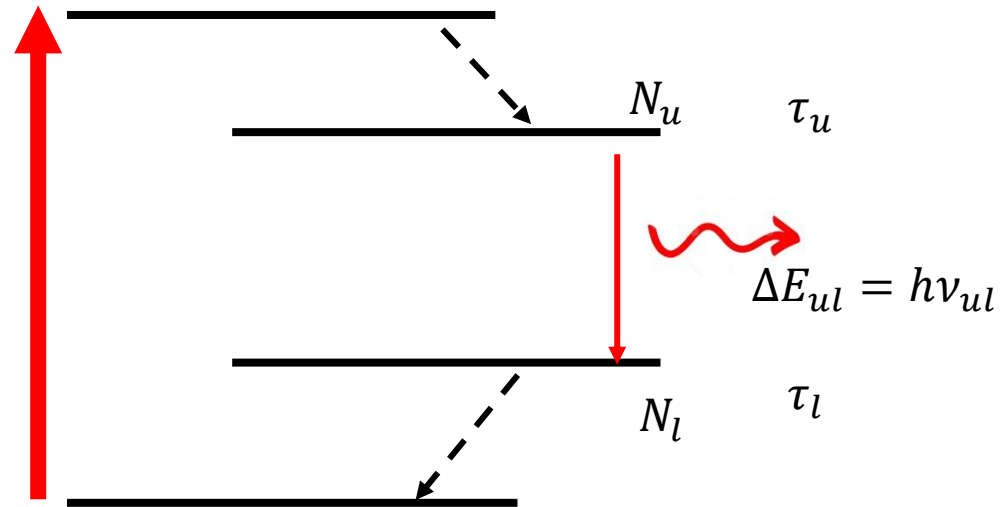
- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

Condiciones favorables para obtener inversión de población



Los medios activos láser que vimos hasta ahora tienen una característica común:



Nivel superior laser

τ_u Largo $\rightarrow$ permite acumular población en el nivel superior

Bombeo rápido para llenar nivel superior antes de que éste se vacíe

$$\Gamma_{bombeo} > \gamma_{ul} \quad (\tau_{bombeo} < \tau_u)$$

Nivel inferior laser:

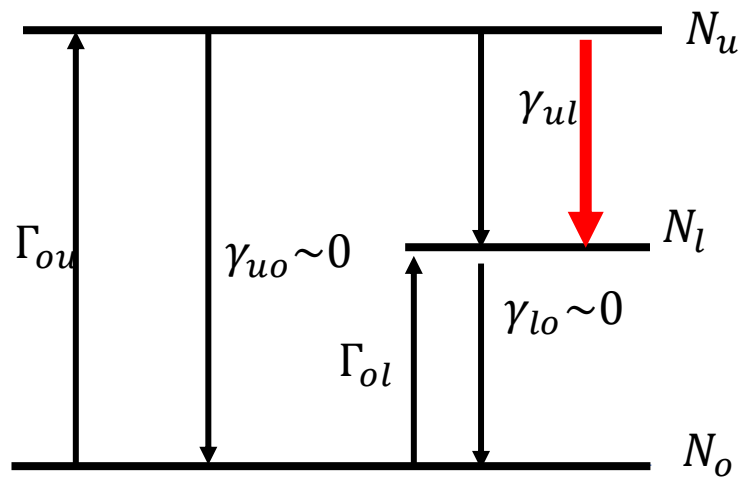
Debe vaciarse rápidamente, para evitar que se acumule población y se destruya la inversión de población

τ_l corto (γ_{lo} grande)

$$\tau_u \text{ largo}, \quad \tau_{bombeo} < \tau_u, \quad \tau_l \text{ corto}$$

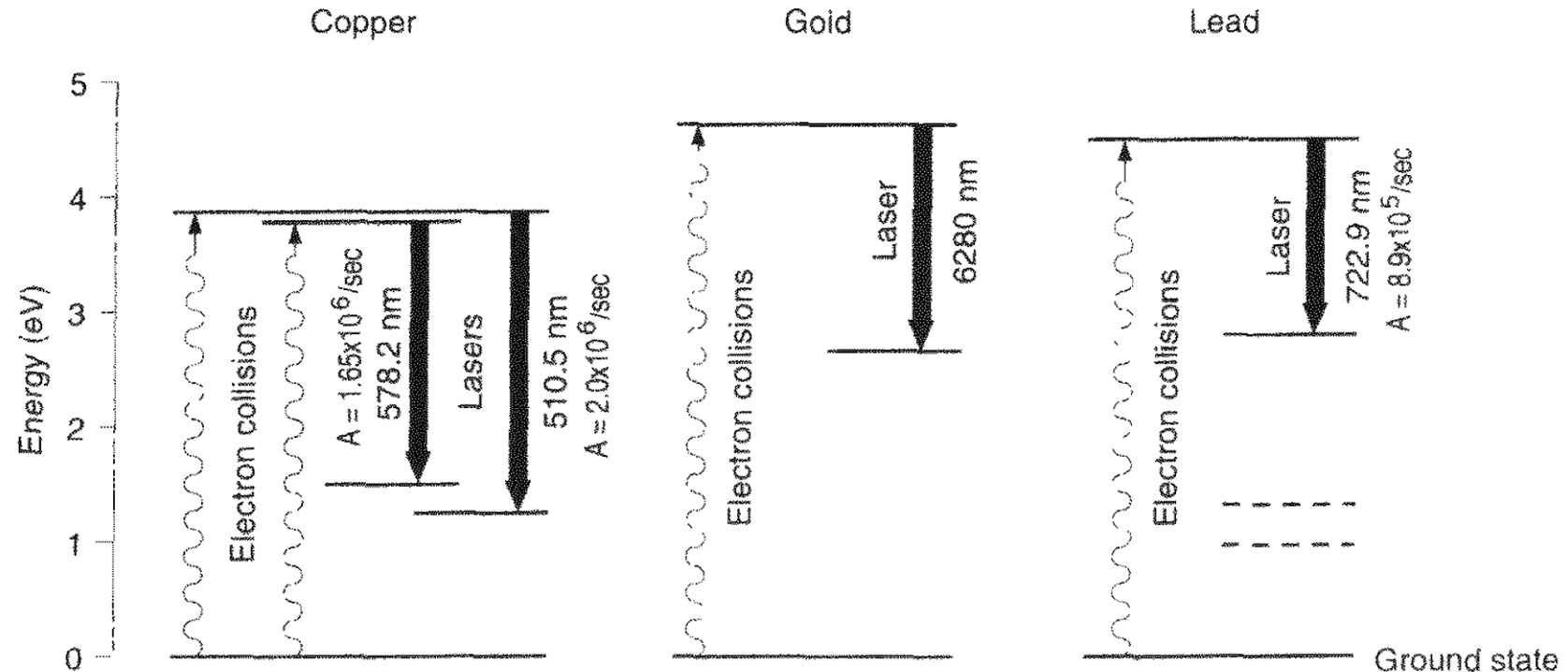
Acumular población rápidamente en u , mantenerla el tiempo suficiente y evitar acumulación en l .

Inversión de población transitoria en sistema de tres niveles

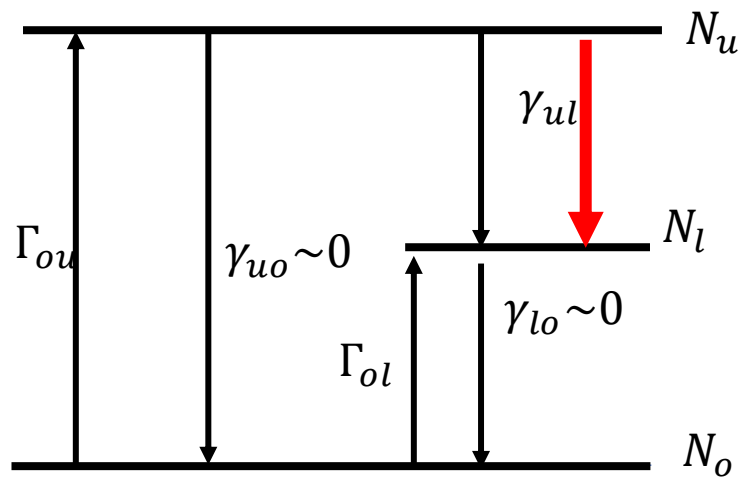


- $\gamma_{lo} \ll \gamma_{ul}$ ($\tau_l = 1/\gamma_{lo}$ muy lento comparado con τ_u)
- $\gamma_{uo} \sim 0$
- $\gamma_{uo}^{eff} \sim 0$ vaciamiento lento de $l \rightarrow o$ por **atrapamiento de radiación** (algunos láseres gaseosos)
- $\tau_u = \frac{1}{\gamma_u} \sim \frac{1}{\gamma_{ul}} = \frac{1}{A_{ul}}$ (decaimiento colisional no es importante)

Ejemplos láseres de vapor



Inversión de población transitoria en sistema de tres niveles



- $\gamma_{lo} \ll \gamma_{ul}$ ($\tau_l = 1/\gamma_{lo}$ muy lento comparado con τ_u)
- $\gamma_{uo} \sim 0$
- $\gamma_{uo}^{eff} \sim 0$ vaciamiento lento de $l \rightarrow o$ por **atrapamiento de radiación** (algunos láseres gaseosos)
- $\tau_u = \frac{1}{\gamma_u} \sim \frac{1}{\gamma_{ul}} = \frac{1}{A_{ul}}$ (decaimiento colisional no es importante)

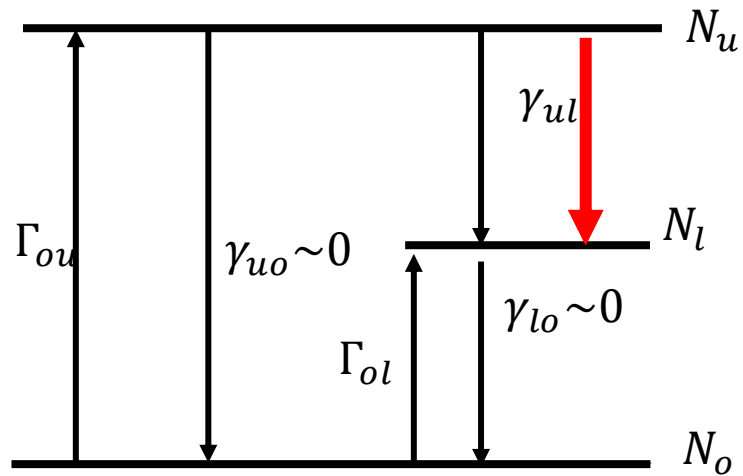
$$\frac{dN_u}{dt} = N_o \Gamma_{ou} - N_u A_{ul}$$

$$\frac{dN_l}{dt} = N_o \Gamma_{ol} + N_u A_{ul}$$

$$N_u(t) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} (1 - e^{-A_{ul}t})$$

$$N_l(t) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} \left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] A_{ul}t - (1 - e^{-A_{ul}t}) \right\}$$

Inversión de población transitoria en sistema de tres niveles



$$N_u(t) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} (1 - e^{-A_{ul}t})$$

$$N_l(t) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} \left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] A_{ul}t - (1 - e^{-A_{ul}t}) \right\}$$

$$t \gg 1/A_{ul}$$

$$N_u(t) \rightarrow \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} \quad (\text{estacionario})$$

$$N_l(t) \approx \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} \left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] A_{ul}t \right\} \quad (\text{crece lineal en el tiempo, no hay decaimiento } \gamma_{lo})$$

$$\frac{N_u(t)}{N_l(t)} = \frac{1}{\left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] A_{ul}t \right\}} < 1$$

Entonces, no hay inversión de población estacionaria, ¿pero puede haber inversión de población transitoria?

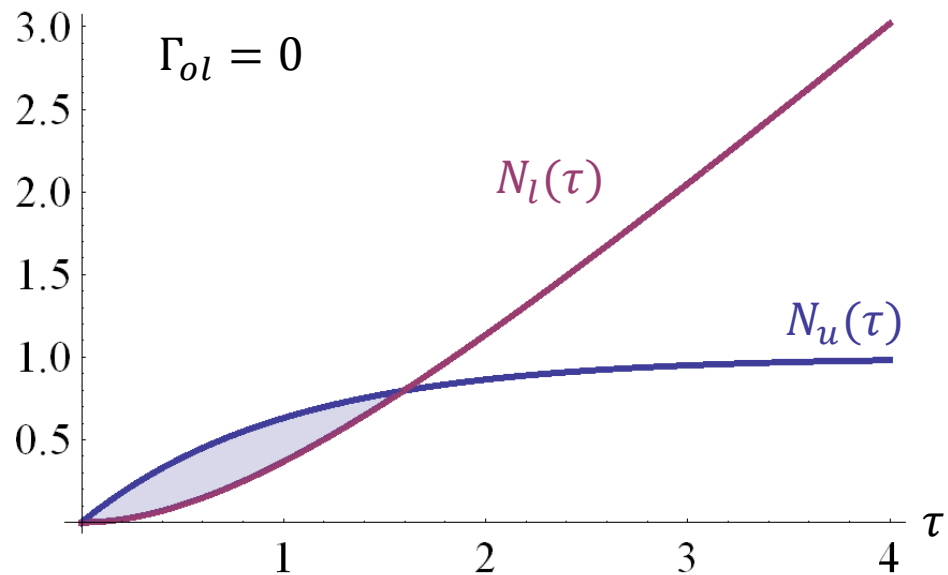
Inversión de población transitoria en sistema de tres niveles



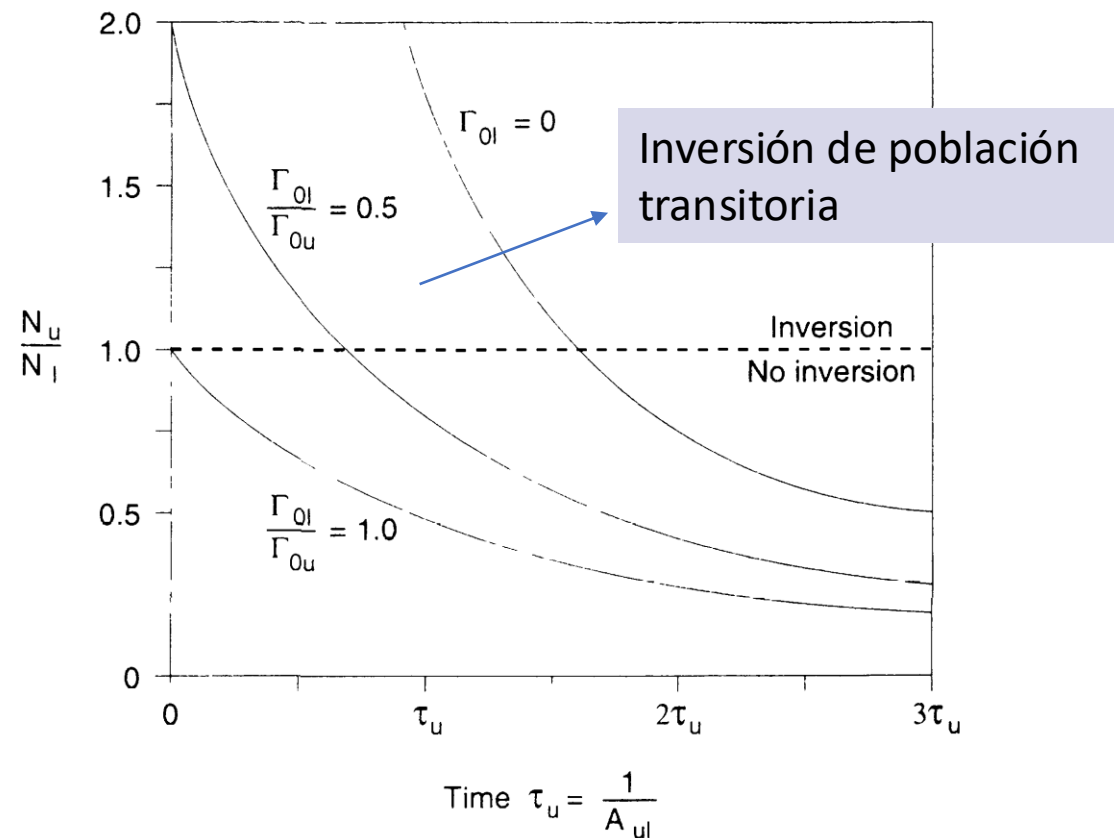
Inversión de población si $\frac{N_u(t)}{N_l(t)} > 1$; $A_{ul} = \frac{1}{\tau_u}$; $\tau = t/\tau_u$

$$N_u(\tau) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} (1 - e^{-\tau})$$

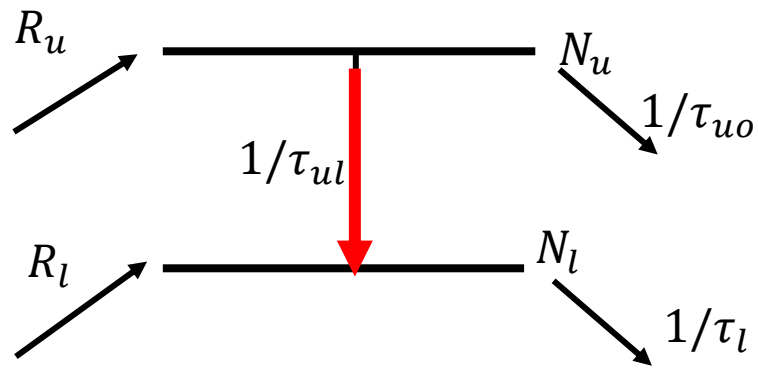
$$N_l(\tau) = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} \left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] \tau - (1 - e^{-\tau}) \right\}$$



$$\frac{N_u(t)}{N_l(t)} = \frac{(1 - e^{-\tau})}{\left\{ \left[\frac{\Gamma_{ol}}{\Gamma_{ou}} + 1 \right] \tau - (1 - e^{-\tau}) \right\}}$$



Inversión de población transitoria. Formulación general



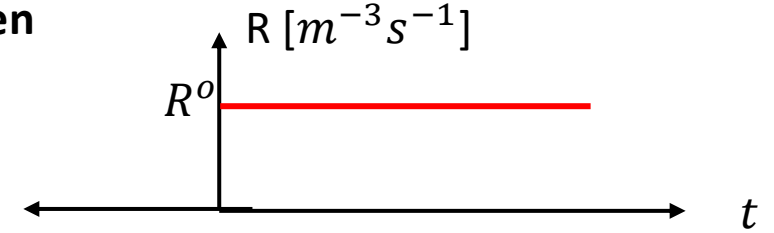
tasas de bombeo por unidad de volumen

$$R_u = R_u(t)$$

$$R_l = R_l(t)$$

Ej: Si bombeo $o \rightarrow u$

$$R_u^o = N_o \Gamma_{ou}$$



$$\frac{1}{\tau_u} = \frac{1}{\tau_{ul}} + \frac{1}{\tau_{uo}}$$

$$\frac{dN_u}{dt} = R_u(t) - \frac{N_u}{\tau_u} - \frac{B_{ul}I}{c} [N_u - N_l]$$

$$\frac{dN_l}{dt} = R_l(t) + \frac{N_u}{\tau_{ul}} + \frac{B_{ul}I}{c} [N_u - N_l] - \frac{N_l}{\tau_l}$$

Caso $I = 0$

$$\frac{dN_u}{dt} = R_u(t) - \frac{N_u}{\tau_u}$$

$$\frac{dN_l}{dt} = R_l(t) + \frac{N_u}{\tau_{ul}} - \frac{N_l}{\tau_l}$$

Condiciones iniciales

$$N_u(0) = 0$$

$$N_l(0) = N_l^o$$

Poblaciones estacionarias para R_l y R_u constantes $t > 0$

$$N_u(t) = R_u \tau_u \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_u}}\right)$$

$$N_l(t) = \tau_l R_l + R_u \phi \tau_l \left(1 - \frac{\tau_u}{\tau_u - \tau_l} e^{-\frac{t}{\tau_u}} + \left(\frac{\tau_l}{\tau_u - \tau_l} + \left(\frac{N_l^o - R_l \tau_l}{R_u \phi \tau_l}\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau_l}}\right)$$

Poblaciones estacionarias para $R_l = 0$

$$N_u(t \rightarrow \infty) \rightarrow R_u \tau_u$$

$$N_l(t \rightarrow \infty) \rightarrow R_u \phi \tau_l$$

Si pedimos que haya inversión de población estacionaria entonces

$$N_l < N_u$$

$$R_u \phi \tau_l < R_u \tau_u$$

$$R_u \frac{\tau_u}{\tau_{ul}} \tau_l < R_u \tau_u \Rightarrow \tau_l < \tau_{ul}$$

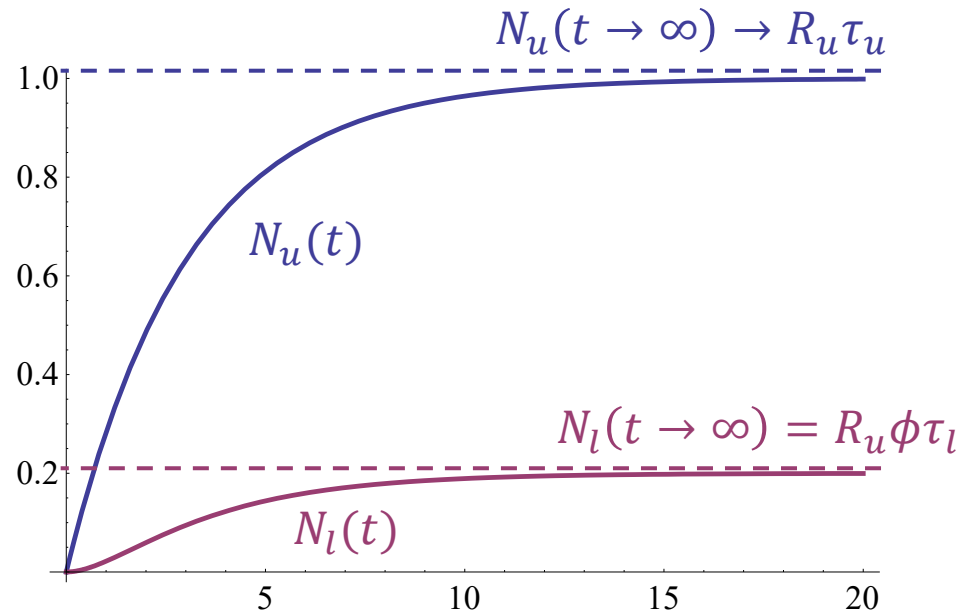
Branching ratio

$$\phi = \frac{\text{decaimientos } u \rightarrow l}{\text{totales}} = \frac{1/\tau_{ul}}{1/\tau_u} = \frac{\tau_u}{\tau_{ul}}$$

Inversión de población transitoria



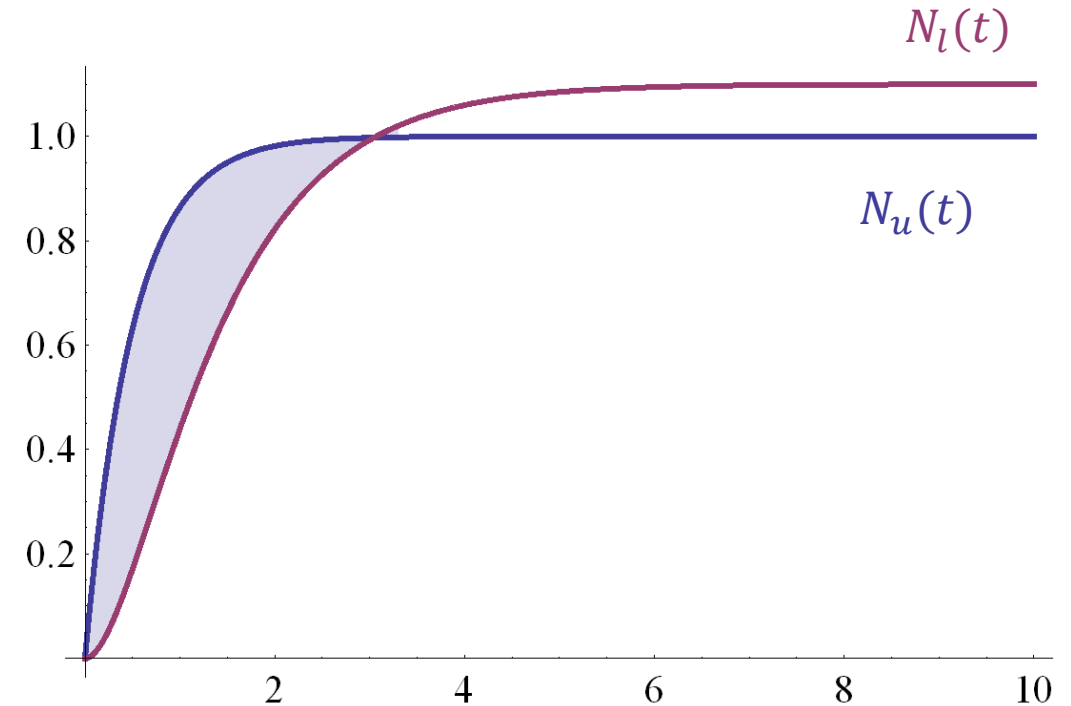
$N_l^o = 0$ $\tau_{ul} > \tau_l$ inversión de población estacionaria
 $R_l = 0$



inversión de población en todo tiempo

Si alcanza el umbral $\rightarrow$ lasea todo el tiempo

$\tau_u < \tau_l$



inversión de población transitoria

- *La ganancia debe superar al umbral mientras dure la inversión de población*
- *Funciona solo pulsado*
- *Transitorio menos restricciones que estacionario*

Caso $I \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{dN_u}{dt} &= R_u(t) - \frac{N_u}{\tau_u} - \frac{B_{ul}I}{c} [N_u - N_l] \\ \frac{dN_l}{dt} &= R_l(t) + \frac{N_u}{\tau_{ul}} + \frac{B_{ul}I}{c} [N_u - N_l] - \frac{N_l}{\tau_l}\end{aligned}$$

$\tau_l \sim 0$ (vacío instantáneamente a N_l), $N_l \sim 0$

Ejemplo: excímeros, Nd:yag

$$\frac{dN_u}{dt} = R_u(t) - \frac{N_u}{\tau_u} - \frac{B_{ul}I}{c} N_u$$

$$R_u(t) = \frac{dN_u}{dt} + \frac{N_u}{\tau_u} + \frac{B_{ul}I}{c} N_u = \frac{dN_u}{dt} + \left(1 + \tau_u \frac{B_{ul}I}{c}\right) \frac{N_u}{\tau_u} = \frac{dN_u}{dt} + \left(1 + \frac{I}{I_{SAT}}\right) \frac{N_u}{\tau_u}$$

$$\frac{dN_u}{dt} + \left(1 + \frac{I}{I_{SAT}}\right) \frac{N_u}{\tau_u} = R_u(t)$$

$$N_u(t) = \frac{R_u \tau_u}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t}{\tau_u} \left(1 + \frac{I}{I_{sat}} \right) \right] \right\}$$

Inversión de población transitoria



$$N_u(t) = \frac{R_u \tau_u}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t}{\tau_u} \left(1 + \frac{I}{I_{sat}} \right) \right] \right\} = R_u \tau'_u \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t}{\tau'_u} \right] \right\}$$

$$\tau'_u = \frac{\tau_u}{\left(1 + \frac{I}{I_{sat}} \right)} < \tau_u$$

Valor estacionario modulado por la intensidad de saturación

$$N_u(t \rightarrow \infty) = \frac{R_u \tau_u}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$$

$\frac{I}{I_{sat}} \ll 1$ predomina el decaimiento espontáneo/no estimulado

$$N_u(t) = R_u \tau_u \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t}{\tau_u} \right] \right\}$$

$\frac{I}{I_{sat}} \gg 1$ predomina emisión estimulada.

$$N_u(t) \rightarrow 0$$

$$N_u(t \rightarrow \infty) = R_u \tau_u \frac{I_{sat}}{I} \ll R_u \tau_u$$

La emisión estimulada consume la inversión y mantiene N_u pequeño.

La intensidad láser consume la inversión de población: reduce N_u y acorta el tiempo efectivo de vida del nivel superior



Atrapamiento de radiación

Reduce el vaciamiento efectivo del nivel inferior láser en medios gaseosos.

Termalización por colisiones electrónicas

Las colisiones tienden a llevar las poblaciones de los niveles láser hacia una distribución de equilibrio.

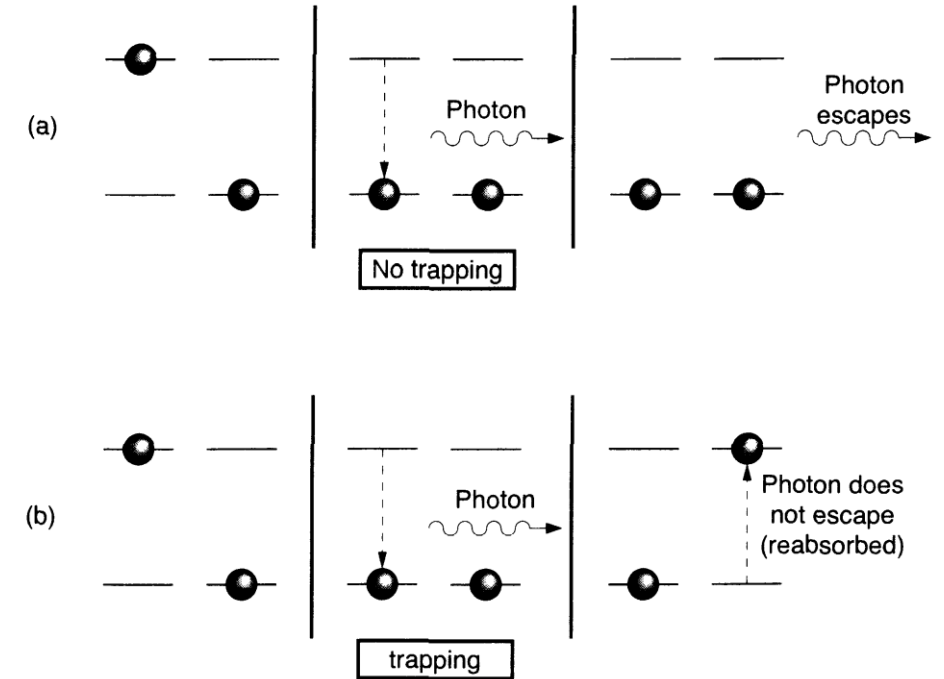
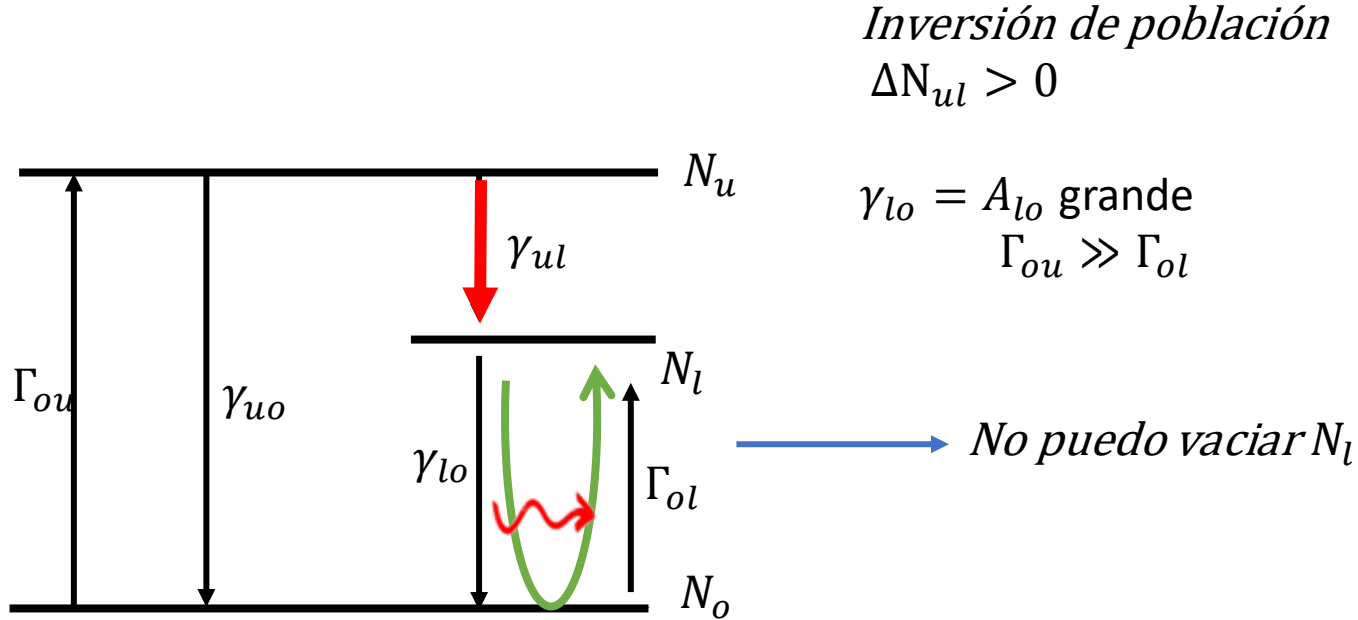
Absorción dentro del medio de ganancia

Los fotones láser pueden ser reabsorbidos por el propio medio, por estados triplete, estados excitados o impurezas.

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Atrapamiento de radiación en átomos e iones (medios activos gaseosos o plasmas)



Sequence of events →
 Time →

$$I = I_o e^{\sigma_{lo} [N_l - (\frac{g_l}{g_o}) N_o] z} \approx I_o e^{-\sigma_{lo} (\frac{g_l}{g_o}) N_o z} = I_o e^{-\alpha_{ol} z} \text{ (ley de Beer)} \longrightarrow \text{Absorbe más (pueblo más } N_l \text{) cuanto mayor sea } N_o$$

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Estrategia geométrica

$$I = I_o e^{\sigma_{lo} [N_l - (\frac{g_l}{g_o}) N_o] z} \approx I_o e^{-\sigma_{lo} (\frac{g_l}{g_o}) N_o z} = I_o e^{-\alpha_{ol} z} \text{ (ley de Beer)}$$

Cuanto mayor es N_o , mayor es la absorción $o \rightarrow l$ y más se repuebla N_l

Quisiéramos que el fotón salga del medio y no sea absorbido realizando una transición $o \rightarrow l$

$$\Delta N_{ul} = \left[N_u - \left(\frac{g_u}{g_l} \right) N_l \right] \rightarrow \text{disminuye}$$

¿Cómo disminuyo el efecto?

- Disminuir N_o : No conviene, porque también baja la población disponible para el bombeo o para sostener la descarga
- Busco geometría de medio activo para que la probabilidad de que el fotón sea absorbido sea baja $\rightarrow$ tamaños característicos menores que la longitud característica de penetración $z_\alpha \sim \frac{1}{\alpha_{ol}}$

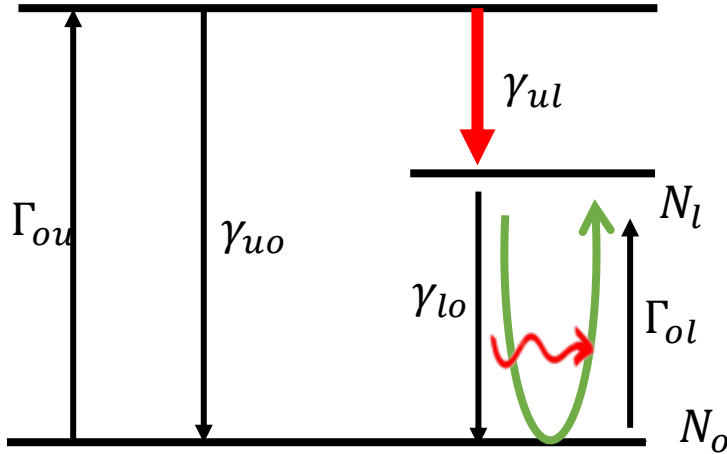


$d \lesssim z_\alpha$ longitud característica de absorción: distancia típica antes de que el fotón sea reabsorbido

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Factor de atrapamiento



$$\frac{dN_l}{dt} = N_o \Gamma_{ol} + N_u A_{ul} - N_l A_{lo} F_{lo}$$

factor de atrapamiento $F_{lo} \leq 1$
 $= 1$ no atrapamiento

Para un medio cilíndrico de radio b

$$F_{lo} = \frac{1.6}{\sigma_{ol} N_o b [\pi \ln(\sigma_{ol} N_o b)]^{1/2}}$$

$$\text{Si } b = z_\alpha \sim \frac{1}{\alpha_{ol}} = \frac{1}{\sigma_{ol} N_o} \rightarrow F_{lo} = \frac{1.6}{\pi^{0.5}} \sim 0.9$$

$$\sigma_{ol} = \frac{g_l}{g_o} \sigma_{lo} = \frac{g_l}{g_o} \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3}} \frac{\lambda_{lo}^2 A_{lo}}{\Delta \nu^D}$$

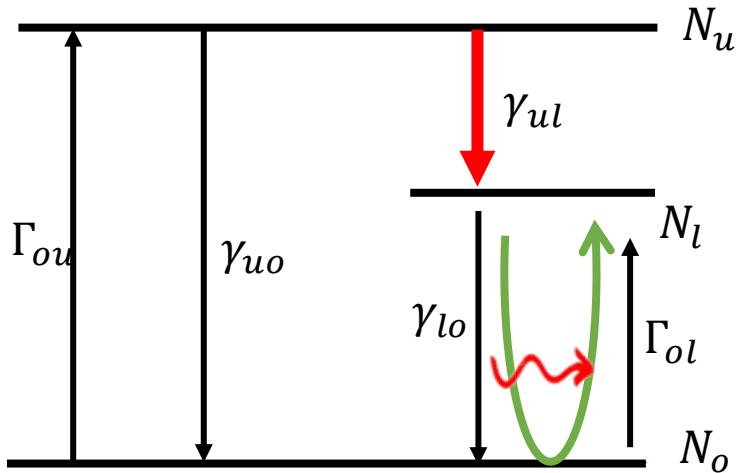
F_{lo} depende de

- La transición específica (A_{lo} , $\Delta \nu^D$, λ_{lo} , $\frac{g_l}{g_o}$)
- La densidad de átomos N_o
- El tamaño del medio activo b

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi\eta^3\nu^3h}{c^3}$$

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}$$

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



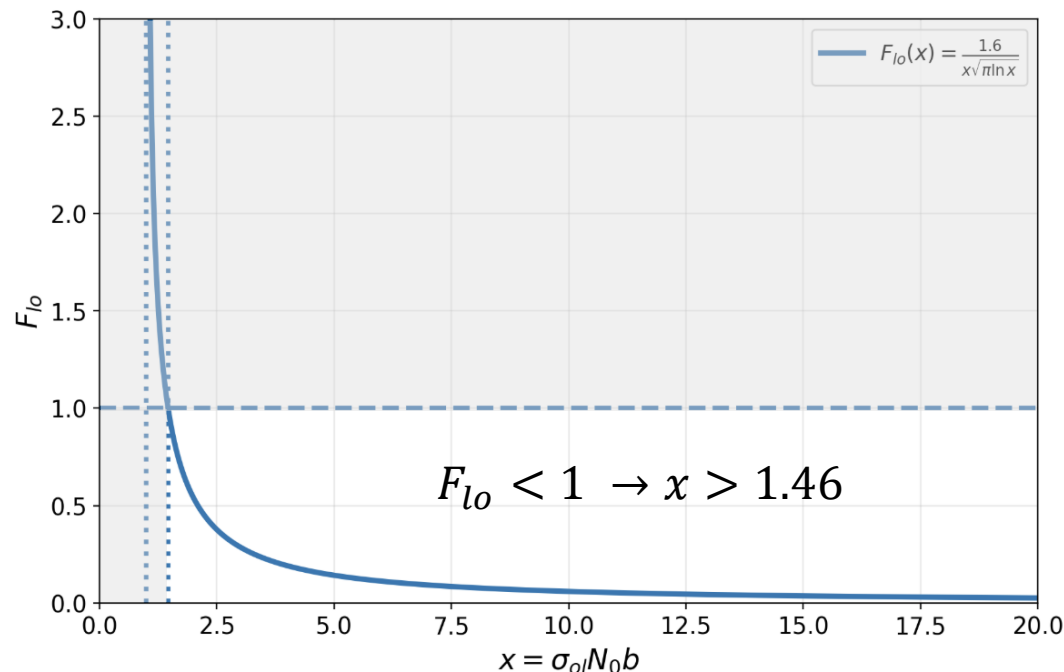
$$\frac{dN_l}{dt} = N_o \Gamma_{ol} + N_u A_{ul} - N_l A_{lo} F_{lo}$$

factor de atrapamiento
 $F_{lo} \leq 1$
 $= 1$ no atrapamiento

Para un medio cilíndrico de radio b

$$F_{lo} = \frac{1.6}{\sigma_{ol} N_o b [\pi \ln(\sigma_{ol} N_o b)]^{1/2}}$$

$$\sigma_{ol} = \frac{g_l}{g_o} \sigma_{lo} = \frac{g_l}{g_o} \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3}} \frac{\lambda_{lo}^2 A_{lo}}{\Delta \nu^D}$$



F_{lo} depende de

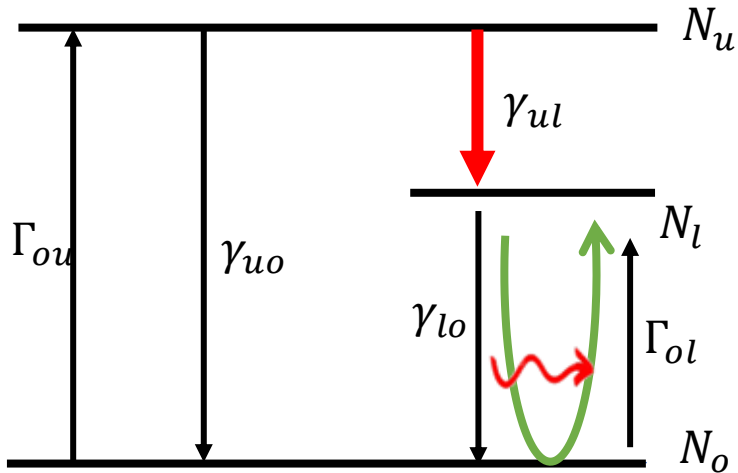
- La transición específica (A_{lo} , $\Delta \nu^D$, λ_{lo} , $\frac{g_l}{g_o}$)
- La densidad de átomos N_o
- El tamaño del medio activo b

¿Cuanto tiene que valer $N_o^{\min}$ para que trapping sea despreciable?

$$F_{lo} = 1 \rightarrow \sigma_{ol} b N_o^{\min} = 1.46$$

N_o más grande comienza a poblar N_l y la tasa de decaimiento $l \rightarrow o$ disminuye

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



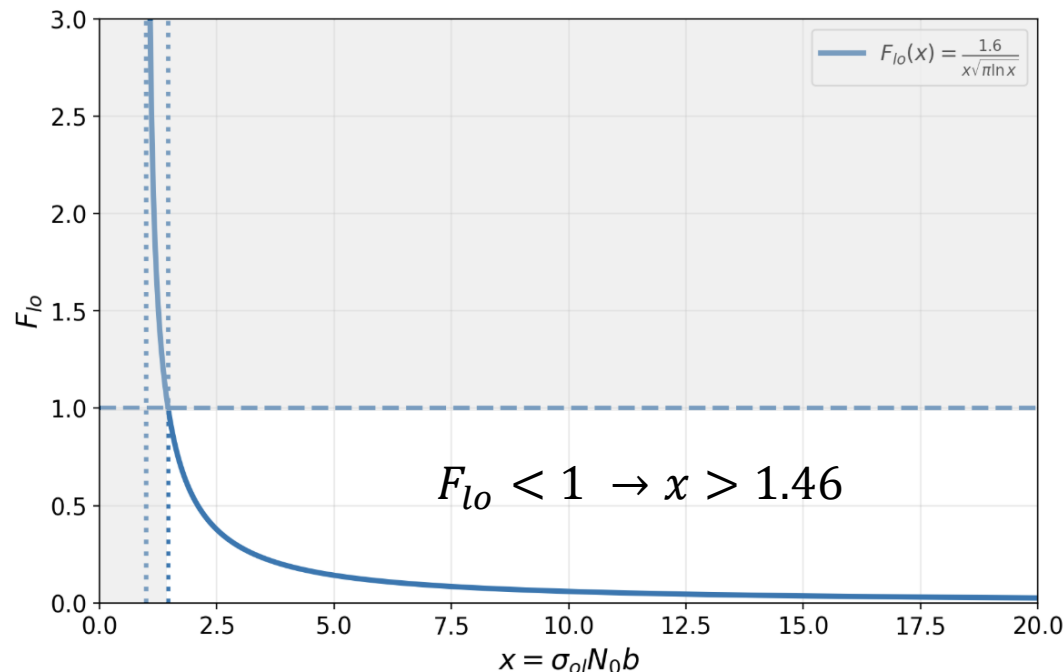
$$\frac{dN_l}{dt} = N_o \Gamma_{ol} + N_u A_{ul} - N_l A_{lo} F_{lo}$$

factor de atrapamiento $F_{lo} \leq 1$
 $= 1$ no atrapamiento

Para un medio cilíndrico de radio b

$$F_{lo} = \frac{1.6}{\sigma_{ol} N_o b [\pi \ln(\sigma_{ol} N_o b)]^{1/2}}$$

$$\sigma_{ol} = \frac{g_l}{g_o} \sigma_{lo} = \frac{g_l}{g_o} \sqrt{\frac{\ln(2)}{16\pi^3}} \frac{\lambda_{lo}^2 A_{lo}}{\Delta \nu^D}$$



En descargas en gases

si N_o es muy chico como para iniciar la descarga eléctrica, mezclo dos gases:

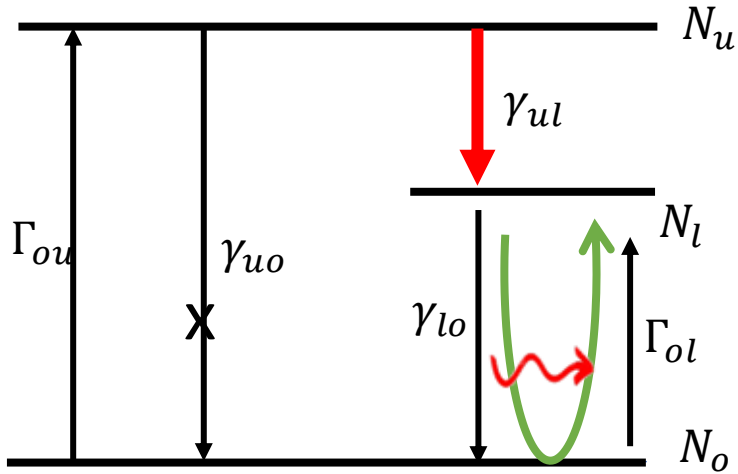
Gas1: especie activa, baja densidad, responsable de la ganancia láser

Baja densidad de especie activa $\Rightarrow$ menos trapping

Gas2: auxiliar/buffer, mayor densidad, ayuda a iniciar y sostener la descarga. Sus transiciones NO son coincidentes con Gas1 (ni λ_{ul} , ni λ_{ol})

Gas buffer denso $\Rightarrow$ descarga estable sin reabsorción resonante

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



$$\frac{dN_l}{dt} = N_o \Gamma_{ol} + N_u A_{ul} - N_l A_{lo} F_{lo}$$

$$\frac{dN_u}{dt} = N_o \Gamma_{ou} - \gamma_{ul} N_u$$

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_l}{g_u} \right) \frac{1}{[\Gamma_{ol}/\Gamma_{ou} + 1]} \frac{A_{lo} F_{lo}}{A_{ul}} > 1?$$

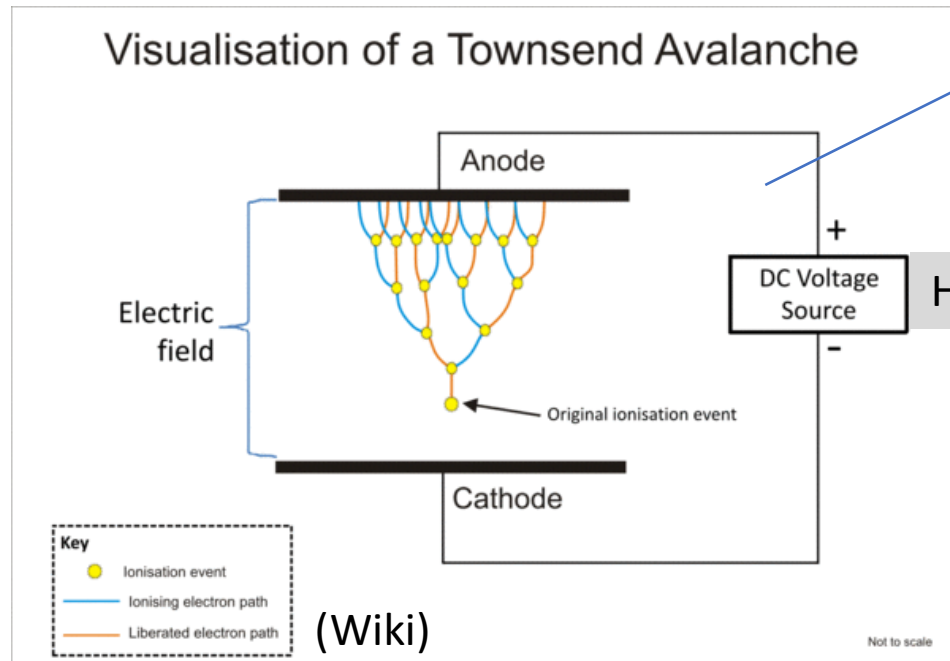
Calculo $F_{lo} \rightarrow$ me fijo si $\frac{g_l N_u}{g_u N_l} > 1?$

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Termalización de los niveles láser por colisión con electrones (átomos e iones)

Descarga en plasmas o gases (se hace con el gas auxiliar)



Se generan electrones libres que se aceleran entre los electrodos



Ejemplo:
Descarga glow laboratorio 5

Los electrones libres excitan por colisiones a los átomos o iones de la especie activa a niveles de energía superiores

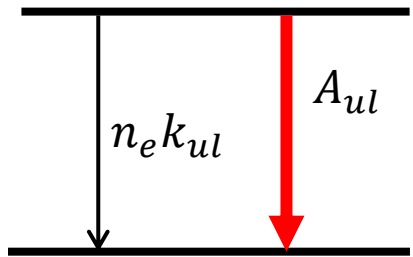
¡pero muchos electrones también inducen la desexcitación colisional!

Densidad electrónica n_e

n_e chica $\rightarrow$ excitación colisional o por impacto electrónico

n_e grande $\rightarrow$ termalización de las poblaciones del nivel inferior y superior

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



$n_e k_{ul}$ tasa de decaimiento colisional

N_u

N_l

- ΔN_{ul}
- T_e temperatura electrónica (en gases $\sim 10-100 RT$)
- n_e densidad electrónica
- Colisiones de electrones con nivel u , tienden a termalizar las poblaciones obteniendo la distribución de Boltzmann

$$\frac{N_u}{N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e} < 1 \Rightarrow \left(\frac{g_l}{g_u} \right) \frac{N_u}{N_l} < 1$$

No queremos esto porque destruye la inversión de población

Numero de decaimientos (colisionales y radiativos) por unidad de volumen y tiempo

$$N_u A_{ul} = N_u n_e^{max} k_{ul} \longrightarrow \text{Los igualamos igual que cuando calculamos } I_{SAT}$$

Usando el principio de balance detallado en equilibrio térmico $N_u k_{ul} = N_l k_{lu}$

$$\frac{N_u}{N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e} = \frac{k_{lu}}{k_{ul}} \rightarrow k_{ul} = \left(\frac{g_l}{g_u} \right) \frac{k_{lu}}{e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e}} = \left(\frac{g_l}{g_u} \right) k_{lu} e^{\Delta E_{ul}/K_b T_e}$$

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Fórmula empírica de Seaton para excitación colisional

$$k_{lu} = 7.8 \frac{\lambda_{ul}^3 A_{ul}}{T_e^{1/2}} \left(\frac{g_u}{g_l} \right) e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e}$$

$$k_{ul} = \left(\frac{g_l}{g_u} \right) \frac{k_{lu}}{e^{-\Delta E_{ul}/K_b T_e}} = 7.8 \frac{\lambda_{ul}^3 A_{ul}}{T_e^{1/2}}$$

$$N_u A_{ul} = N_u n_e^{max} k_{ul}$$

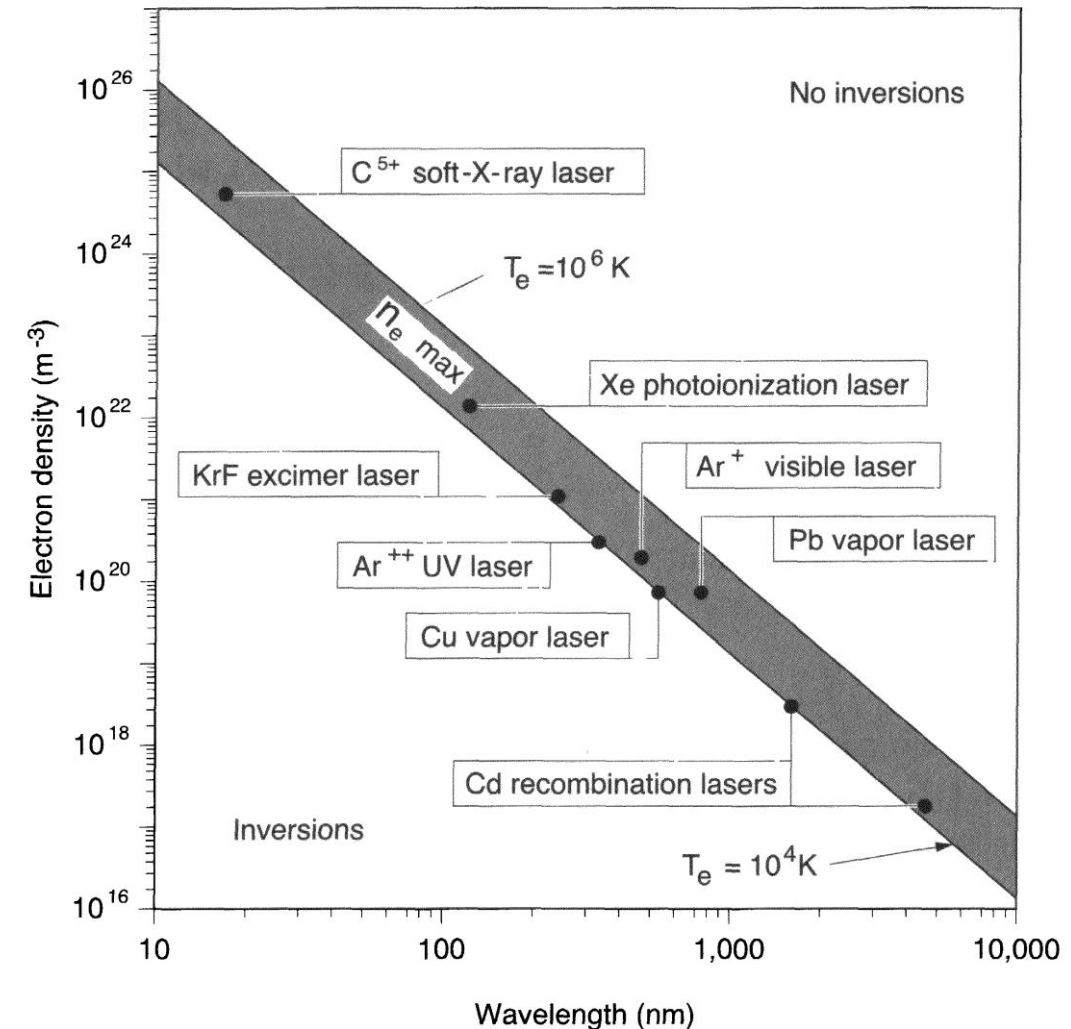
$$n_e^{max} = 0.13 \frac{\sqrt{T_e}}{\lambda_{ul}^3} [\text{m}^{-3}]$$

T_e [K]

λ_{ul} [m]

Densidad electrónica máxima para que el proceso de desexcitación colisional no se vuelva importante

Todos estos láseres funcionan con n_e cerca de la n_e^{max}

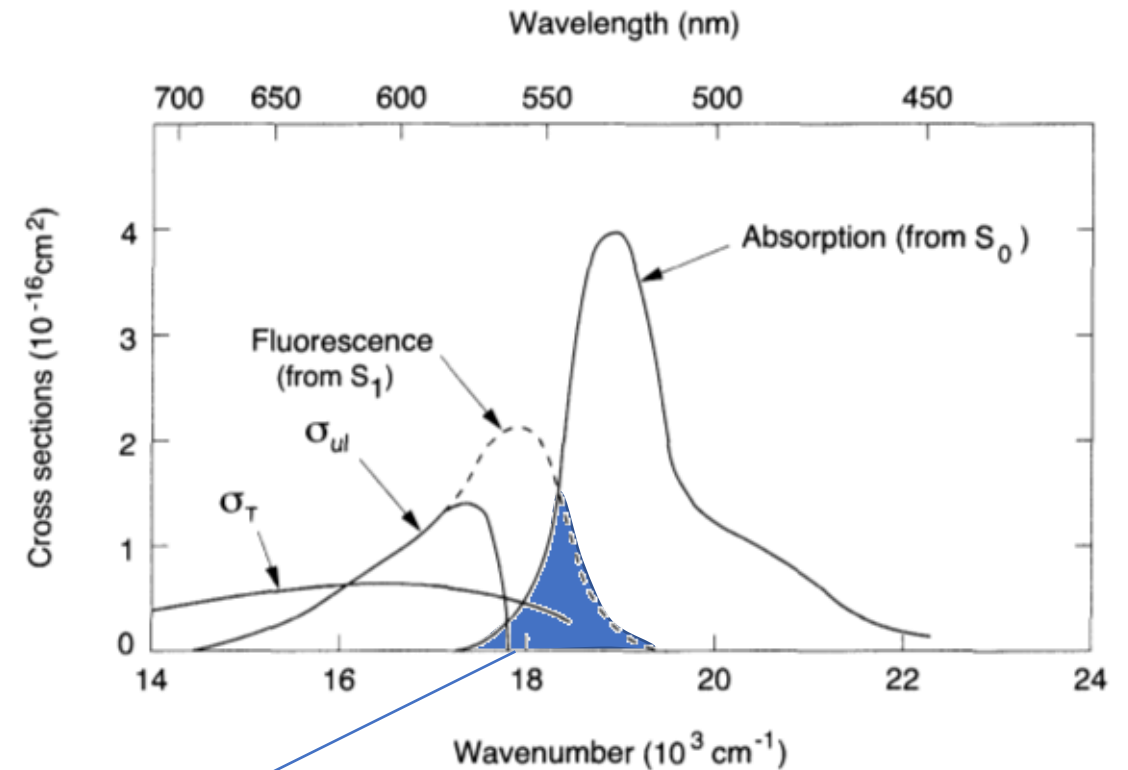
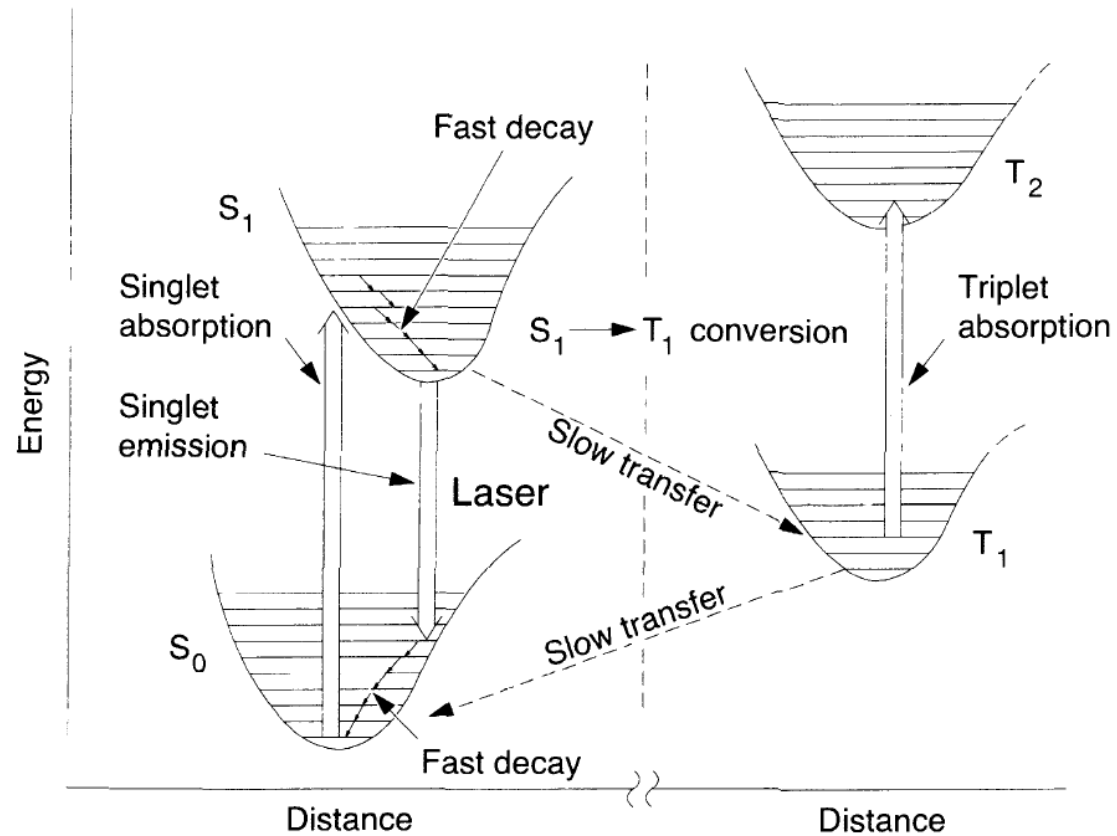


Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Absorción dentro del medio de ganancia (no se puede mejorar)

Absorción desde el estado fundamental en láseres de colorantes orgánicos

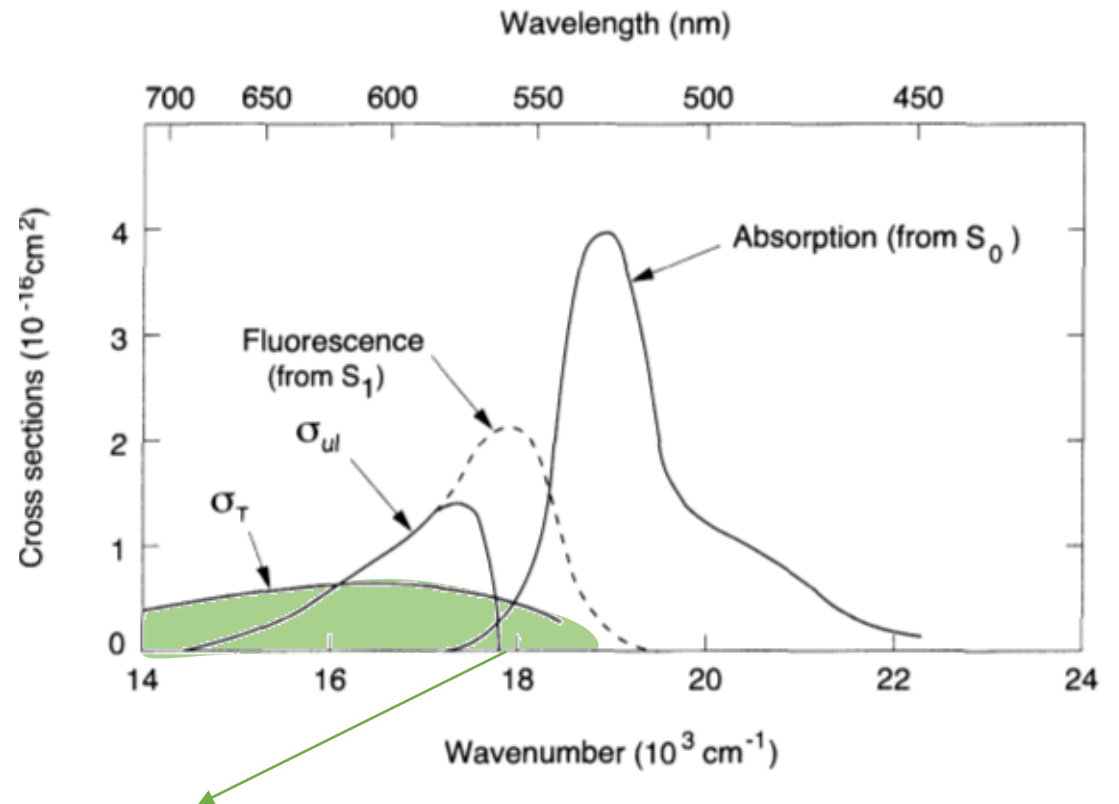
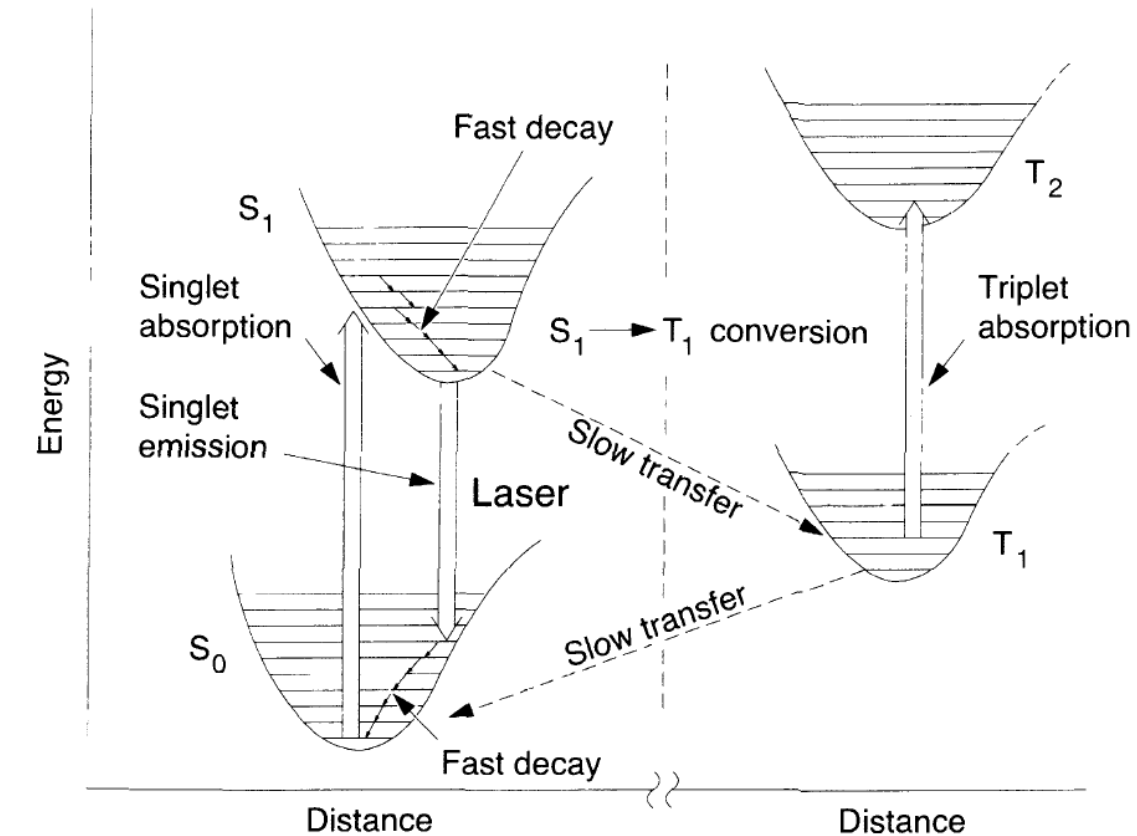


Dado que siempre hay moléculas en el estado fundamental, siempre habrá absorción de los fotones emitidos en donde los dos espectros se solapan, y por lo tanto la ganancia neta disponible se reduce en esas frecuencias

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Absorción del triplete en láseres de colorantes orgánicos

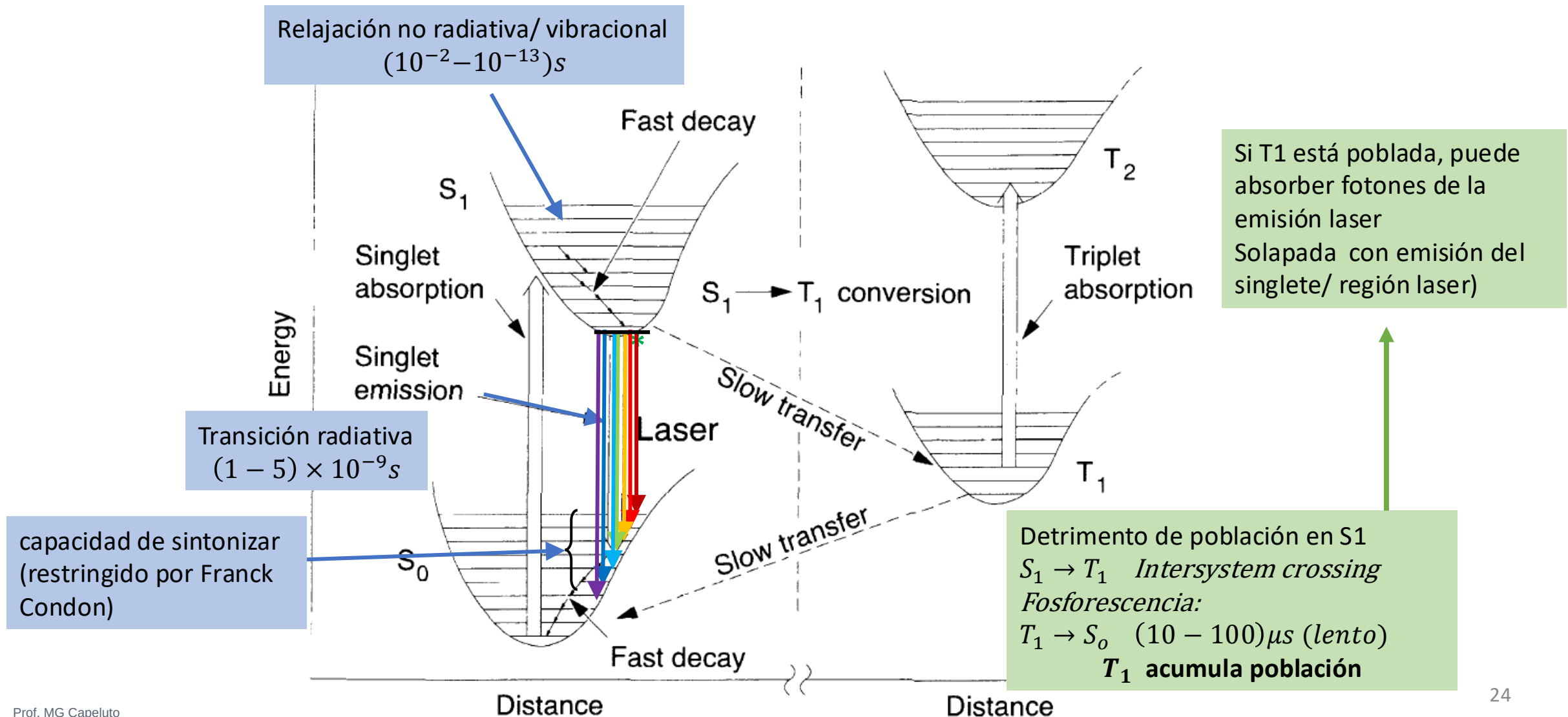


El espectro de absorción del triplete se solapa ampliamente con el rango de emisión láser

Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



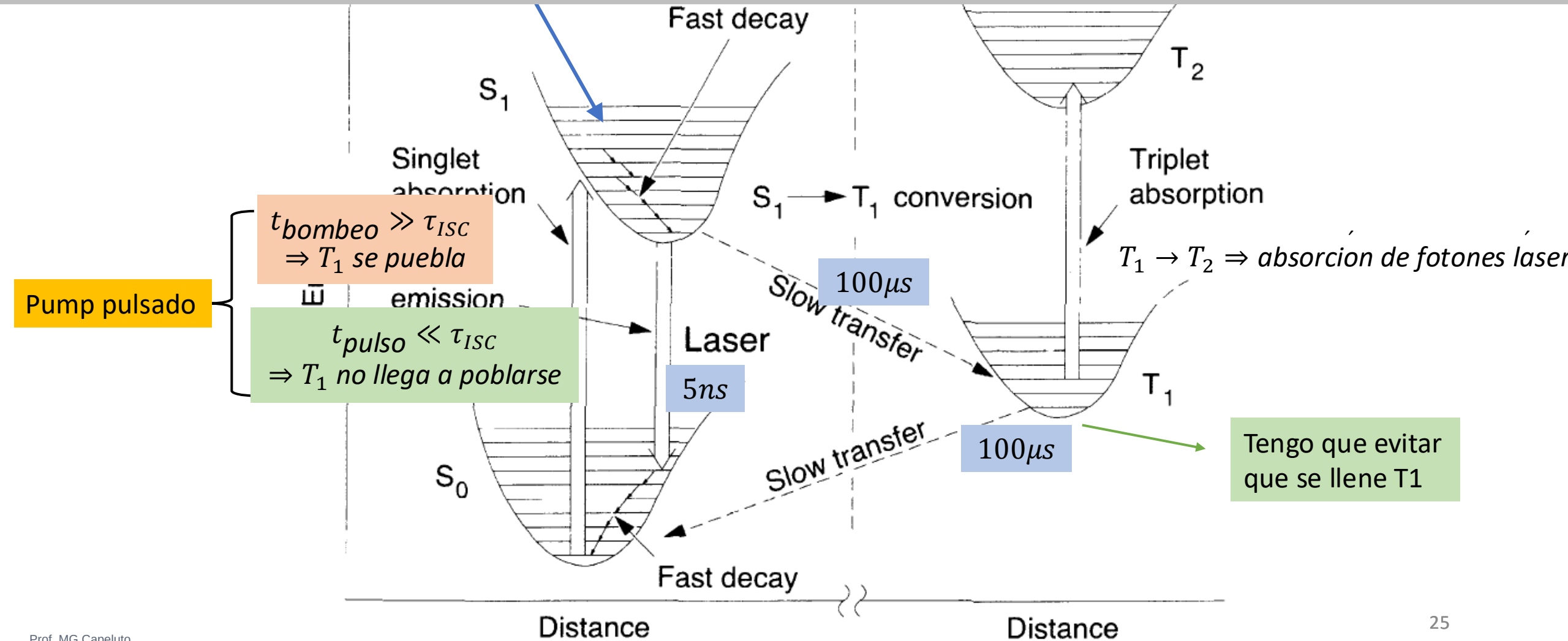
Absorción del triplete en láseres de colorantes orgánicos



Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



- Las transiciones $S_1 \rightarrow T_1$ y $T_1 \rightarrow T_2$ producen detrimento de la población en S_1
- Láser pulsado: emite antes que se pueble T_1 (tiempos menores que tiempo característico ICS)
- Láser CW: Tengo que renovar el líquido constantemente (flujo laminar de colorante remueve material en estado triplete)



Procesos que inhiben o destruyen la inversión de población



Absorción en el estado excitado en láseres de excímeros: Mezcla de Gas noble con halógeno (F,Cl, ...)

XeF(fluoruro de Xenon), XeCl, KrF, ArF

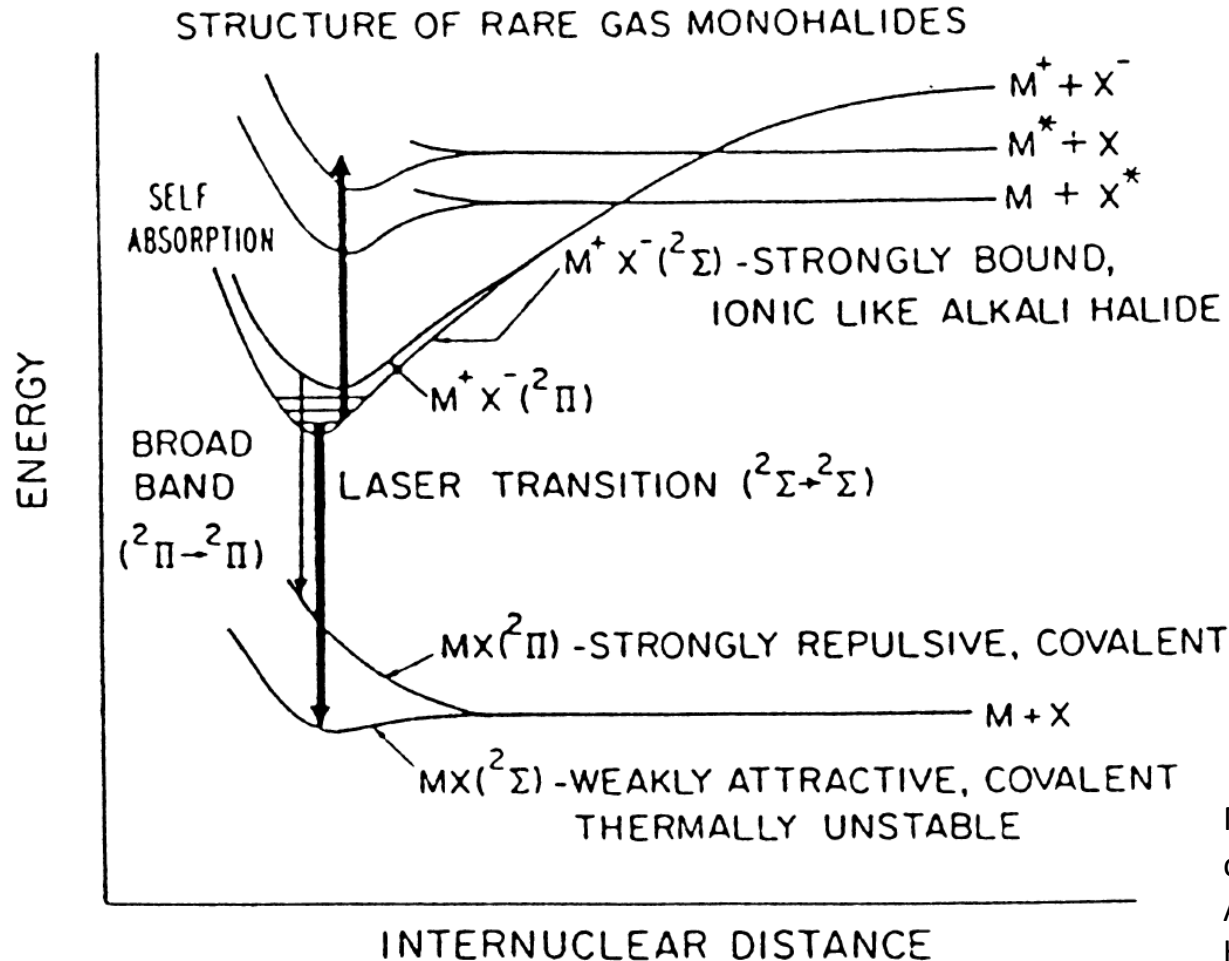
- Absorción en el estado excitado reduce la población útil del nivel superior

$$\sigma_{ul}(\text{emisión láser}) > \sigma_{uj}(\text{abs. excitado})$$

j, nivel excitado de energía mayor

- Absorción en impurezas creadas por especies reactivas dentro de la cámara del laser (halógenos son muy reactivos)

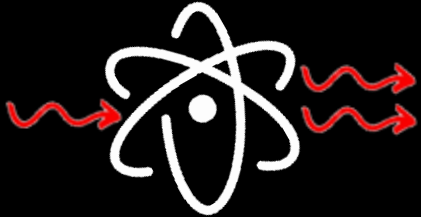
			18
		4.002602 2372.3	2
		He Helio 1s ¹	
17			
18.998403 1681.0	9	20.1797 2080.7	10
F Fluor 1s ² 2s ² 2p ⁵		Ne Neón 1s ² 2s ² 2p ⁶	
35.453 1251.2	17	39.948 1520.6	18
Cl Cloro [Ne] 3s ² 3p ⁵		Ar Argón [Ne] 3s ² 3p ⁶	
79.904 1139.9	35	83.798 1350.8	36
Br Bromo [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁵		Kr Kriptón [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁶	
126.9044 1008.4	53	131.293 1170.4	54
I Yodo [Kr] 4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁵		Xe Xenón [Kr] 4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁶	
(210) 890.0	85	(220) 1097.0	86
At Astat [Xe] 4f ¹⁴ 5d ¹⁰ 6s ² 6p ⁵		Rn Radón [Xe] 4f ¹⁴ 5d ¹⁰ 6s ² 6p ⁶	
(294) 117		(294) 118	
Ts Teneso [Rn] 5f ¹⁴ 6d ¹⁰ 7s ² 7p ⁵		Og Oganesson [Rn] 5f ¹⁴ 6d ¹⁰ 7s ² 7p ⁶	



Minoru Obara, Masayuki Kakehata, Lasers, Excimer, Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), Academic Press, 2003, pgs 361-376, Editor: Robert A. Meyers <https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00366-5>.

Un láser no solo necesita inversión de población: necesita que esa inversión se mantenga el tiempo suficiente, que no sea destruida por procesos de pérdida o reabsorción, y que la ganancia resultante supere las pérdidas del medio y de la cavidad.

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

¿Que vimos? ¿Que veremos?



- **Inversión de población** es condición necesaria pero no suficiente para obtener emisión láser
- Ganancia necesaria para alcanzar la **Intensidad de saturación**

$$g_{ul}L = \sigma_{ul}\Delta N_{ul}L$$

Dada una transición, σ_{ul} aprox cte

No se puede agrandar mucho

- Disponibilidad de medios de ganancia
- Prácticamente es mejor que los láseres sean compactos
- Abaratar costos

Obtener ΔN_{ul} grande poblando eficientemente N_u

Optimización del bombeo

- Bombeo óptico (láser, lampara flash)
- Excitación colisional (impacto de partículas)

Umbral para la excitación o bombeo

Cual el flujo de bombeo que necesito para obtener inversión de población?

Calculamos el número de transiciones (por colisión electrónica o absorción de fotones) durante el tiempo de vida del nivel superior τ_u (puede incluir radiativo y colisional)

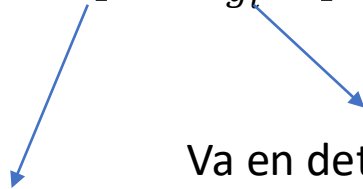
$$N_u \gamma_u = N_j \Gamma_{ju}$$

Lo que decae del nivel superior está por lo menos compensado por el bombeo

$$N_u = \frac{N_j \Gamma_{ju}}{\gamma_u} = N_j \Gamma_{ju} \tau_u$$

A mayor tiempo de vida, mayor cantidad de población puedo almacenar

Ganancia $g_{ul} L = \sigma_{ul} \left[N_u - \frac{g_u}{g_l} N_l \right] L$



Va en detrimento de obtener ganancia

Poblarlo ayuda a tener ganancia

Condición mínima la impongo sobre $\sigma_{ul} N_u L$

Si $N_l \neq 0$ entonces tengo que aumentar N_u

Condición mínima para el bombeo Γ_{ju}

Laser sin espejos

$$\sigma_{ul} N_u L = \sigma_{ul} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \approx 12 \pm 5$$

Laser con dos espejos

$$\sigma_{ul} N_u L = \sigma_{ul} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right)$$

¿Como inyecto energía en el medio de ganancia?

Bombeo óptico

- Láseres (coherente)
- Lámparas flash / LEDs: incoherentes
- Diodos láser o arreglos de diodos: emisión láser, usualmente multimodo

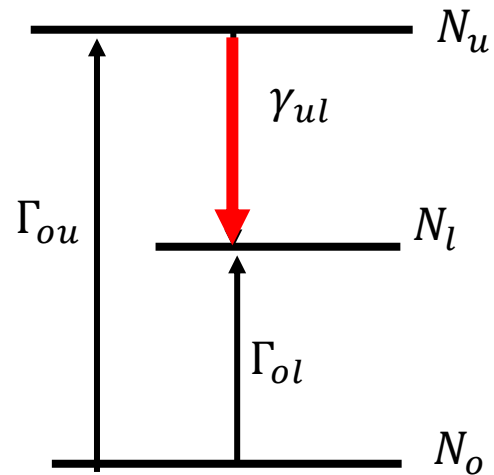
Bombeo usando partículas (medios activos gaseosos o plasmas)

- Electrones
- iones, átomos en estado meta estable



Métodos directos e indirectos

Bombeo directo: se bombea directamente de un nivel j al superior



Bombeo óptico directo: láseres de estado sólido y colorantes

$$\Gamma_{ou} = u(\nu)B_{ou} = \frac{I_p(\nu)}{c}B_{ou} = \frac{I_p}{c\Delta\nu}B_{ou}$$

La frecuencia con la que se ilumina debe estar dentro del ancho de banda de las especies que absorben

Bombeo directo con partículas: láseres gaseosos y plasmas

$$\Gamma_{ou} = N_p k_{ou}$$

N_p densidad de partículas del bombeo

k_{ou} [m³/s] coeficiente de transición por colisiones o tasa colisional, cuando la especie laser esta en el nivel o

$$k_{ou} = \langle \sigma_{ul}(\nu) v_p \rangle \sim \sigma_{ou} \bar{v}_p$$

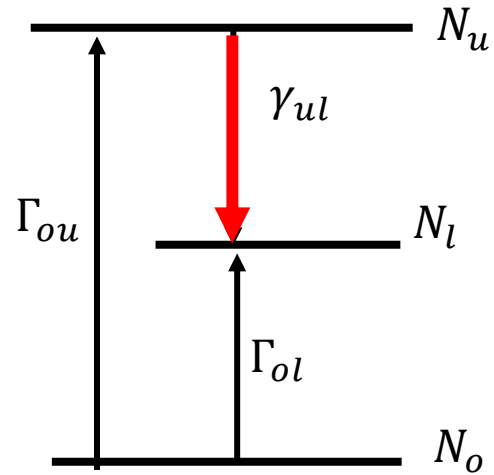
σ_{ou} [m²] sección eficás de excitación colisional $o \rightarrow u$

$\bar{v}_p$ [m/s] velocidad media relativa entre las especies que colisionan

$$\Gamma_{ou} N_o = N_p \sigma_{ou} \bar{v}_p N_o$$

Número de transiciones por unidad de tiempo y volumen

Bombeo directo: se bombea directamente de un nivel j al superior



Bombeo óptico directo: láseres de estado sólido y colorantes

$$\Gamma_{ou} = u(\nu)B_{ou} = \frac{I_p(\nu)}{c}B_{ou} = \frac{I_p}{c\Delta\nu}B_{ou}$$

La frecuencia con la que se ilumina debe estar dentro del ancho de banda de las especies que absorben

Bombeo directo con partículas: láseres gaseosos y plasmas

$$\Gamma_{ou} = N_p k_{ou}$$

N_p densidad de partículas
 k_{ou} [m³/s] coeficiente de bombeo
 laser esta en el nivel l

$$k_{ou} = \langle \sigma_{ul}(\nu) v_p \rangle \sim \sigma_{ou} \bar{v}_p$$

σ_{ou} [m²] sección eficaz
 $\bar{v}_p$ [m/s] velocidad media

$$\Gamma_{ou} N_o = N_p \sigma_{ou} \bar{v}_p N_o$$

Número de transiciones por unidad de tiempo y volumen

Electrones (caso más típico)

$$\Gamma_{ou} = n_e \sigma_{ou}^e \bar{v}_e$$

n_e densidad electrónica (#/vol)

$\bar{v}_e$ velocidad media

σ_{ou}^e sección transversal de excitación (promediada en velocidades)

Desventajas del bombeo directo:

1) Transición ineficiente

$$\Gamma_{ou} = \frac{I_p(\nu)}{c} B_{ou} = \frac{I_p}{c\Delta\nu} B_{ou}$$

$$\Gamma_{ou} = N_p \sigma_{ou} \bar{v}_p$$

Los parámetros que caracterizan la transición son chicos:

Óptico: B_{ou}

Colisional: σ_{ou} (sección transversal de excitación colisional)

Recordar: Sistema de tres niveles

$$\frac{g_l N_u}{g_u N_l} = \left(\frac{g_u}{g_l} \right) \frac{A_{lo}}{A_{ul} [\Gamma_{ol}/\Gamma_{ou} + 1]} > 1$$

2) Transición $o \rightarrow u$ eficiente, pero $o \rightarrow l$ más eficiente Γ_{ol}/Γ_{ou} grande

3) Puede ser que no haya una fuente que provea suficiente flujo de fotones o partículas en las energías necesarias para producir transiciones de $o \rightarrow u$

Potencia por u de V (energía/t.V) requerida para producir inversión de población

ΔE_{uo} Energía mínima para poblar u, realizando una transición de $o \rightarrow u$

$$P_{ou} = \Gamma_{ou} N_o \Delta E_{uo}$$

Condición mínima para el bombeo Γ_{ju}

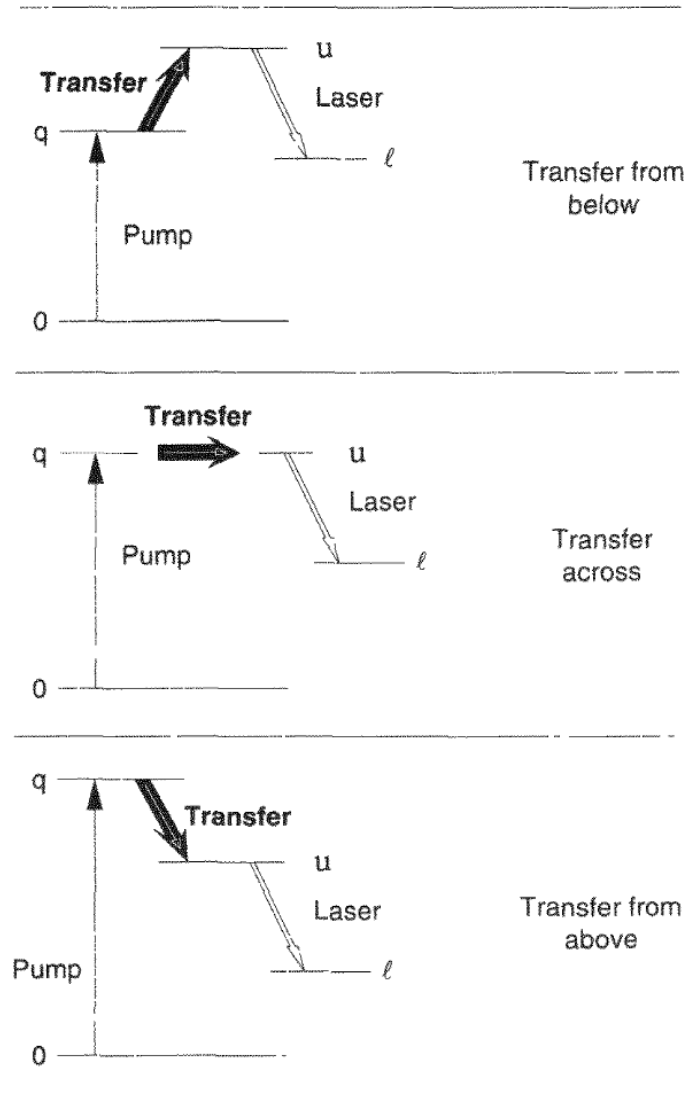
Laser sin espejos

$$\sigma_{ul} N_u L = \sigma_{ul} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \approx 12 \pm 5$$

Laser con dos espejos

$$\sigma_{ul} N_u L = \sigma_{ul} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right)$$

Excitación por bombeo indirecto o por transferencia:



Transiciones $q \rightarrow u$ por unidad de volumen y tiempo

Óptico

$$\Gamma_{qu}N_q = \frac{I_p}{c\Delta\nu} B_{qu}N_q$$

Partículas

$$\Gamma_{qu}N_q = N_p\sigma_{qu}\bar{v}_pN_q$$

En el bombeo indirecto se reemplaza la excitación directa $o \rightarrow u$ por una transferencia $q \rightarrow u$. Las expresiones son análogas, pero el camino físico puede ser mucho más eficiente.

Ventajas de excitación por bombeo indirecto o por transferencia:

Potencia absorbida por unidad de volumen asociada a la transferencia $q \rightarrow u$

$$P_{qu} = \Gamma_{qu} N_q \Delta E_{uq} \rightarrow \text{más fácil excitar porque los niveles están más cerca}$$

$$\Delta E_{uq} < \Delta E_{0u}$$

En algunos casos puede pasar alguna de las siguientes opciones:

- 1) tiempos de vida: $\tau_q \gg \tau_u$ entonces acumula mas población que sirve como reservorio para el nivel u

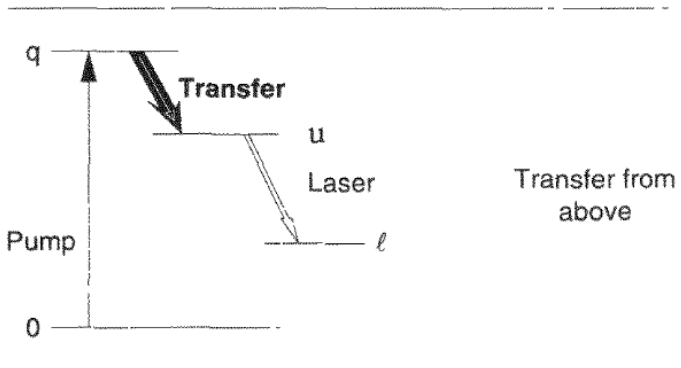
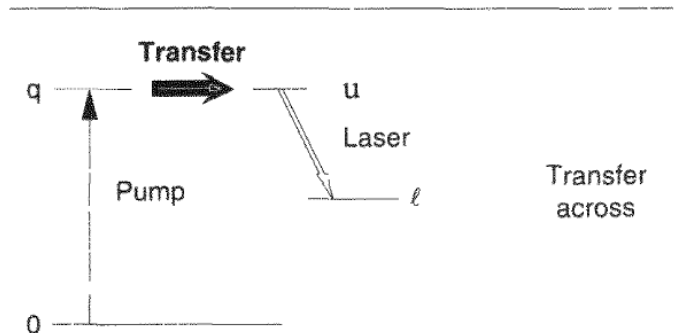
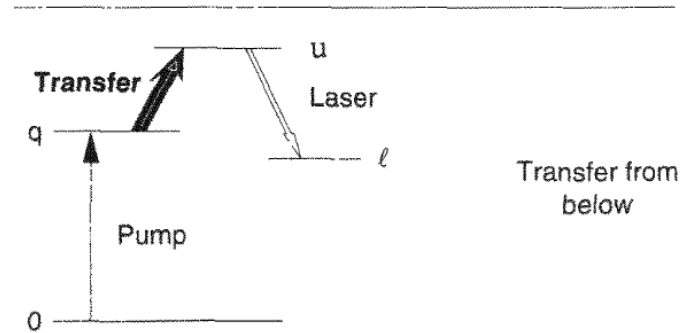
$$N_q = \Gamma_{0q} N_0 \tau_q$$

- 2) Sección transversal de bombeo $\sigma_{0q} \gg \sigma_{0u}$ (baja lo requerimientos de bombeo)

$$g \sim \sigma N$$

- 3) El nivel q puede tener ancho de banda grande (bombeo con lampara flash)
En cambio, u preferentemente muy angosto para que la sección transversal de emisión estimulada sea grande (un ancho de línea más angosto, tiene un pico más alto).

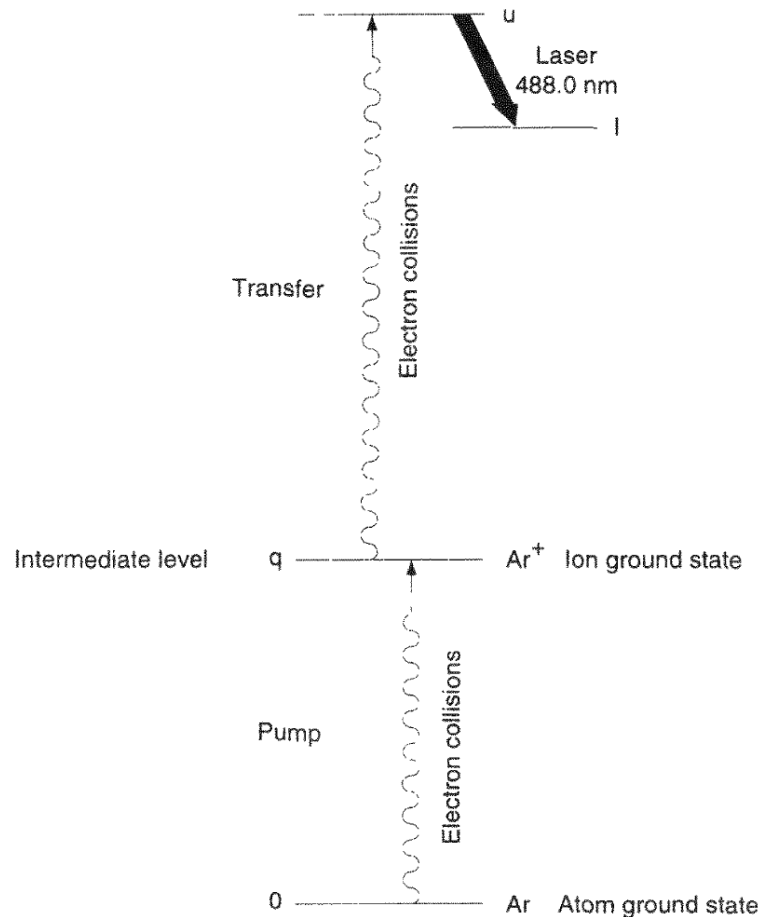
- 4) El nivel q puede pertenecer a otra especie, y luego transferir por colisiones o fotones de una especie a otra. (de una especie en estado excitado q a la especie laser en estado fundamental)



Bombeo indirecto: Transferencia desde abajo



Transferencia desde abajo



Láseres gaseosos en donde q es un estado excitado con τ_q (nivel q almacena energía)

Ar^+ 488 nm, Ar^{++} 363.8 nm, Se^{24+} 20.6 nm rayos x blandos, $Kr, Xe, He - Cd$

Pueden representarse por 3 niveles de excitación escalonada, con el nivel inferior intermedio

$$o \rightarrow q \rightarrow u$$

τ_q largo $\Rightarrow$ q almacena energía

$q \rightarrow u$ por colisiones, típicamente impacto electrónico

láseres gaseosos o iónicos, donde los procesos relevantes son colisiones, ionización, excitación escalonada y estados metaestables.

Bombeo indirecto: transferencia a través

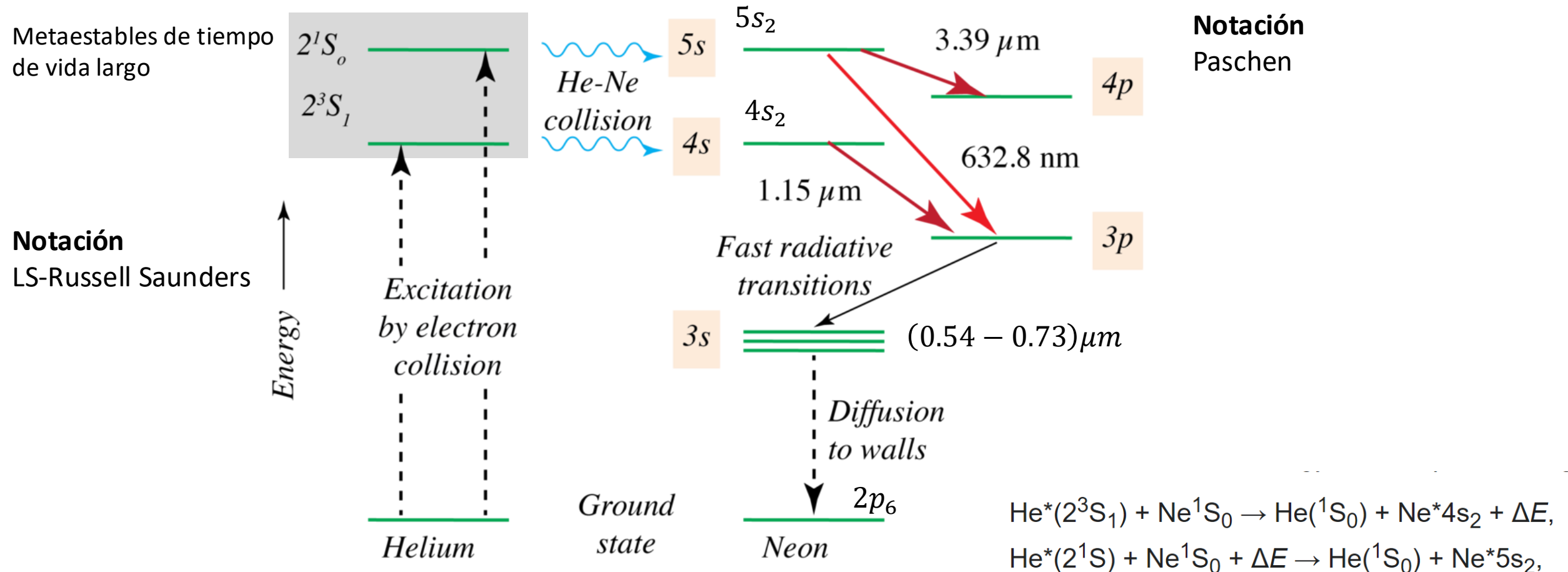


Transferencia a través

Láseres gaseosos en donde $E_q \sim E_u$

La energía se transfiere por colisiones entre dos especies conservando energía y momento

Co_2 (descarga en N_2), $\text{He} - \text{Ne}$, (descarga en He)



Transferencia desde arriba

Láseres de estado sólido, láseres de colorantes, excímeros, láseres gaseosos (recombinación)

El más usado

- 1) El nivel de energía q tiene ancho de banda grande
 - $\Delta E_q \sim 10 \text{ nm}$ @visible para en láseres de colorante, estado sólido y semiconductores
 - $\Delta E_q \sim 10 E_q$ gaseosos

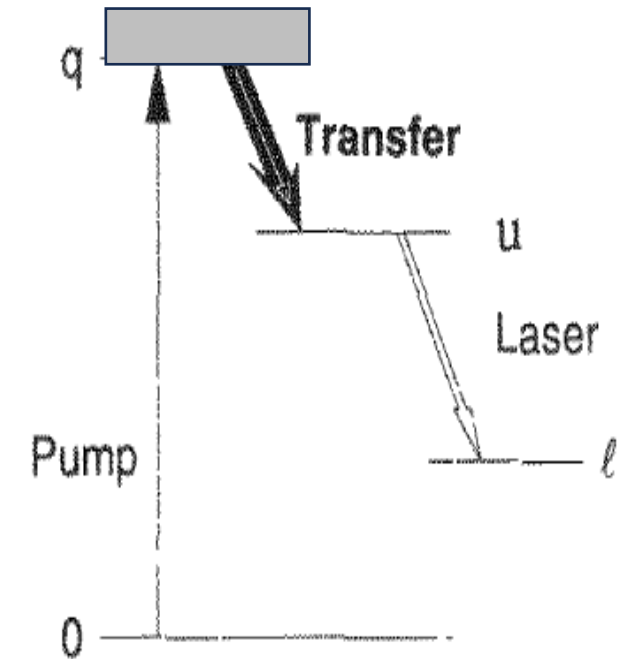
- 2) $E_q > E_u$ la transferencia de $q \rightarrow u$ es más eficiente que $q \rightarrow o$

Relajación no radiativa/decaimiento colisional $k_{ij} \propto 1/\Delta E_{ij}$
 $k_{qu} \gg k_{ql}$

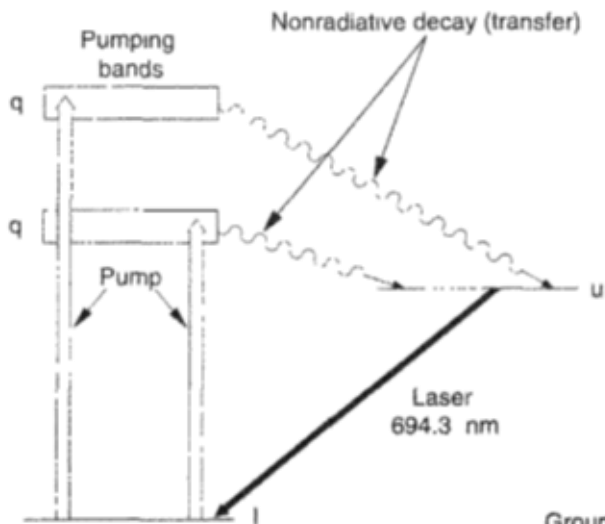
- 3) $q \rightarrow u$ transferencia rápida por colisiones (fonones, átomos, electrones) $\rightarrow$ poblaciones se termalizan según distribución de Boltzmann

$$\frac{N_q}{N_u} \sim e^{-\frac{\Delta E_{qu}}{kT}}$$

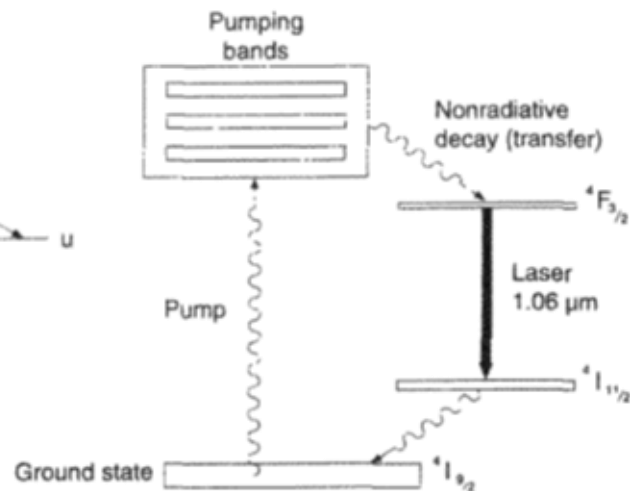
Como $E_q > E_u$ el factor de Boltzmann favorece acumulación de población en u , la transferencia $q \rightarrow u$ es rápida



Ejemplos de láseres con banda de bombeo ΔE_q grande

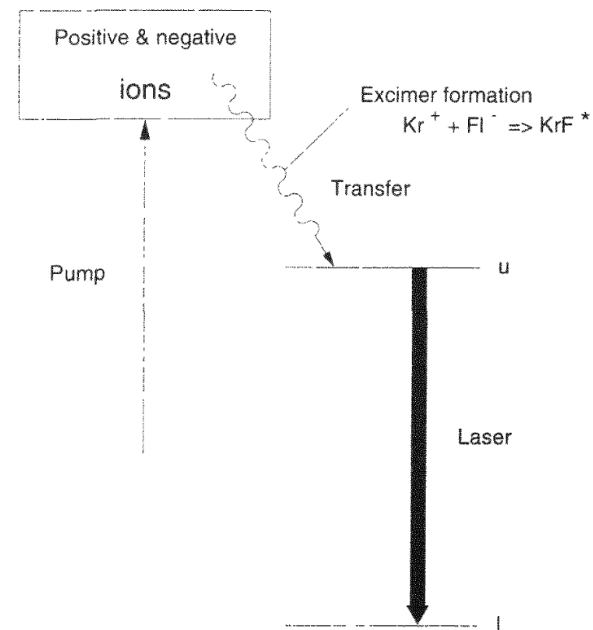


Ruby laser

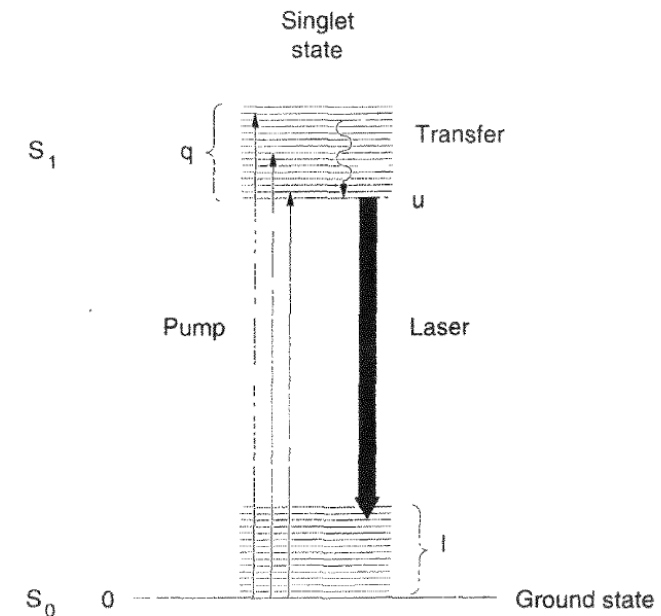


Neodymium:YAG laser

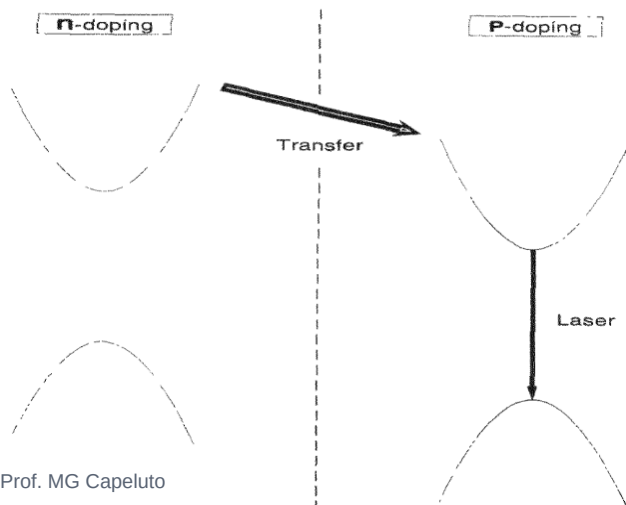
Láser de exímeros



Láser de colorantes



Láser de semiconductores

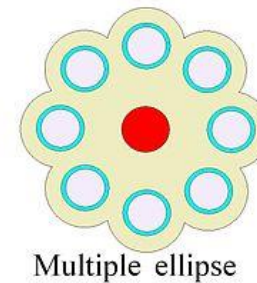
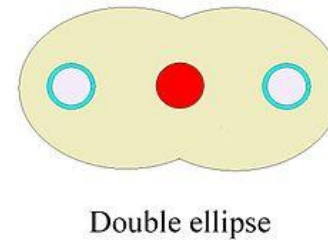
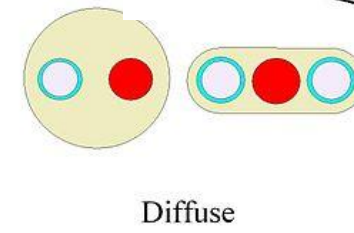
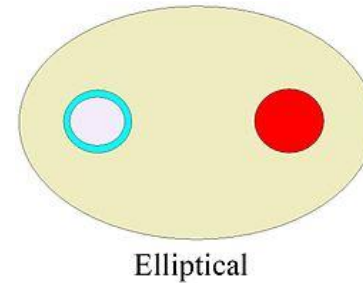
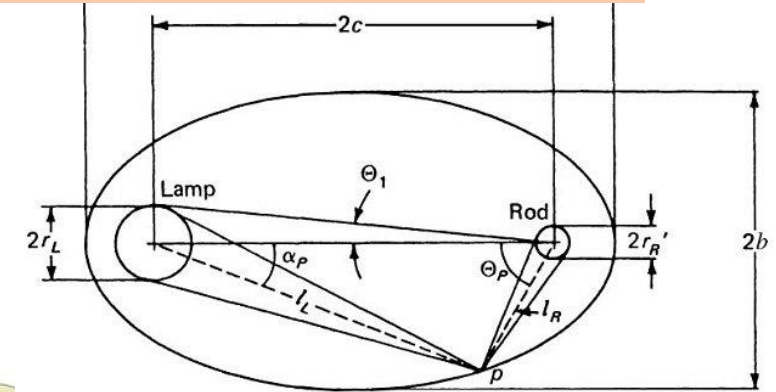
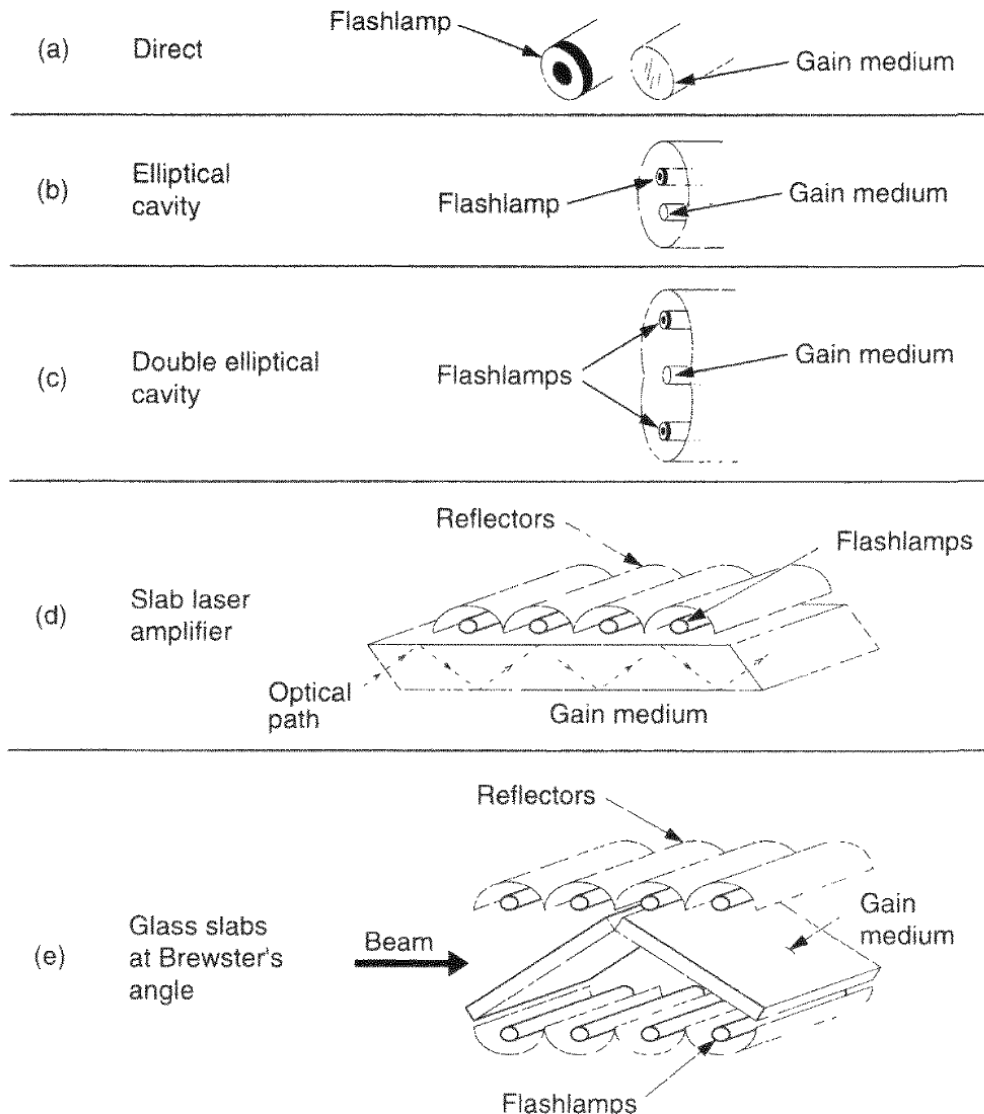


Geometrías de bombeo óptico: lámparas flash

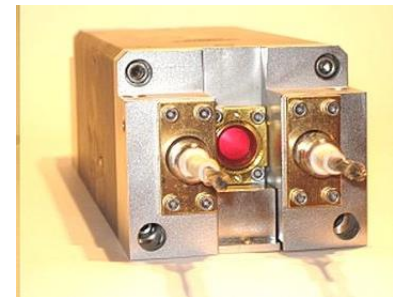
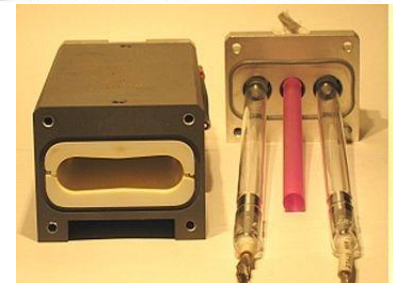


Algunas técnicas que logran acoplar el bombeo al medio de ganancia eficientemente

Las cavidades elípticas aumentan la fracción de radiación de bombeo colectada por el medio activo.



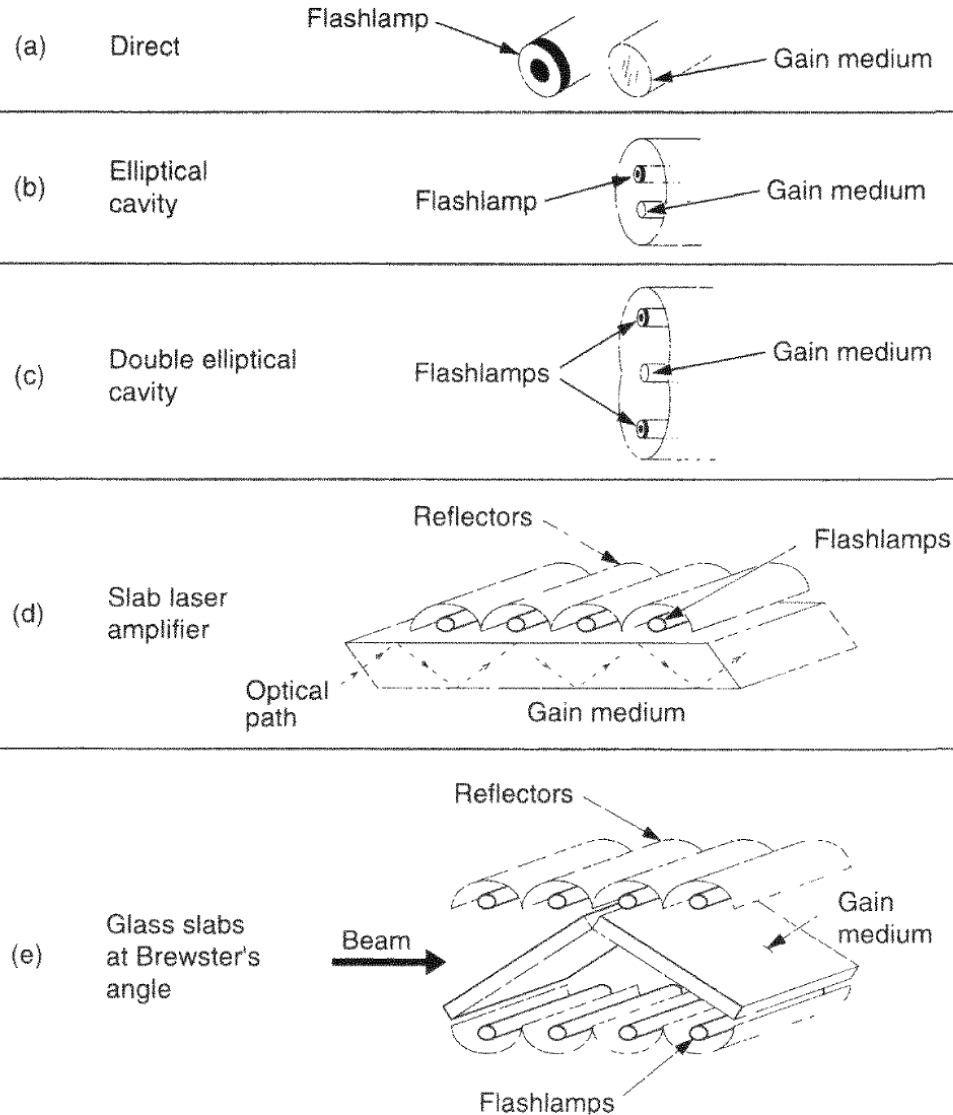
Legend:
 - Laser medium (Red)
 - Glass (Cyan)
 - Noble gas (Purple)
 - Air or cooling water (Yellow)



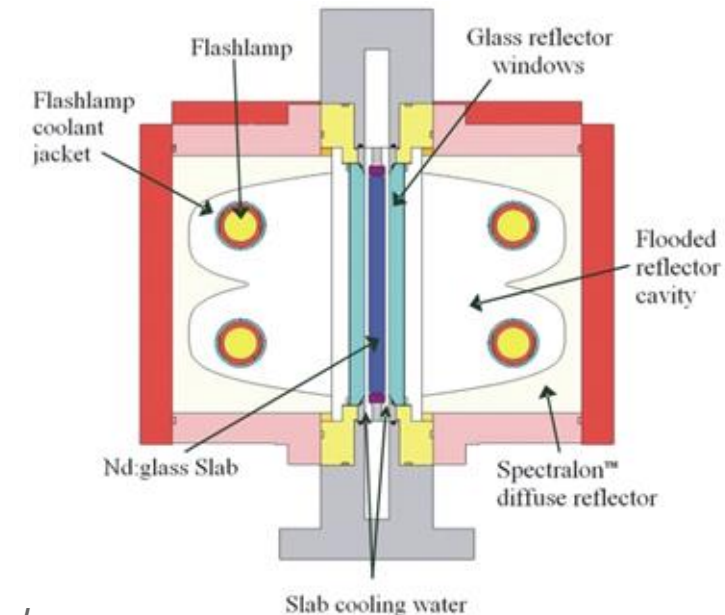
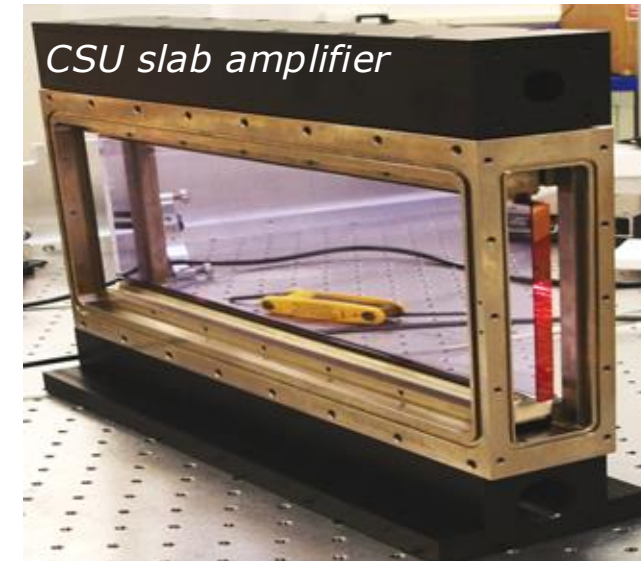
Geometrías de bombeo óptico: lámparas flash



Algunas técnicas que logran acoplar el bombeo al medio de ganancia eficientemente



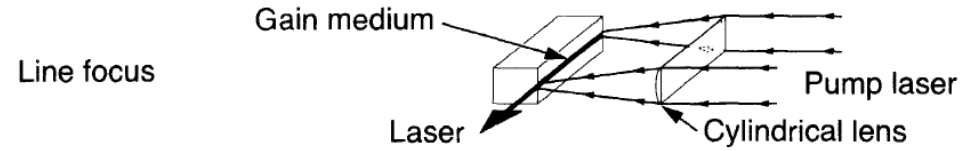
- Reduce la birrefringencia inducida por stress, lente térmica y lente por stress



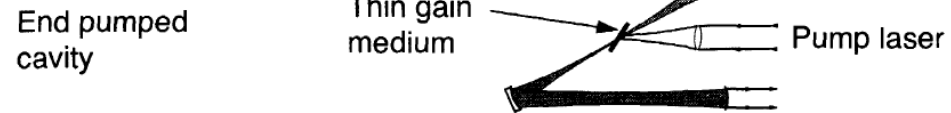
Geometrías de bombeo óptico: láseres



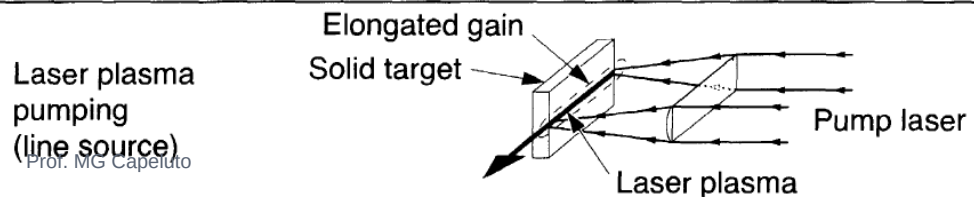
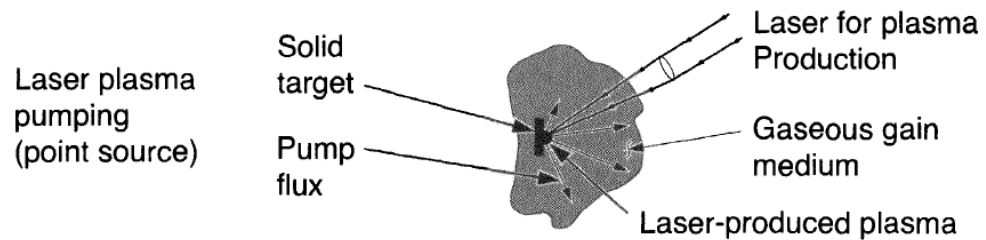
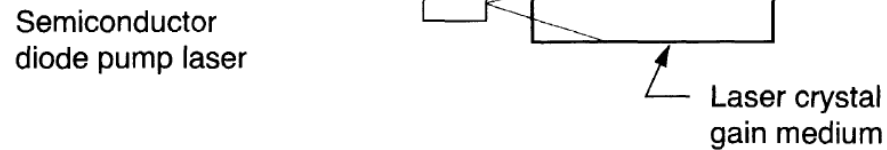
Bombeo transversal



Bombeo longitudinal

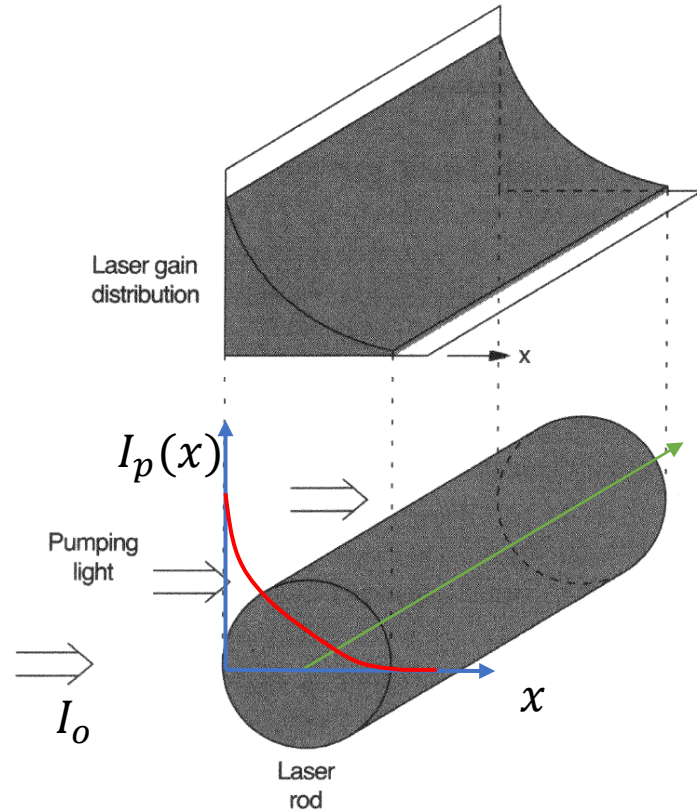


Bombeo longitudinal



Intensidad de bombeo necesaria para obtener determinada ganancia

Como debe ser el medio activo para que el bombeo se absorba eficientemente



Especies laser uniformemente distribuidas en el medio amplificador

N_o población del nivel inferior

Bombeo directo

$$I_p(x) = I_o e^{-\sigma_{ou} N_o x} = I_o e^{-\alpha_{ou} x}$$

Bombeo indirecto

$$I_p(x) = I_o e^{-\sigma_{oq} N_o x} = I_o e^{-\alpha_{oq} x}$$

Cuanto tiene que valer I_o para producir la ganancia necesaria en el amplificador

$$g_{ul}^o = \sigma_{ul} \Delta N_{ul} \approx \sigma_{ul} N_u \text{ (buscamos la condición mínima, despreciamos } N_l \text{)}$$

Igualo bombeo a decaimiento

Corregir silvfast

$$N_u A_{ul} = N_o \Gamma_{ou} \rightarrow N_u = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} = N_o \frac{B_{ou} I_p \eta}{c \Delta \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}}$$

Intensidad de bombeo necesaria para obtener determinada ganancia

$$N_u = \frac{g_{ul}^o}{\sigma_{ul}} = \frac{N_o \Gamma_{ou}}{A_{ul}} = N_o \frac{B_{ou} I_p \eta}{c \Delta \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}} = \left(\frac{g_u}{g_o} \right) \frac{A_{uo} c^3}{8 \pi h \eta^3 \nu_{ou}^3} N_o \frac{I_p \eta}{c \Delta \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}} = \left(\frac{g_u}{g_o} \right) \frac{A_{uo} c^2}{4 \pi^2 \eta^2 \nu_{ou}^2 \Delta \nu_{ou}} \frac{\pi I_p N_o}{2 h \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}}$$

$$\Gamma_{ou} = u(\nu) B_{ou} = \frac{B_{ou} I_p \eta}{c \Delta \nu_{ou}}$$

$$B_{ou} = \left(\frac{g_u}{g_o} \right) \frac{A_{uo} c^3}{8 \pi h \eta^3 \nu_{ou}^3}$$

$$\nu_{ou} = \frac{c/\eta}{\lambda_{ou}}$$

$$\alpha_{ou} = \left(\frac{g_u}{g_o} \right) \sigma_{uo} N_o \text{ (para ancho de línea homogéneo)}$$

$$N_u = \left(\frac{g_u}{g_o} \right) \left[\frac{A_{uo} \lambda_{ou}^2}{4 \pi^2 \Delta \nu_{ou}} \right] N_o \frac{\pi I_p}{2 h \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}} = \alpha_{ou} \frac{\pi I_p}{2 h \nu_{ou}} \frac{1}{A_{ul}} = \frac{g_{ul}^o}{\sigma_{ul}}$$

$$I_p = 2 h \nu_{ou} \frac{g_{ul}^o}{\alpha_{ou} \sigma_{ul} \pi} A_{ul}$$

La intensidad de bombeo dentro del ancho de banda de absorción $\Delta \nu_{ou}$ que necesito para obtener una ganancia g_{ul} está determinada por

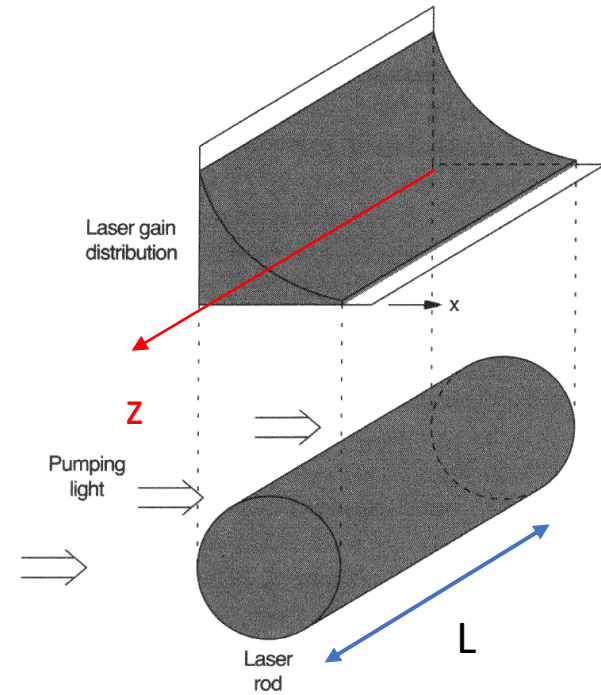
- La energía del fotón $h \nu_{ou}$ de bombeo
- La absorción del medio α_{ou}
- La probabilidad de transición espontánea A_{ul}

$$g_{ul}^o(x) = \frac{I_p(x) \alpha_{ou} \sigma_{ul} \pi}{2 h \nu_{ou} A_{ul}}$$

Perfil transversal de ganancia - bombeo óptico

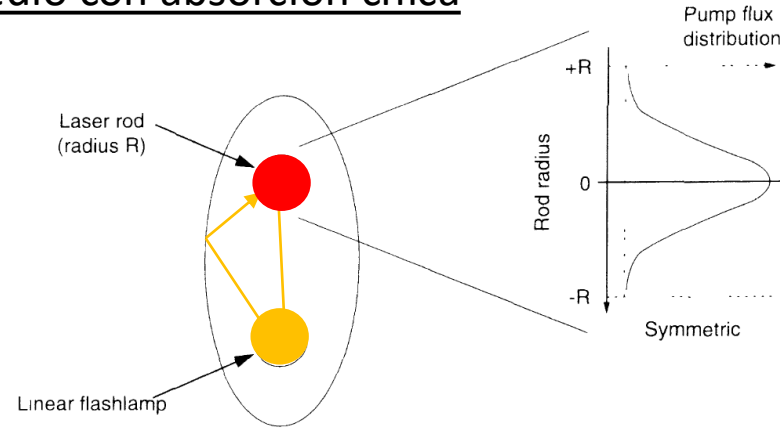


Bombeo transversal

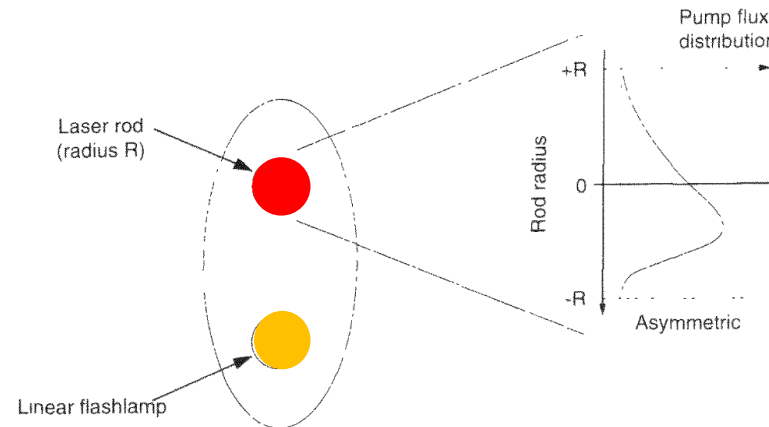


- + L tan grande como quiera
- Ganancia no uniforme en la dirección transversal
- Si uso una lampara flash, la mayoría de la luz no se acopla con el medio de ganancia

Medio con absorción chica

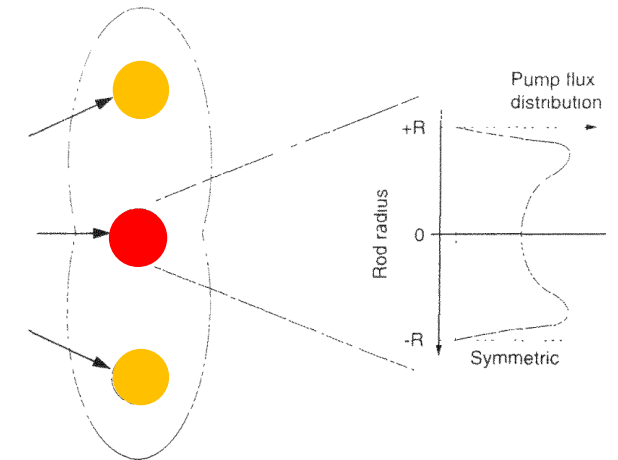


Medio con absorción grande



Cavidad doble elipse

absorbing rod in a double elliptical cavity



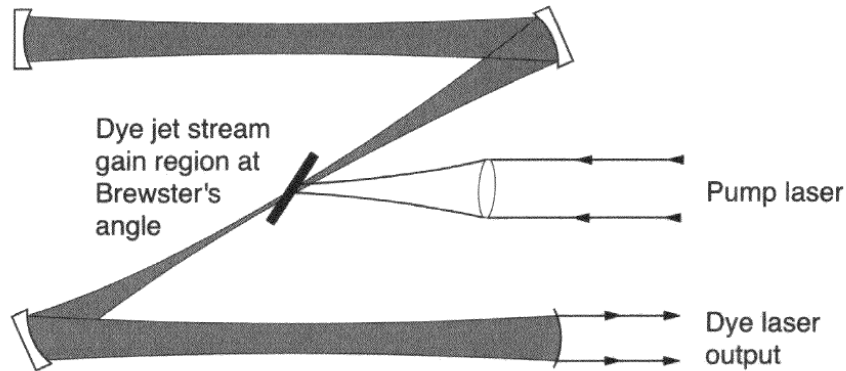
$$l = \frac{1}{\sigma_{oq} N_o} > d_a$$

Una ganancia transversal no uniforme puede favorecer perfiles espaciales no deseados, modos transversales superiores, gain guiding, aberraciones y lente térmica. Busco un perfil homogéneo iluminando todo el medio de manera uniforme

Perfil transversal de ganancia - bombeo óptico



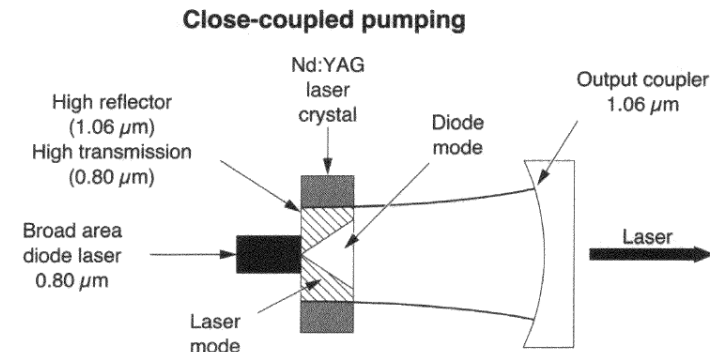
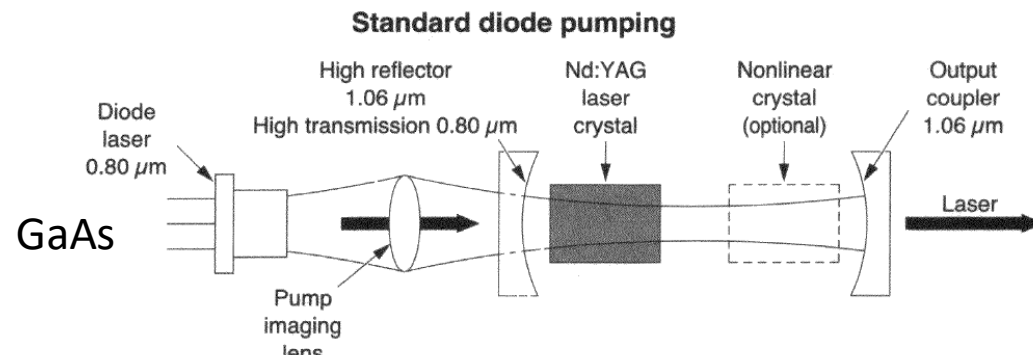
Bombeo longitudinal o end pumping



- Generalmente se usa otro laser para el bombeo
- Permite alto solapamiento entre la región bombeada y el modo láser.
- Se puede iluminar solo el volumen del modo de la cavidad (y no todo el medio de ganancia) por lo que la energía del bombeo no se gasta en zonas que no se utilizan.

- El bombeo produce una ganancia astigmática
- La cavidad se diseña para compensar astigmatismo de bombeo
- Láseres de colorante, Ti: Saph

Diode Pumped Solid State Lasers (DPSS)





Ecuación para el número de fotones dentro de la cavidad en un modo de la cavidad

$$\frac{d\phi}{dt} = K M_u (\phi + 1) - \frac{\phi}{\tau_c}$$

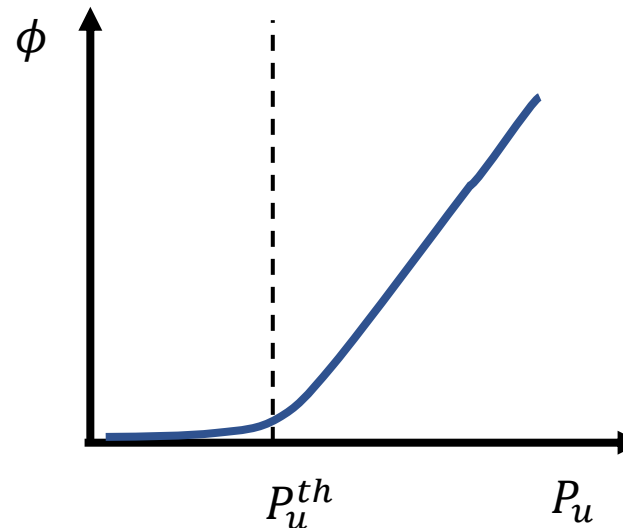
Ecuación para la población total del nivel superior M_u

$$\frac{dM_u}{dt} = P_u - K M_u \phi - M_u A_u$$

Solución estacionaria

$$P_u < P_u^{th} \quad \phi \approx \frac{P_u \tau_u}{\frac{1}{K \tau_c} - P_u \tau_u} = \frac{P_u}{P_u^{th} - P_u}$$

$$P_u > P_u^{th} \quad \phi^{ss} \approx \frac{1}{M_u^{th} K} (P_u - P_u^{th})$$



Buscamos una expresión en función de potencia medida y suministrada

Número de fotones y potencia medida

$$\phi = \frac{I V_c}{h \nu_{ul} c} = \frac{P_{laser}^{IN}}{A} \frac{V_c}{h \nu_{ul} c} \propto P_{laser}^{out}$$

Flujo de bombeo y potencia de bombeo

(numero de especies (electrones, atomos, iones etc) por u de tiempo excitados al nivel u)

$$\frac{P_u}{V_g} = R_g \propto P_{pump}$$

Ecuación que relaciona las potencias

$$P_{laser}^{out} = \sigma_{slope} (P - P^{th})$$

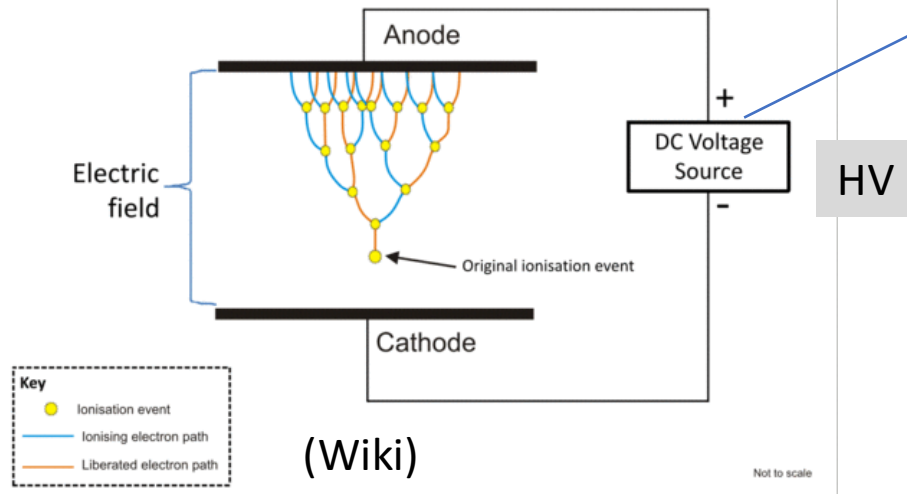
- Proporción de bombeo colectada en medio laser
- Cuanta potencia colectada es absorbida
- Cuanta potencia absorbida se transforma en N_u
- Eficiencia cuántica ($h \nu_{laser} / h \nu_{pump}$)

Bombeo con partículas



Excitación por colisiones con electrones & ionización por impacto electrónico

Visualisation of a Townsend Avalanche



Se generan electrones libres que se aceleran debido al campo eléctrico aplicado entre los electrodos

- $\bar{v}_e \sim 10^6 - 10^7 \text{ m/s}$
- Colisiones de electrones excitan átomos o moléculas
- Bombeo útil: electrones muy energéticos que producen colisiones inelásticas: excitación o ionización
- En cada colisión se puede excitar un electrón a un estado ligado o liberar un electrón (ionizar)

Densidad de corriente (determinada por electrones libres)

$$J_e = n_e e \bar{v}_{drift} \quad [A/m^2], \quad e = 1.6 \times 10^{-19} C$$

velocidad promedio en la dirección del campo (drift velocity)

$$\bar{v}_{drift} = \mu \bar{E}$$

μ movilidad de los electrones

$$\bar{v}_{drift} < \bar{v}_e / 10 \quad (\text{el valor baja por los choques})$$

Prof. MG Capeluto

Temperatura electrónica

Temperatura asociada a electrones que se mueven con velocidad $\bar{v}_e$

$$\text{Según Boltzmann } \bar{v}_e = \sqrt{\frac{8k_B T_e}{m_e \pi}}$$

Gas $T \sim 500 - 1500 K$

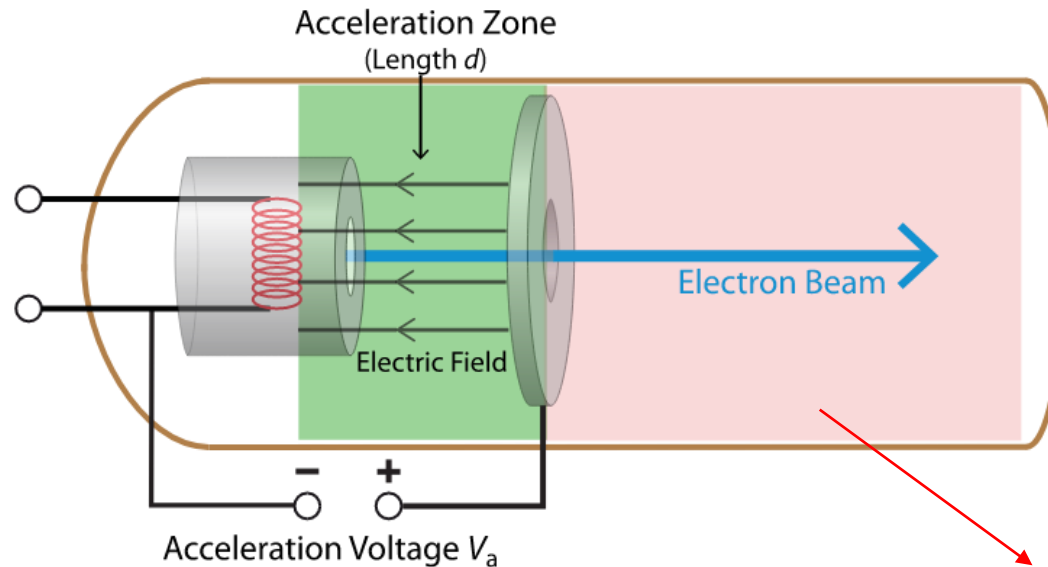
Electrones $T_e \sim 5000 - 100000 K$

$\bar{v}_e (T_e)$ aumenta con $\bar{E}$, disminuye con la presión (más choques)

Excitación por colisiones con electrones & ionización por impacto electrónico

Si la presión es muy grande, el campo $\vec{E}$ no llega a acelerar electrones a las energías necesarias para excitar a los niveles laser
Se puede usar entonces un acelerador de electrones

Acelerador de electrones o fuente de haces de electrones

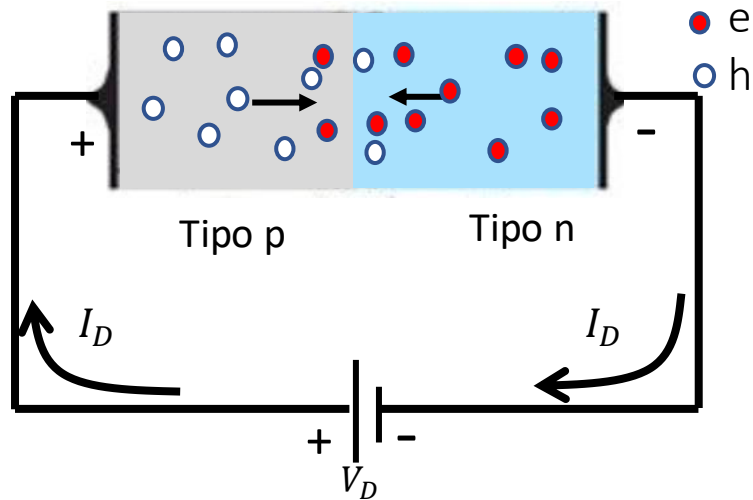


Medio activo laser
(ejemplo excímeros)

Haz de electrones externo: cientos de keV a $\sim$ MeV.

útil cuando se necesita depositar mucha energía en gases densos o producir especies altamente excitadas o ionizadas, como ocurre en algunos excímeros.

Dispositivos optoelectrónicos semiconductores



Estimación de densidad de corriente asociada al transporte de portadores hacia la región activa

$$J_e = n_e e \bar{v}_{diff} \quad [A/m^2],$$

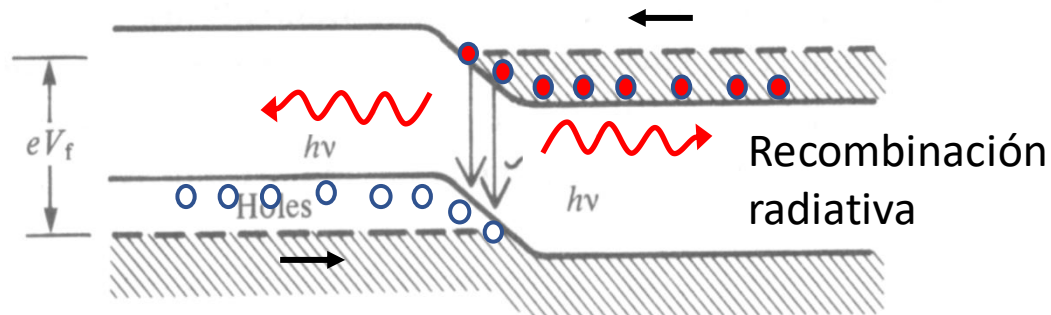
n_e densidad electrónica en la banda de conducción

$\bar{v}_{diff}$ velocidad de difusión

$$\bar{v}_{diff} \sim \frac{d}{\tau}$$

$d \sim \sqrt{D\tau}$ longitud de difusión/ tamaño de la juntura

τ tiempo de recombinación (tiempo en que un electrón en la juntura tarda en recombinarse con un hueco)



$$D = \frac{k_b T \mu}{e} \text{ coeficiente de difusión}$$

μ movilidad de los electrones o agujeros

$$\bar{v}_{drift}(e) = -\mu_e E$$

$$\bar{v}_{drift}(h) = \mu_h E$$

Chicos comparados con los de electrones

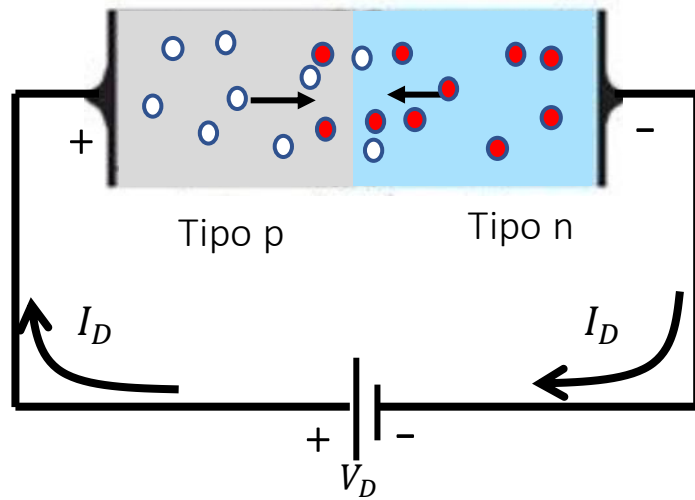
ArGa:

$$\mu_n = 600 \text{ cm}^2/\text{vs},$$

$$\mu_p = 30 \text{ cm}^2/\text{vs}$$

$$D_n = 15 \text{ cm}^2/\text{s},$$

$$D_p = .78 \text{ cm}^2/\text{s}$$



Homojuntura GaAs:

$$n_c = 10^{24}/m^3,$$

$$D_n = 1.5 \times 10^{-3} m^2/s$$

$$\tau \sim 10^{-9} s$$

$$d \sim \sqrt{D\tau} \sim 1.22 \mu m$$

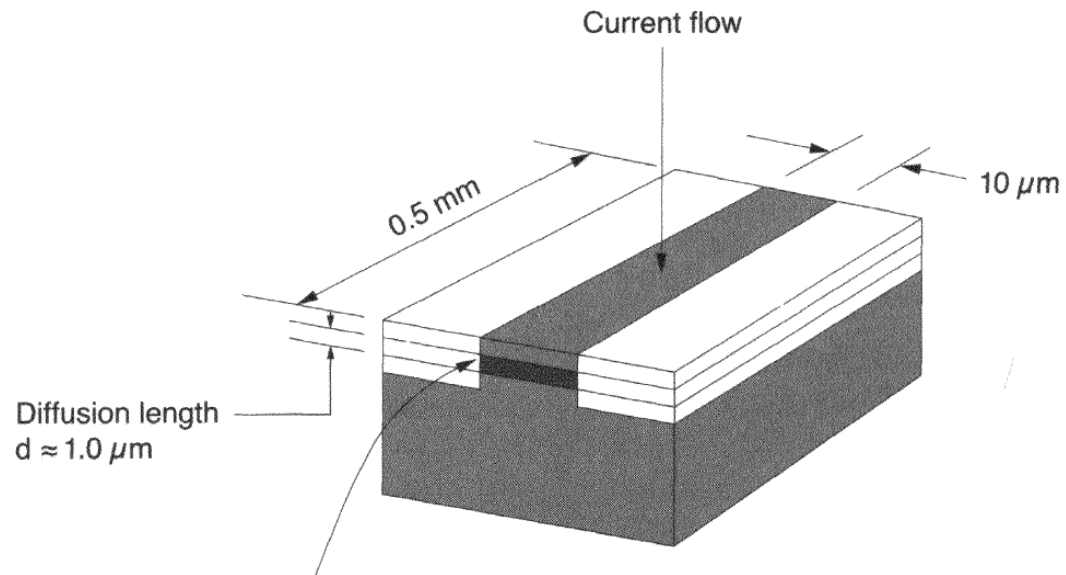
$$\bar{v}_{diff} \sim \frac{d}{\tau} \sim 1.22 \times 10^3 m/s$$

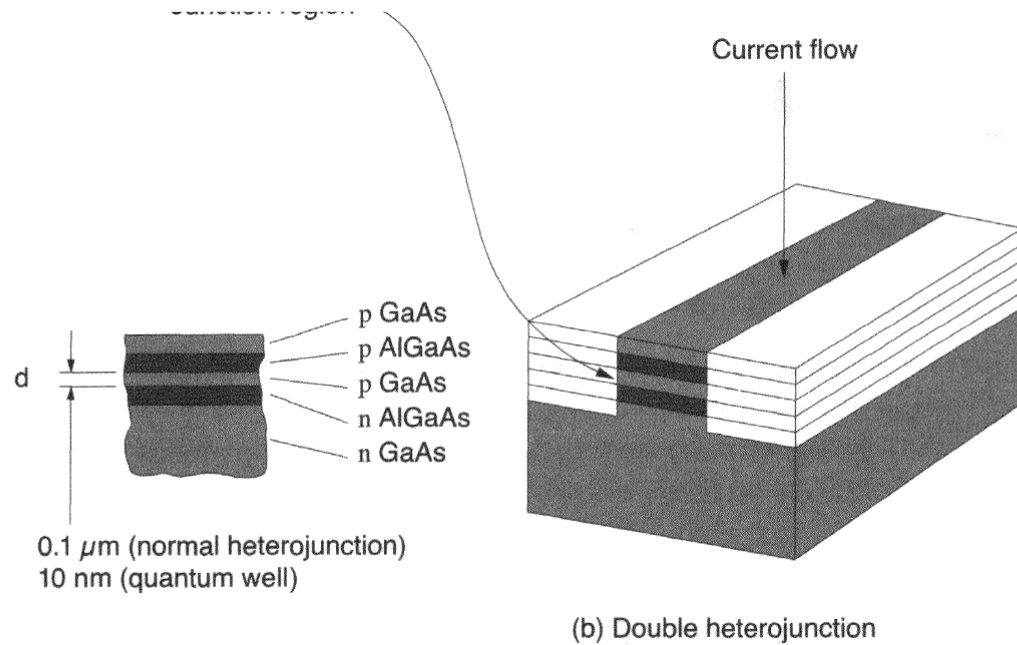
$$J_e = n_e e \bar{v}_D = 1.95 \times 10^8 A/m^2 \sim 20 kA/cm^2,$$

Area transversal al flujo de corriente

$$a = 0.5 mm \times 10 \mu m = 5 \times 10^{-9} m^2$$

$$I = J_e a \sim 1 A \text{ (enorme)} \rightarrow \text{el laser se quemaría}$$





Doble Heterojuntura y quantum well:

$d_{DH} \sim 0.1 \mu m$ (10 veces más chica que homojuntura)

$d_{QW} \sim 0.01 \mu m$ (100 veces más chico que homojuntura)

$$\bar{v}_{diff}(DH) \sim \frac{d_{DH}}{\tau} \sim 0.1 \times 10^3 m/s$$

$$\bar{v}_{diff}(QW) \sim \frac{d_{QW}}{\tau} \sim 0.01 \times 10^3 m/s$$

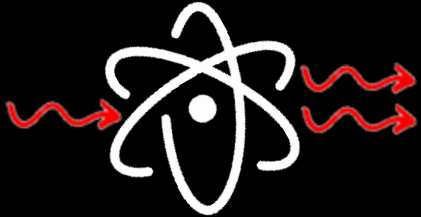
$$J_e(DH) = n_e e \bar{v}_D = 0.2 \times 10^8 A/m^2,$$

$$J_e(QW) = n_e e \bar{v}_D = 0.02 \times 10^8 A/m^2,$$

$$I(DH) = 0.1 A$$

$$I(QW) = 0.01 A$$

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

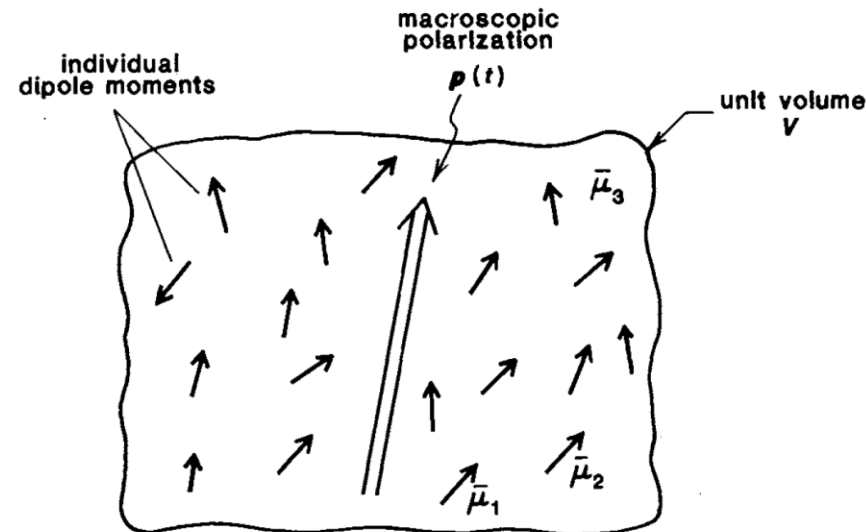
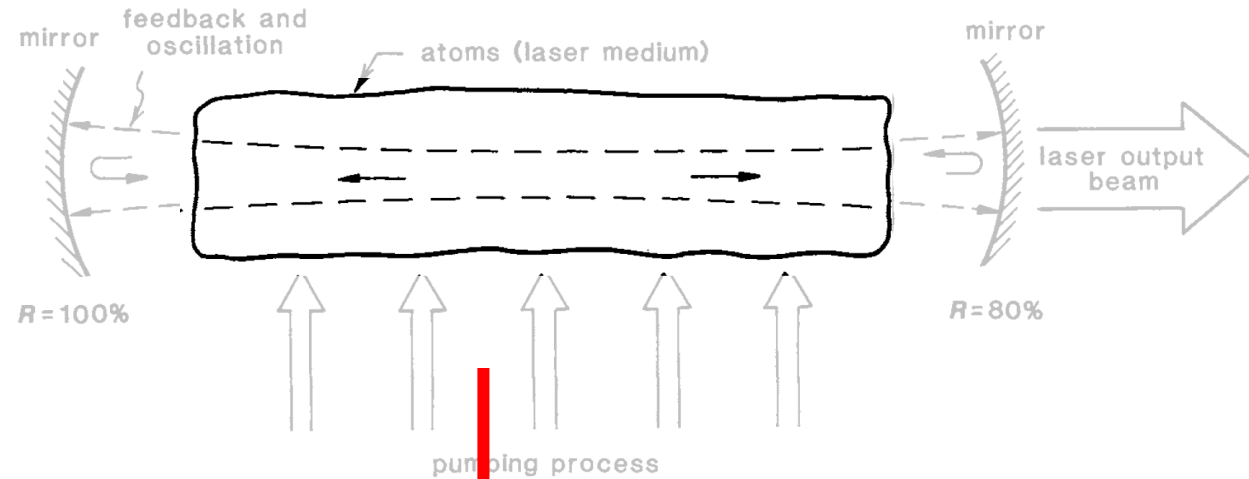
- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

Nos focalizamos hasta ahora en el medio activo...

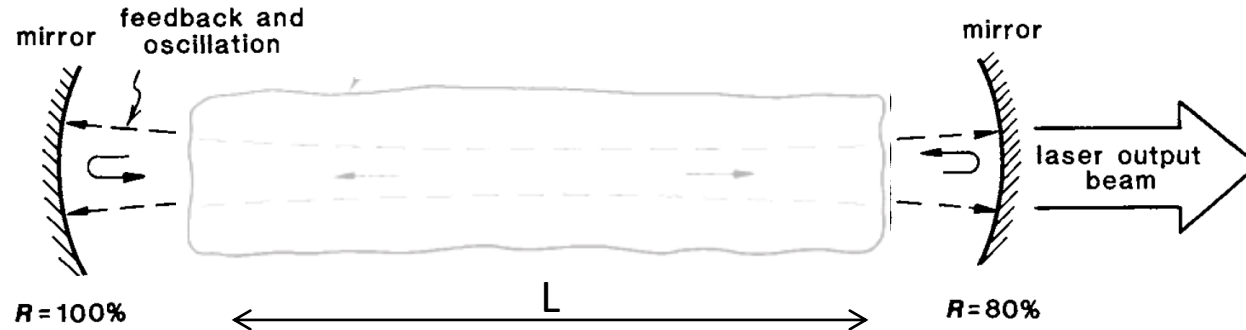


Estudiamos la interacción entre una onda electromagnética y un material

Modelamos las transiciones ópticas como **dipolos eléctricos oscilantes**, lo que nos permitió entender:

- absorción;
- emisión estimulada;
- ganancia óptica;
- saturación de la ganancia.

Nos vamos a focalizar ahora en las cavidades



¿Por que habíamos agregado espejos?

Para que la luz recorra muchas veces el medio activo, aumentando la ganancia acumulada y permitiendo que la ganancia compense las pérdidas

Incrementar $L \rightarrow$ cavidad

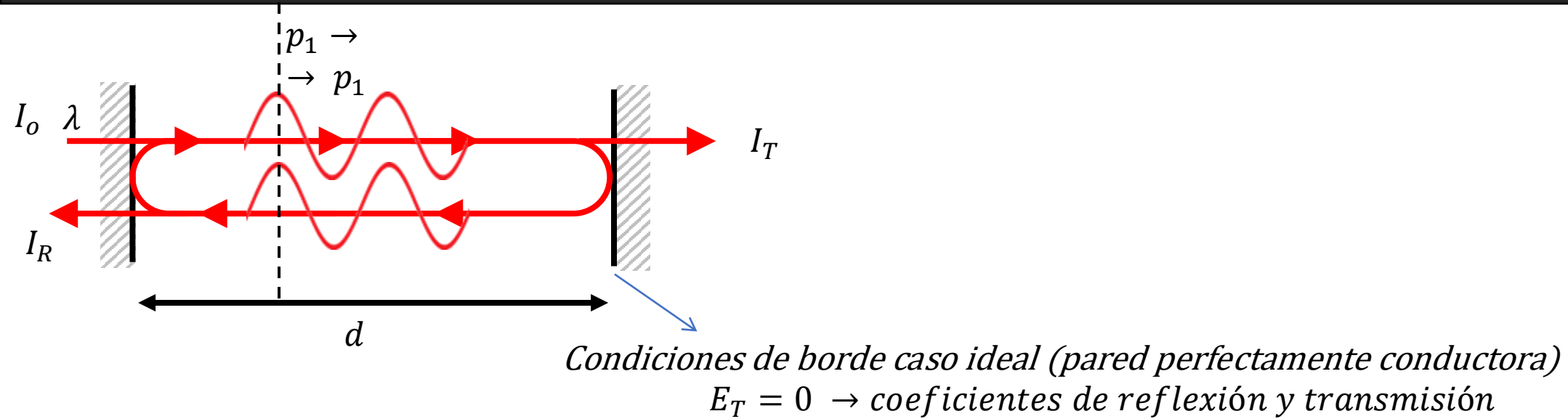
- $g_o > g_{th}$

La cavidad no solo realimenta la luz: también selecciona los modos posibles del láser.

cavidad $\rightarrow$ modos transversales y longitudinales

- Los modos en las cavidades juegan un rol muy importante en la determinación de las características del laser
- Los modos pueden ser:
 - longitudinales (asociados con la cavidad tipo Fabry-Perot formada por los espejos)
 - transversales (asociados a tener un haz limitado en el espacio, difracción)

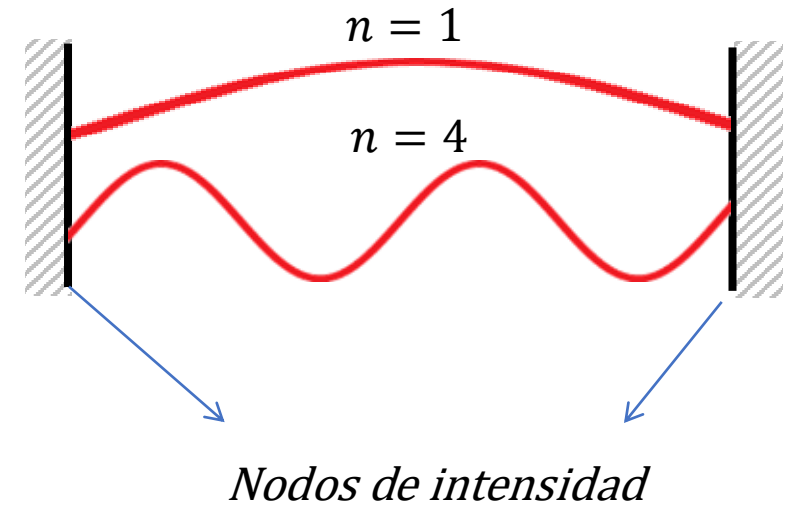
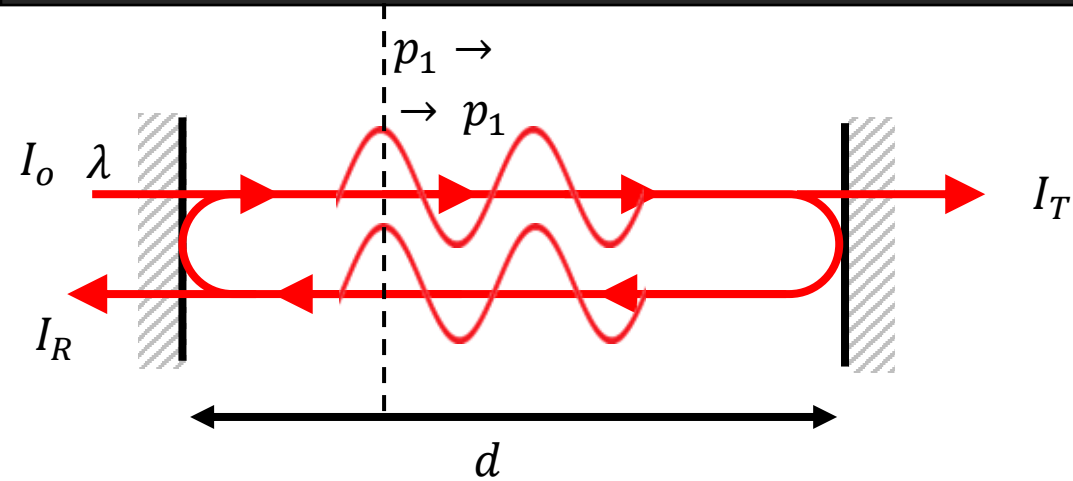
Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Buscamos la solución estacionaria, independiente del tiempo

$\rightarrow$ amplitud y fase son iguales en un *round trip* $p_1 \rightarrow p_1$

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Buscamos la solución estacionaria, independiente del tiempo

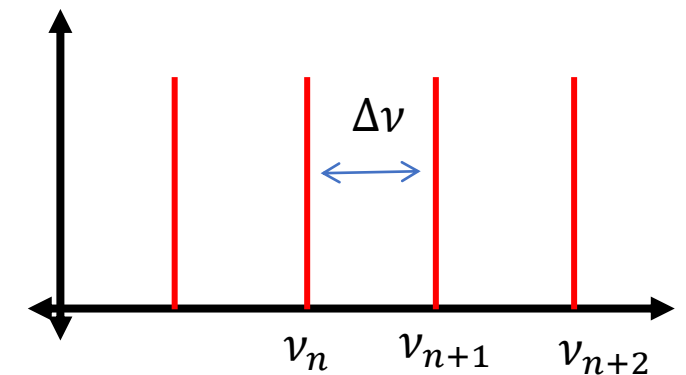
→ amplitud y fase son iguales en un *round trip* $p_1 \rightarrow p_1$

Ambas condiciones se cumplen si $d = n \lambda / 2 \rightarrow$ ondas estacionarias

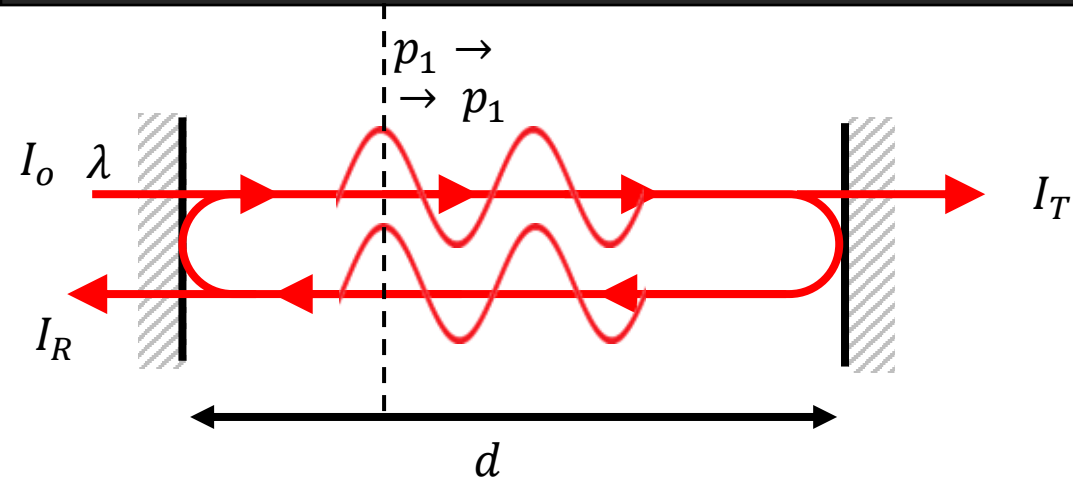
Modos de la cavidad

$$\lambda_n = \frac{2d}{n}$$

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2d} = n \Delta \nu$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



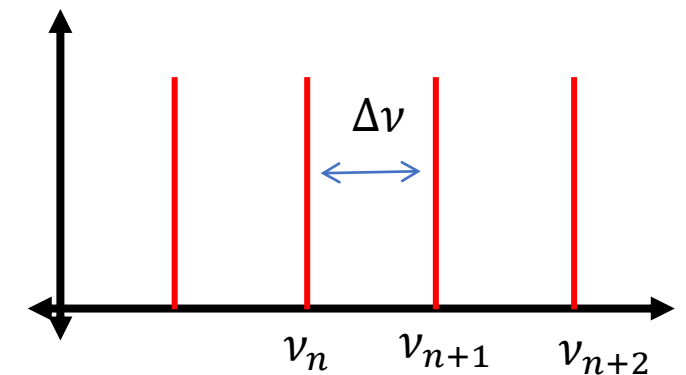
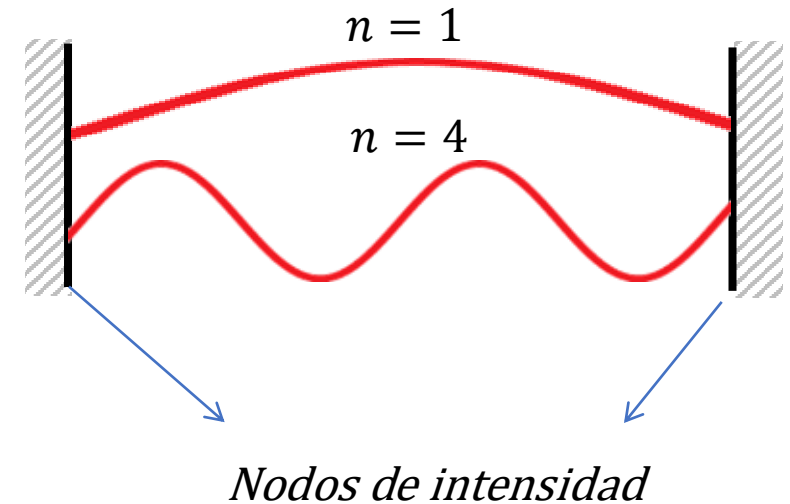
$d = 1\text{m}$
 $\Delta\nu = 150\text{MHz} \ll \nu_{vis} \sim 6 \times 10^8\text{MHz}$ ($\lambda_{vis} = 500\text{nm}$)
(¡densidad de modos muy grande!)

Cuántas veces $\lambda_{vis}/2$ entra en la cavidad?
 $n = 4 \times 10^6 \rightarrow$ un modo altísimo!

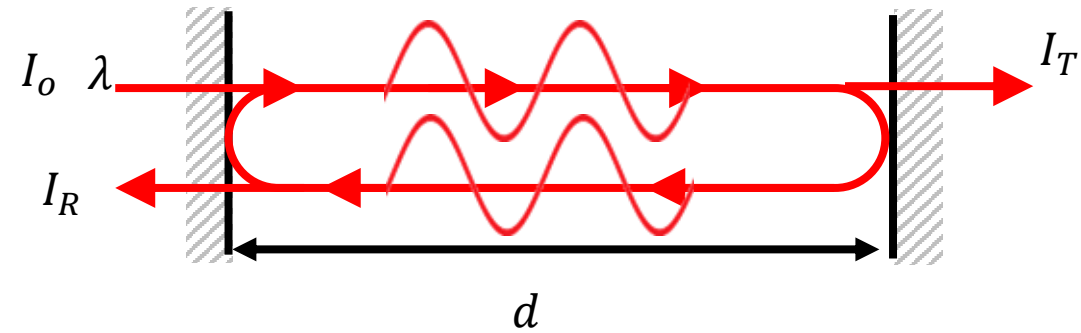
Ambas condiciones se cumplen si $d = n \lambda/2 \rightarrow$ ondas estacionarias

Modos de la cavidad

$$\lambda_n = \frac{2d}{n}$$
$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2d} = n\Delta\nu$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$r = |r|e^{i\varphi_r}, \quad t = |t|e^{i\varphi_t}$$

$|t| < 1$ coeficiente de transmisión para la amplitud

$|r| < 1$ coeficiente de reflexión para la amplitud

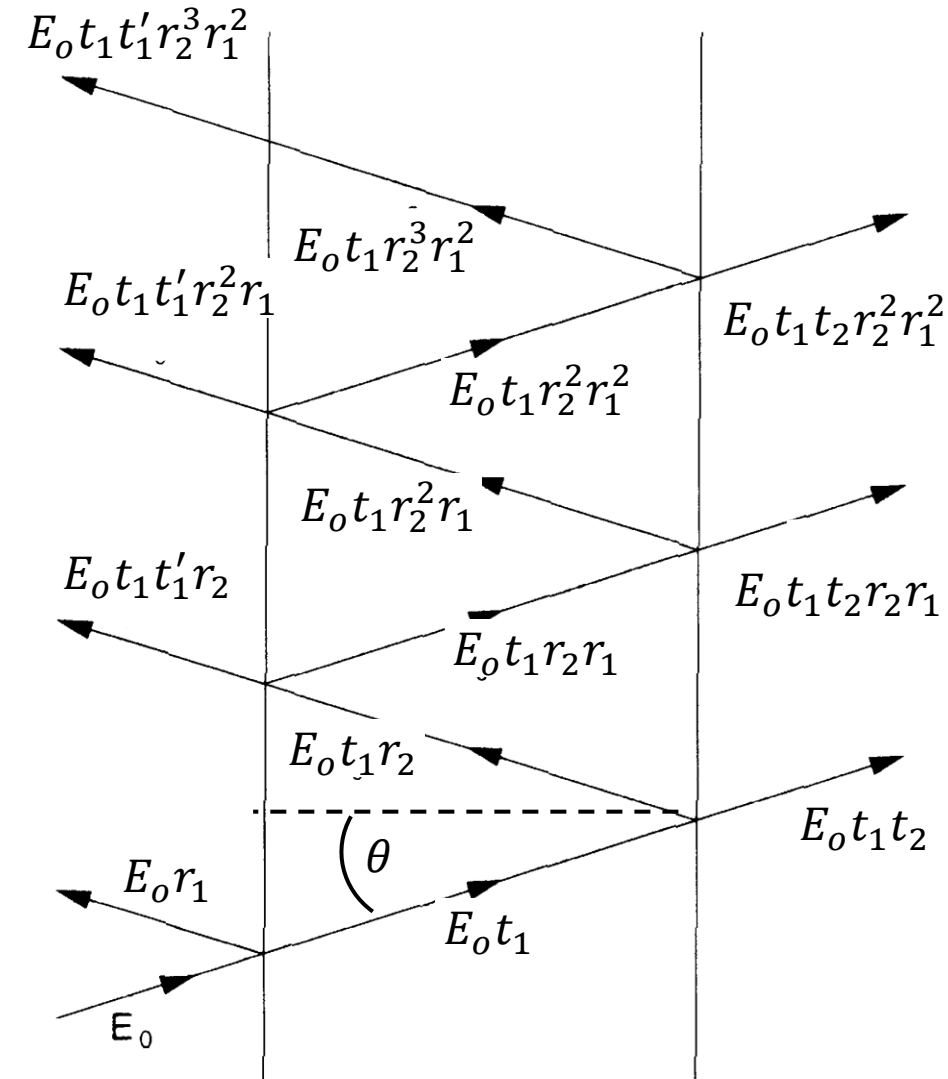
$$|t|^2 + |r|^2 = 1$$

Para la intensidad

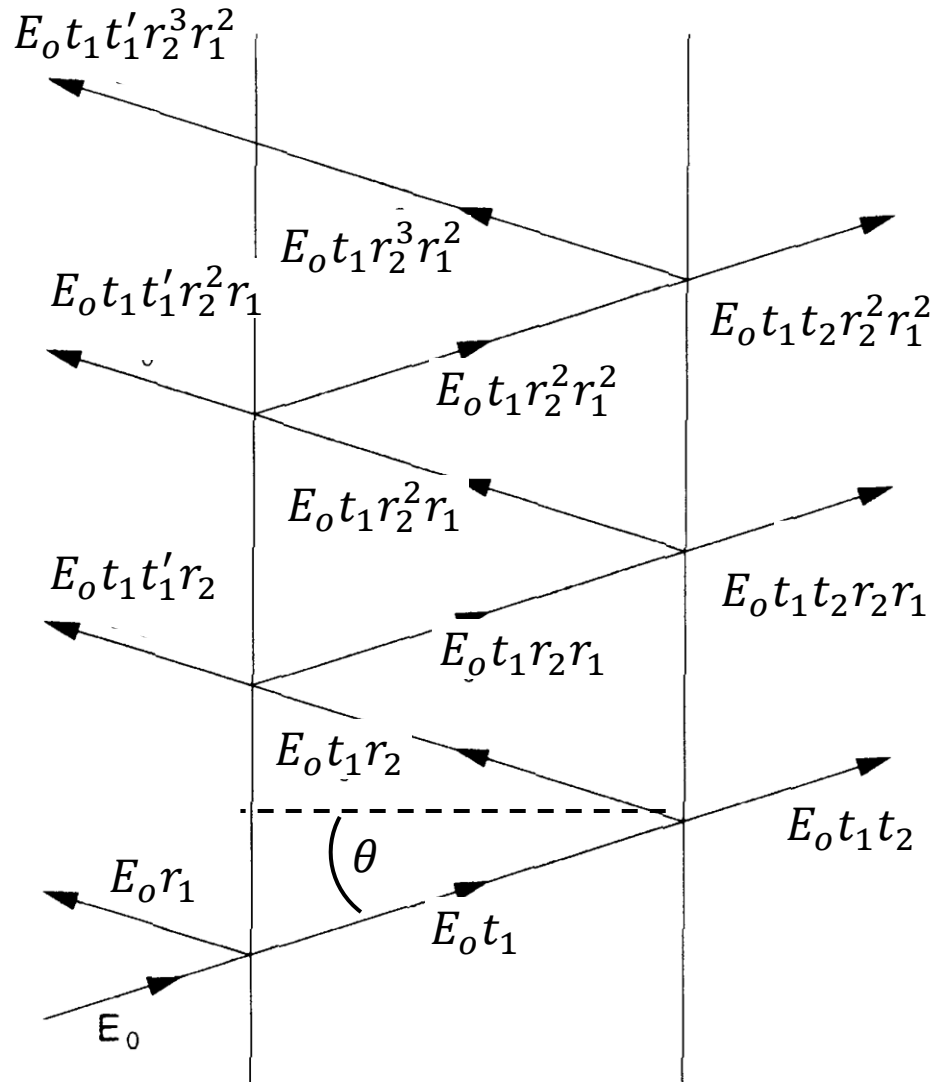
$$T = |t|^2, R = |r|^2$$

Espejo perfecto $R = 1 \rightarrow r = e^{i\pi}$

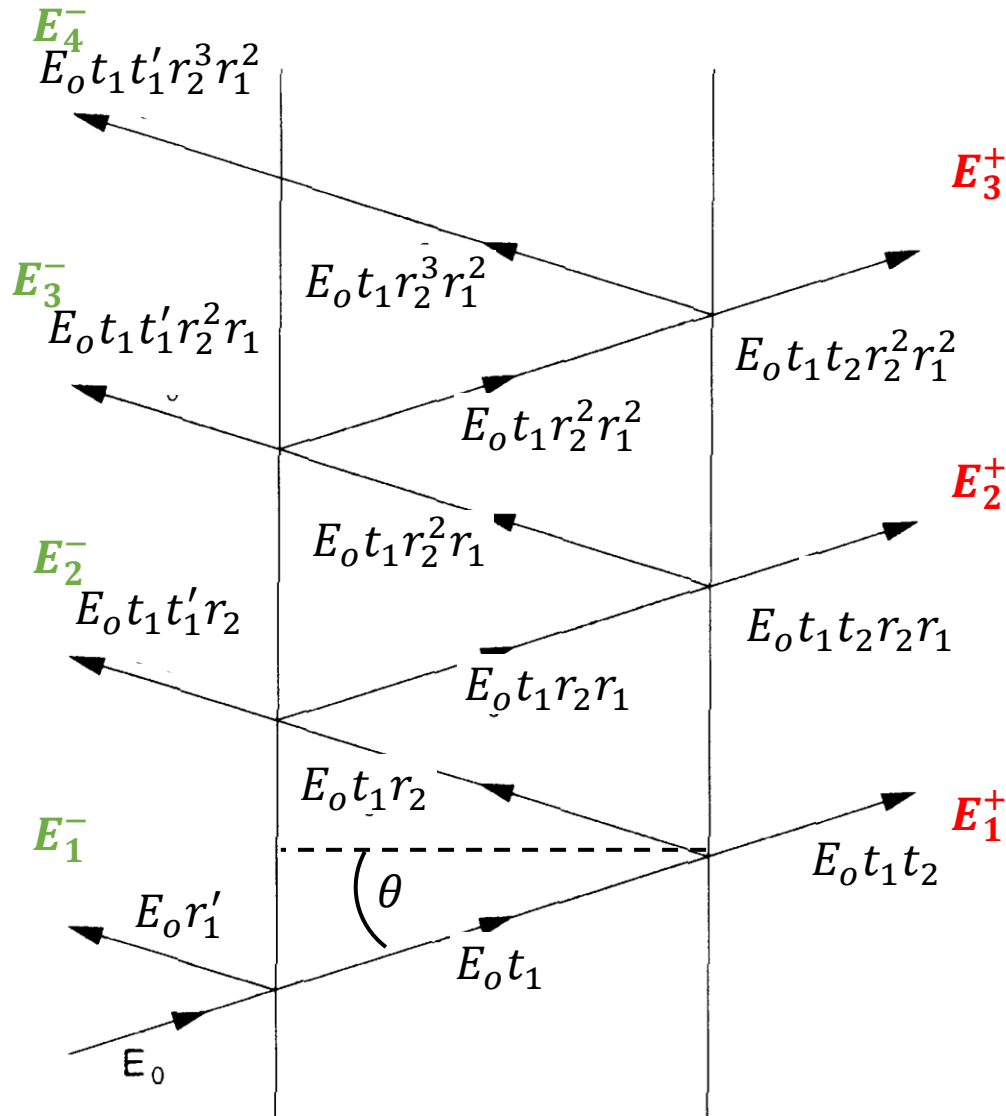
$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ onda plana de extensión infinita}$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$E^+ = E_1^+ + E_2^+ + E_3^+ + E_4^+ \dots$$

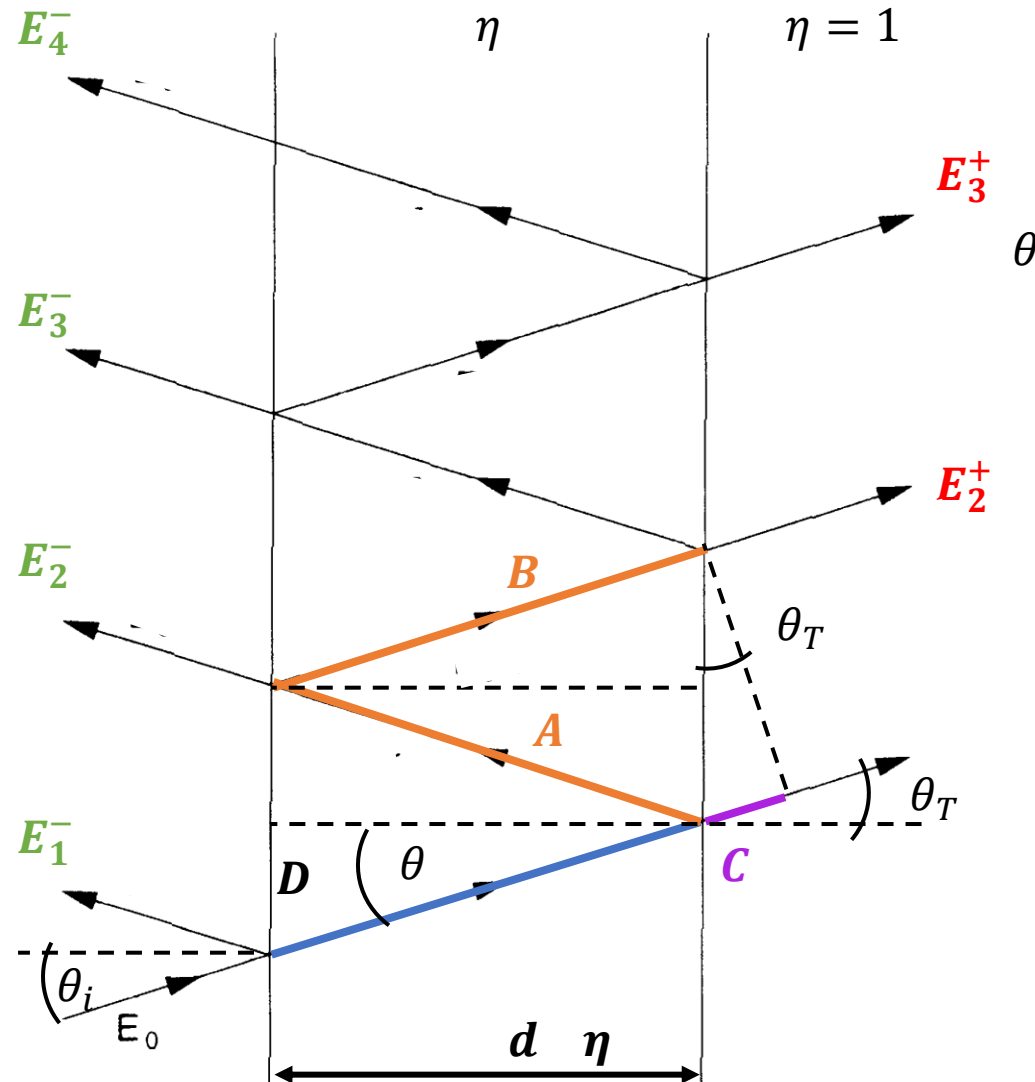
$$E^+ = E_0 t_1 t_2 \{ 1 + r_1 r_2 e^{i\delta} + r_1^2 r_2^2 e^{i2\delta} + \dots \} e^{i(k.r - \omega t)}$$

$$E^- = E_1^- + E_2^- + E_3^- + E_4^- \dots$$

$$E^- = E_0 \{ r_1' + t_1 t_1' r_2 e^{i\delta} + t_1 t_1' r_2^2 r_1 e^{i2\delta} + t_1 t_1' r_2^2 r_1^2 e^{i3\delta} + \dots \} e^{i(k_r.r - \omega t)}$$

$$\delta = k \times DCO$$

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$E^+ = E_1^+ + E_2^+ + E_3^+ + E_4^+ \dots$$

$$E^- = E_1^- + E_2^- + E_3^- + E_4^- \dots$$

$$\delta = \eta k(A + B) - kC = 2\eta kA - kC$$

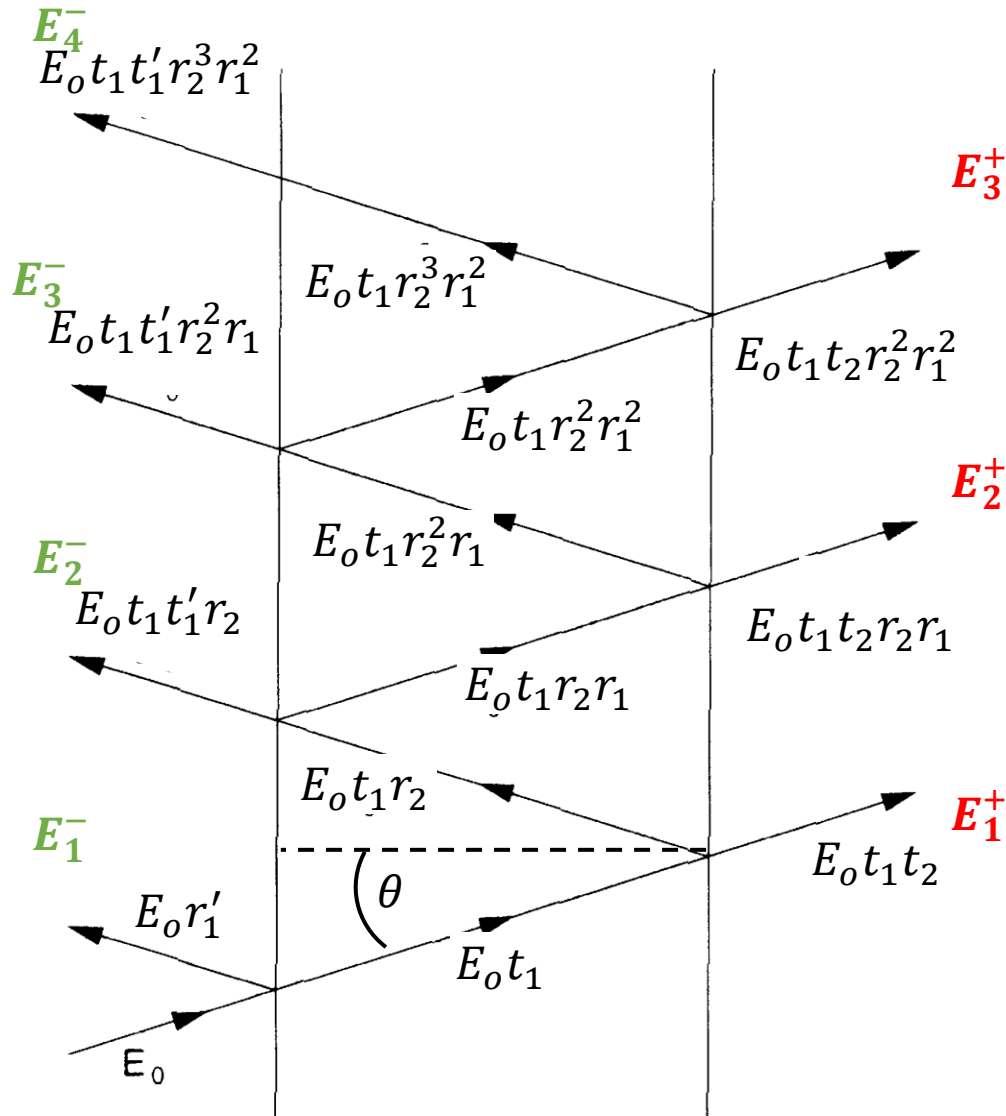
$$A = \frac{d}{\cos(\theta)} \quad C = 2D \sin(\theta_T) \quad D = d \tan(\theta)$$

$$\text{Snell } \eta \sin(\theta) = \sin(\theta_T) \longrightarrow C = 2D\eta \sin(\theta)$$

$$\delta = 2\eta k \frac{d}{\cos(\theta)} - 2\eta k d \tan(\theta) \sin(\theta) = \frac{2d \eta k}{\cos(\theta)} (1 - \sin^2(\theta))$$

$$\delta = 2dk\eta \cos(\theta)$$

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$E^+ = E_1^+ + E_2^+ + E_3^+ + E_4^+ \dots$$

$$E^+ = E_0 t_1 t_2 \{1 + r_1 r_2 e^{i\delta} + r_1^2 r_2^2 e^{i2\delta} + \dots\} e^{i(k.r - \omega t)}$$

$$E^+ = E_0 t_1 t_2 e^{i(k.r - \omega t)} \sum_{m=0}^{\infty} (r_1 r_2)^m e^{i\delta m} = E_0 t_1 t_2 e^{i(k.r - \omega t)} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_0^2 |t_1 t_2|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2}$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - r_1 r_2 e^{i\delta})(1 - (r_1 r_2)^* e^{-i\delta})$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - r_1 r_2 e^{i\delta} - (r_1 r_2)^* e^{-i\delta} + |r_1|^2 |r_2|^2)$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - 2|r_1||r_2|\cos(\phi) + |r_1|^2 |r_2|^2)$$

$$\phi = \delta + \phi_R \qquad \phi_R = (\varphi_{r1} + \varphi_{r2})$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - 2|r_1||r_2|\cos(\phi) + |r_1|^2 |r_2|^2)$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 + |r_1|^2 |r_2|^2 - 2|r_1||r_2|) + 2|r_1||r_2| - 2|r_1||r_2|\cos(\phi)$$

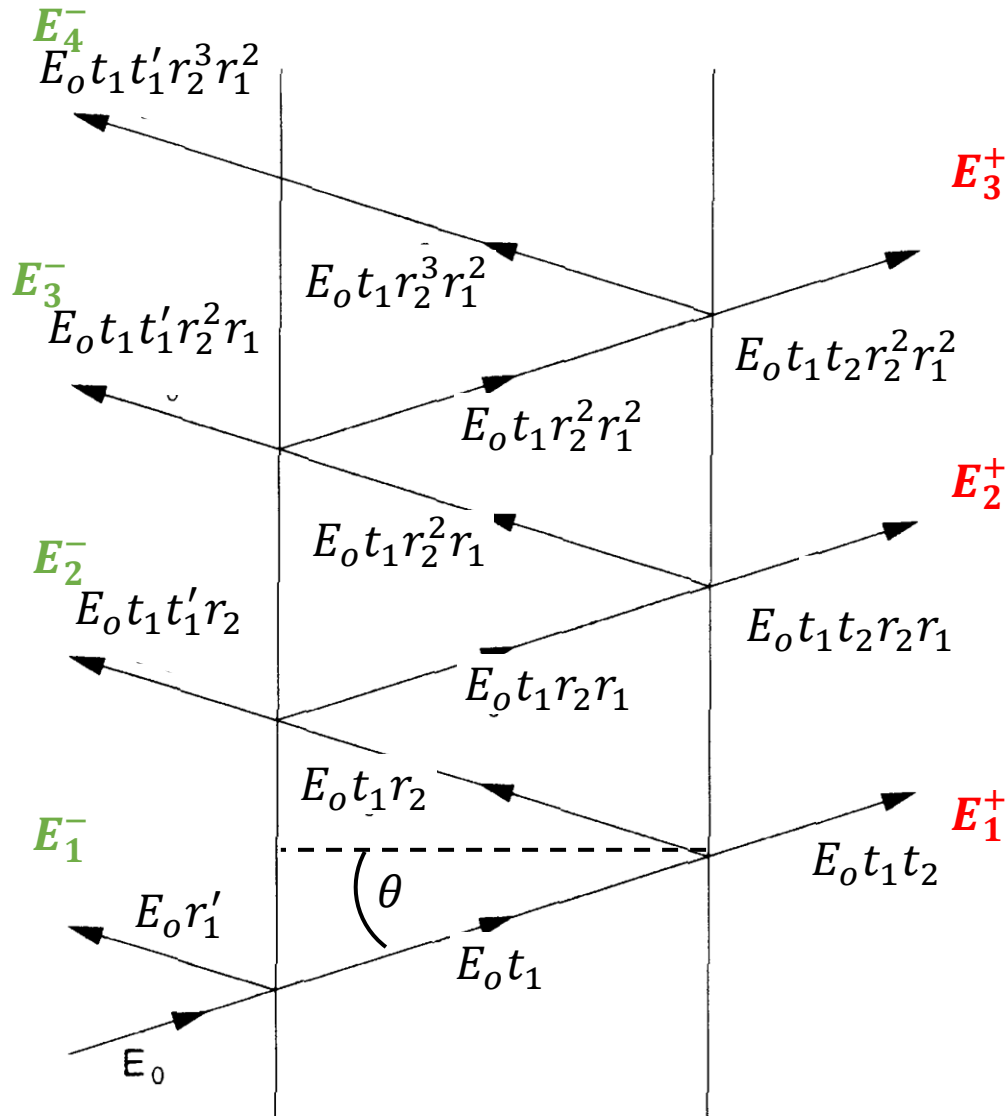
$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - |r_1||r_2|)^2 + 2|r_1||r_2|(1 - \cos(\phi))$$

$$|1 - (r_1 r_2)^2 e^{i\delta}|^2 = (1 - |r_1||r_2|)^2 + 2|r_1||r_2|2\sin^2(\phi/2)$$

$$|1 - (r_1 r_2)^2 e^{i\delta}|^2 = (1 - |r_1||r_2|)^2 \left(1 + \frac{4|r_1||r_2|}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \sin^2(\phi/2)\right)$$

$$F = \frac{4|r_1||r_2|}{(1 - |r_1||r_2|)^2}$$

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2}$$

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - |r_1||r_2|)^2 (1 + F \sin^2(\phi/2))$$

$$F = \frac{4|r_1||r_2|}{(1 - |r_1||r_2|)^2}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2d\eta k \cos(\theta) + \phi_R$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

Función de Airy

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$

$$R_1 = |r_1|^2$$

$$R_2 = |r_2|^2$$

En ausencia de pérdidas $R + T = 1$

$$T_1 = T_2 = 0.1$$

$$F = \frac{4|r_1||r_2|}{(1 - |r_1||r_2|)^2} = \frac{4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2})^2} = \frac{4R}{(1 - R)^2} = 360$$

Máximos I_t

$$\frac{\phi}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\Delta\phi = 2\pi$$

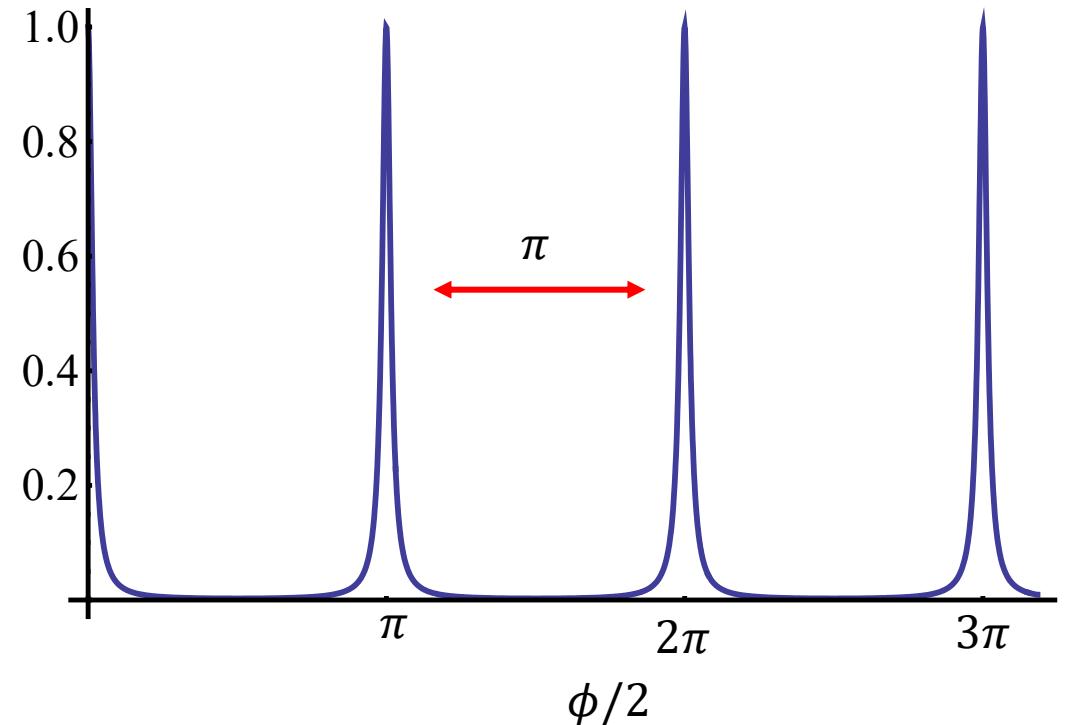
Incidencia normal ($\theta = 0$) y espejos dieléctricos ($\phi_R = 0$)

$$d k \eta = d \eta \frac{2 \pi}{\lambda} = n \pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2 d \eta}{n}$$

En d entra un numero semientero de λ en el medio

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2dk\eta \cos(\theta) + \phi_R$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$

$$R_1 = |r_1|^2$$

$$R_2 = |r_2|^2$$

En ausencia de pérdidas $R + T = 1$

$$T_1 = T_2 = 0.1$$

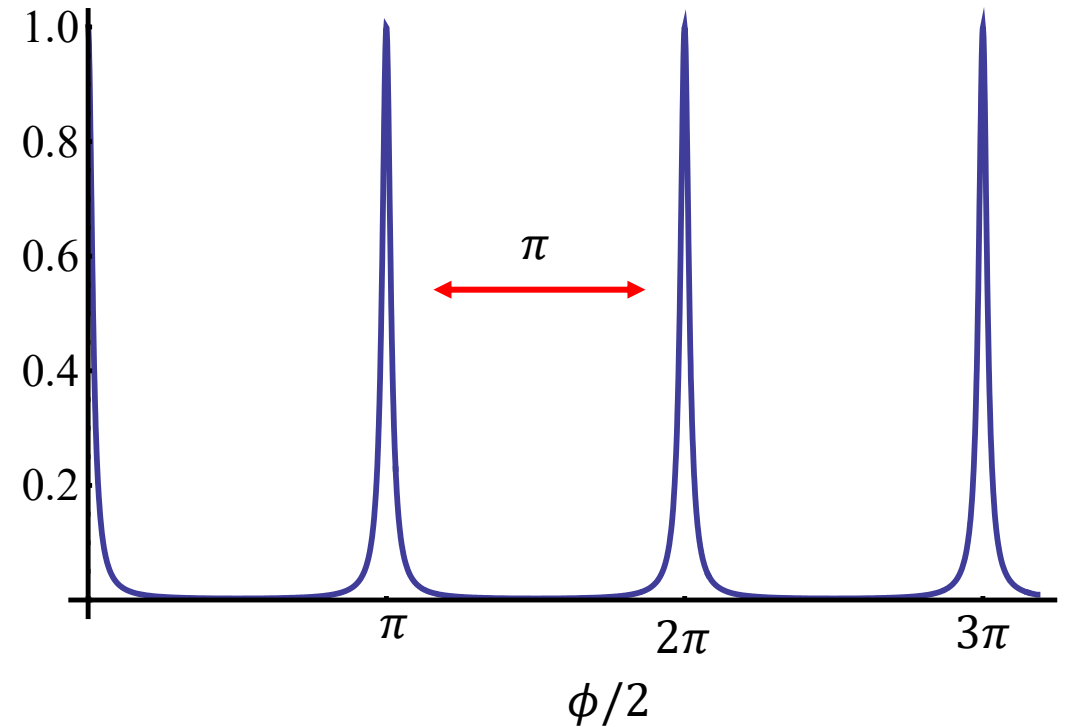
En los máximos (en resonancia)

$$I_t(max) = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} = E_o^2 = I_o$$

Para cualquier coeficiente de reflexión la cavidad transmite lo mismo ...que gano entonces cambiando el coeficiente de reflexión?

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \text{sen}^2(\phi/2))}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2dk\eta \cos(\theta) + \phi_R$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$

$$R_1 = |r_1|^2$$

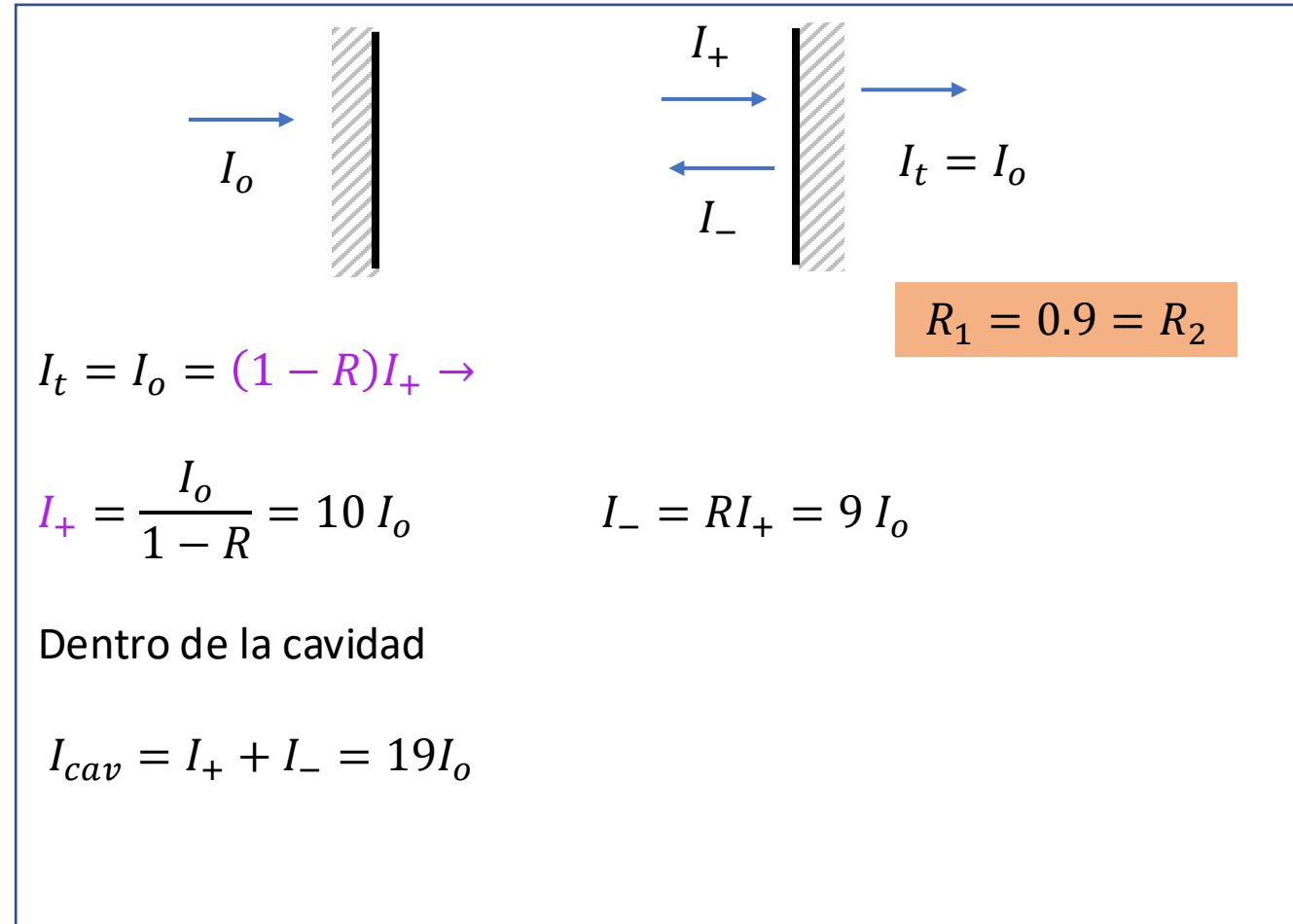
$$R_2 = |r_2|^2$$

En ausencia de pérdidas $R + T = 1$
 $T_1 = T_2 = 0.1$

En los máximos (en resonancia)

$$I_t(max) = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} = E_o^2 = I_o$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$

$$R_1 = |r_1|^2$$

$$R_2 = |r_2|^2$$

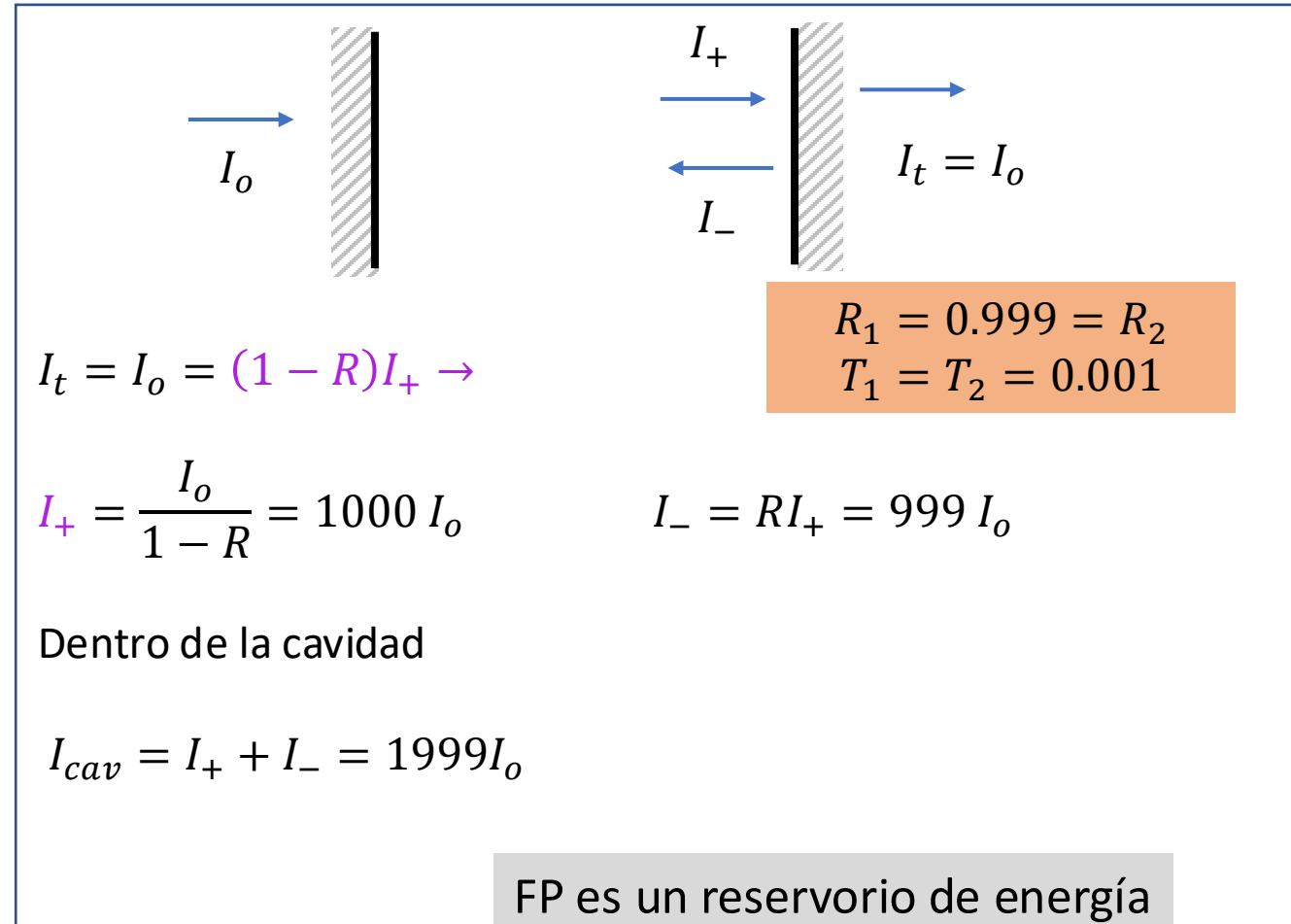
En ausencia de pérdidas $R + T = 1$

$$T_1 = T_2 = 0.001$$

En los máximos (en resonancia)

$$I_t(max) = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} = E_o^2 = I_o$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$ $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

Ancho mitad altura

Todos los máximos tienen el mismo ancho

$$\frac{1}{(1 + F \operatorname{sen}^2(\phi/2))} = \frac{1}{2}$$

$$F \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi_{\pm}}{2}\right) = 1$$

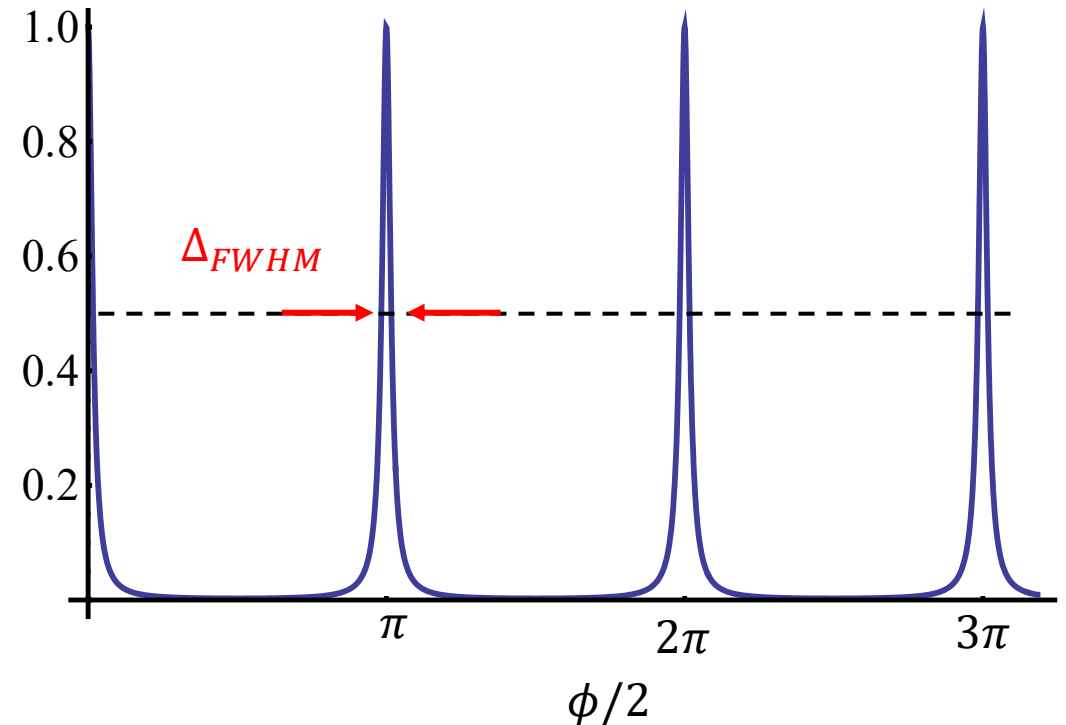
$$\frac{\phi_{\pm}}{2} = \pm \operatorname{asin}\left(\sqrt{1/F}\right)$$

$$\Delta_{FWHM} = 2 \operatorname{asin}\left(\sqrt{1/F}\right) \rightarrow \Delta\phi_{FWHM} = 4 \operatorname{asin}\left(\sqrt{1/F}\right)$$

Si F es grande $\Delta\phi_{FWHM} \sim 4\sqrt{1/F}$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \operatorname{sen}^2(\phi/2))}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2d\eta k \cos(\theta) + \phi_R$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Ejemplo: $R_1 = 0.9 = R_2 = R$ $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

Ancho mitad altura

Todos los máximos tienen el mismo ancho

$$\Delta\phi_{FWHM} = 4 \arcsin\left(\sqrt{1/F}\right)$$

Si F es grande $\Delta\phi_{FWHM} \sim 4\sqrt{1/F}$

Rango espectral libre

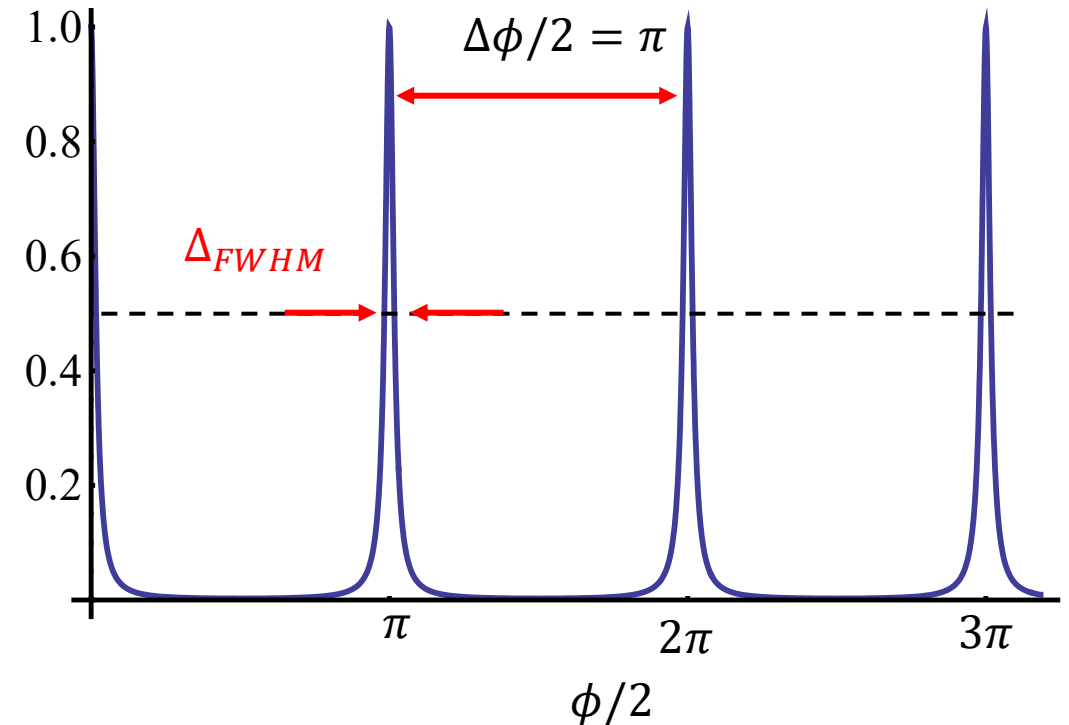
separación entre máximos $\Delta\phi = 2\pi$

Finesse (selectividad)

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{FWHM}} = \frac{2\pi}{4/\sqrt{F}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F} = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2d\eta k \cos(\theta) + \phi_R$$



Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot

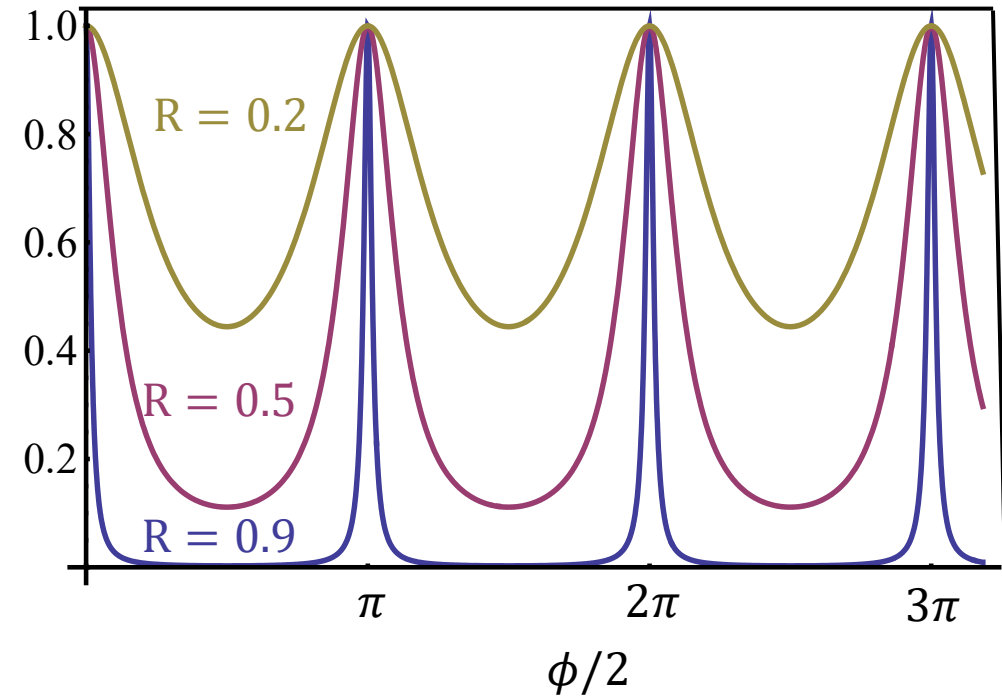
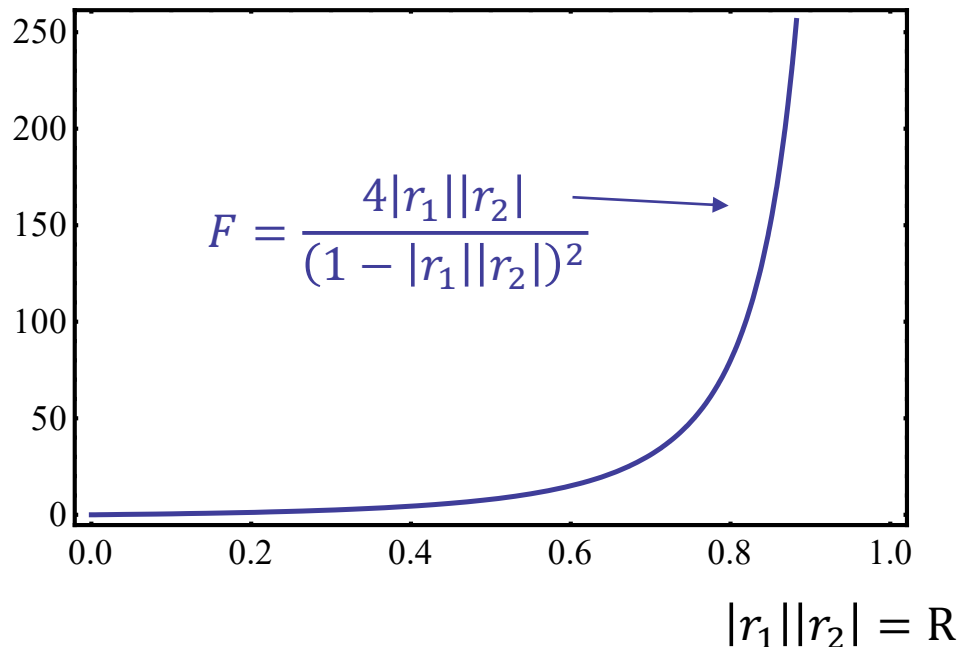


Ejemplo: $R_1 = R_2 = R$

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1||r_2|)^2} \frac{1}{(1 + F \operatorname{sen}^2(\phi/2))}$$

$$\phi = \delta + \phi_R = 2dk\eta \cos(\theta) + \phi_R$$



R aumenta $\rightarrow F$ aumenta $\rightarrow \Delta\phi_{FWHM}$ disminuye $\rightarrow \mathcal{F}$ aumenta

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



Incidencia normal ($\theta = 0$) y espejos dieléctricos ($\phi_R = 0$)

$$\phi = \delta + \phi_R = 2dk\eta \cos(\theta) + \phi_R = 2dk\eta$$

El máximo de intensidad ocurre en:

$$\frac{\phi}{2} = dk\eta = d \frac{2\pi}{\lambda} \eta = n\pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2d\eta}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La frecuencia del máximo es

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c n}{2d\eta} \quad \Delta\nu_n = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2d\eta}$$

$$R_1 = |r_1|^2, R_2 = |r_2|^2$$

$$R_1 = R_2$$
$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$$R_1 \neq R_2$$
$$F = \frac{4|r_1||r_2|}{(1-|r_1||r_2|)^2}$$

Finesse (selectividad del modo)

Q (factor calidad)

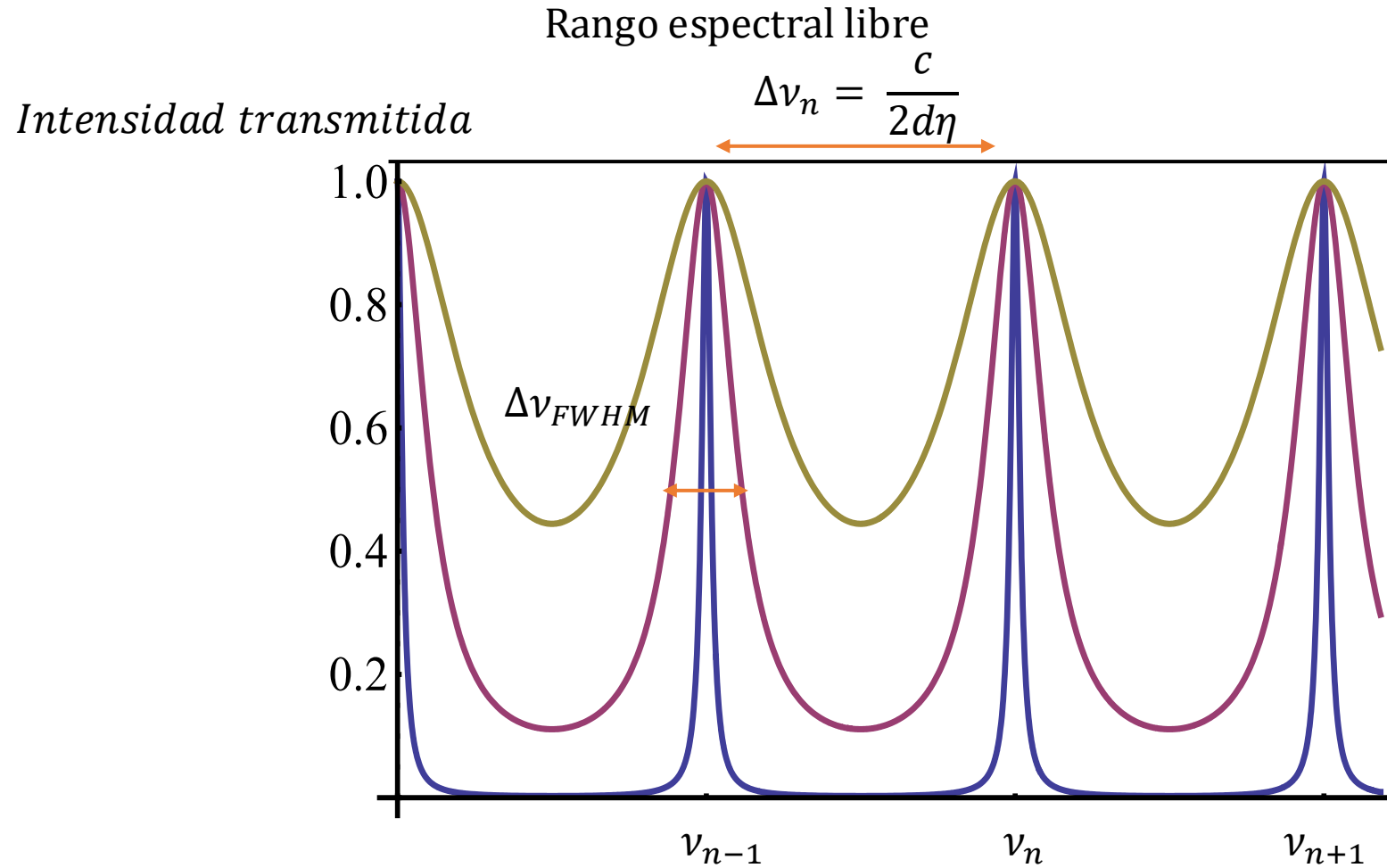
$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{FWHM}} = \frac{2\pi}{4/\sqrt{F}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{FWHM}}$$

$$\Delta\nu_{FWHM} = \frac{\Delta\nu}{\mathcal{F}} = \frac{\left(\frac{c}{2d\eta}\right)}{\mathcal{F}} = \left(\frac{c}{2d\eta}\right) \frac{2}{\pi\sqrt{F}}$$

$$Q = \frac{\nu_o}{\Delta\nu_{FWHM}}$$

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot



$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c n}{2d\eta}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{FWHM}}$$

$$Q = \frac{\nu_o}{\Delta\nu_{FWHM}}$$

$$\Delta\nu_{FWHM} = \left(\frac{c}{2d\eta}\right) \frac{2}{\pi\sqrt{F}}$$

Table 4.1 Resonance properties of an FPI and a spring oscillator.

	FPI	spring oscillator
Resonance frequency	$\nu=4.94 \times 10^{14}$ Hz ($\lambda=607$ nm)	2 Hz
Axial mode number	$q=33,000$	-
Bandwidth	$\delta\nu=3.8 \times 10^8$ Hz	0.1 Hz
Free spectral range	$\Delta\nu=1.5 \times 10^{10}$ Hz	-
Max. transmission	$T=0.13$	-
Decay time	$\tau=3.61 \times 10^{-10}$ s	1.6 s
Cavity quality	$Q=1.3 \times 10^6$	20
Finesse	$F=39.5$	-

Modos longitudinales: resonador Fabry-Perot

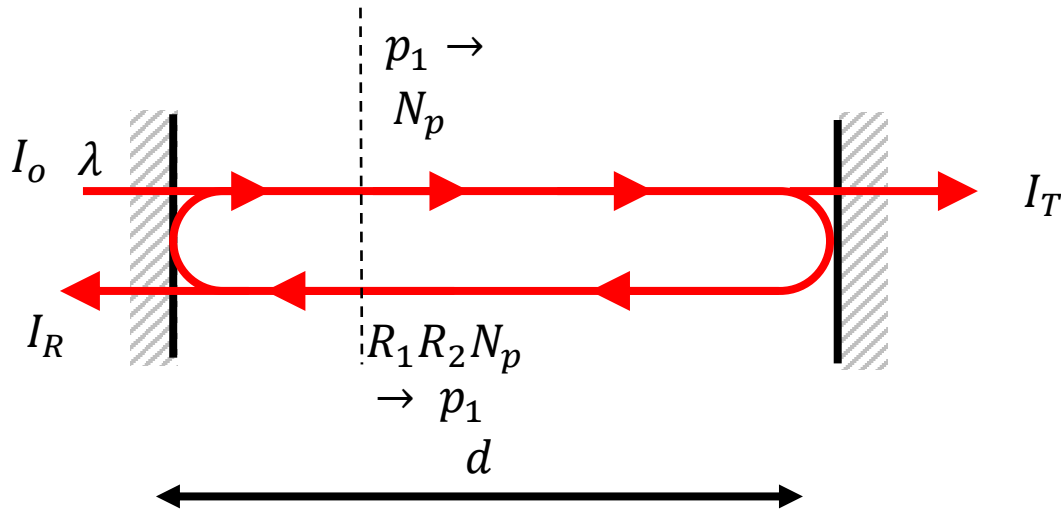


Tiempo de vida del fotón

- Si considero el comportamiento de los fotones ó
- Apago repentinamente (o enciendo) la iluminación

La energía decae x

→ Pérdidas en los espejos, o perdidas por scattering y absorción



¿Cuántos fotones se pierden por round trip?

$$N_p - R_1 R_2 N_p = N_p (1 - R_1 R_2)$$

$$\frac{N_p(t + \tau_{RT}) - N_p(t)}{\tau_{RT}} = - \frac{[1 - R_1 R_2] N_p}{\tau_{RT}}$$

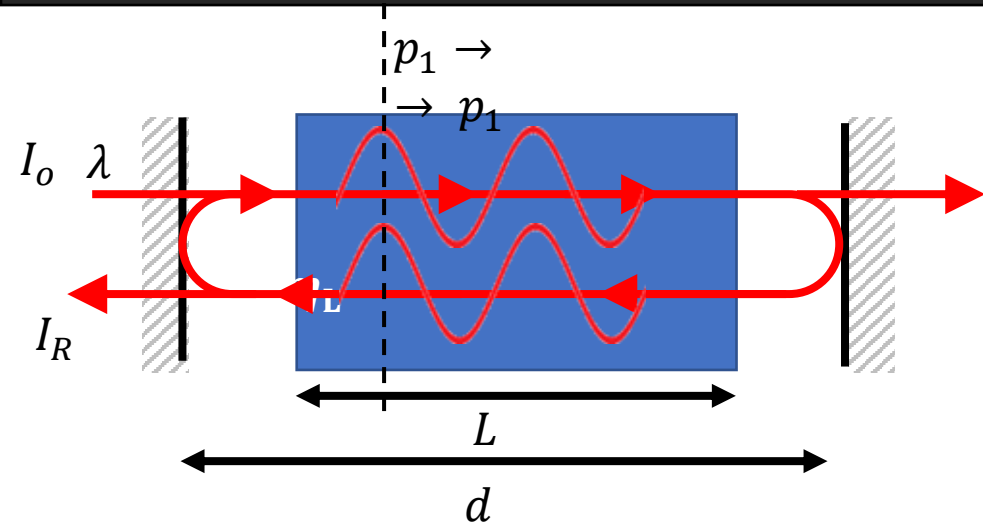
$$\frac{dN_p}{dt} = - \frac{[1 - R_1 R_2] N_p}{\tau_{RT}} = - \frac{N_p}{\tau_P}$$

$$\tau_P = \frac{\tau_{RT}}{[1 - R_1 R_2]}$$

$$\tau_{RT} = \frac{2d}{v_g} \simeq \frac{2d\eta}{c}$$

$$N_P = N_{p0} e^{-t/\tau_P}$$

Modos longitudinales + medio amplificador



¿Cómo cambia el tiempo de round trip?

$$\tau_p = \frac{1}{v_g \left[\alpha + \frac{1}{2d} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right) \right]}$$

¿Como cambia la frecuencia de los modos?

Si el medio de ganancia ocupa toda la cavidad (gases, colorantes)

$$\nu_n = \frac{c n}{2d\eta}$$

Si el medio de ganancia no ocupa toda la cavidad

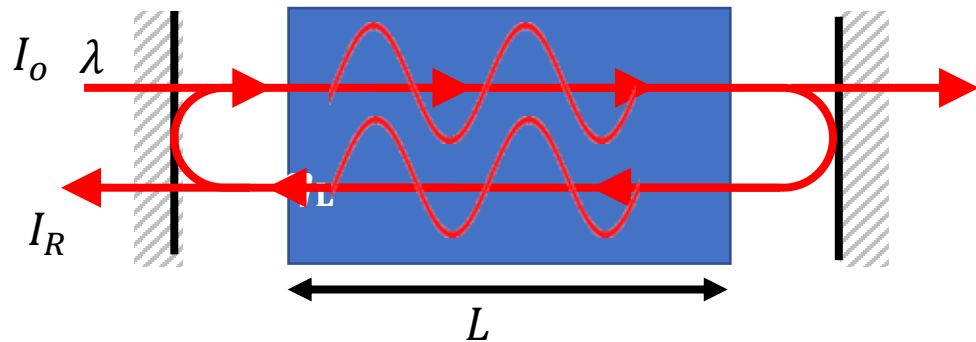
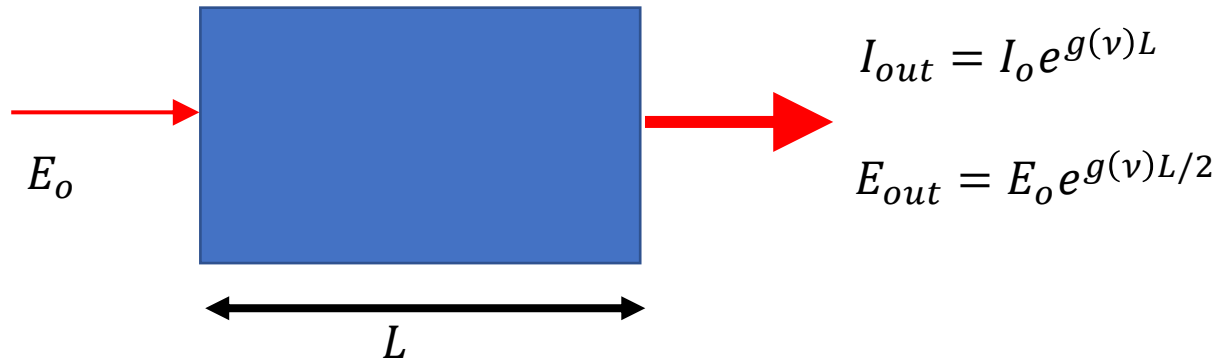
$$\nu_n = \frac{c n}{2[\eta L + (d - L)\eta_c]}$$

Modos longitudinales + medio amplificador



Nota: para agregar perdidas por scattering y absorción, multiplicaría además por

$$e^{-\alpha(\nu)L/2}$$



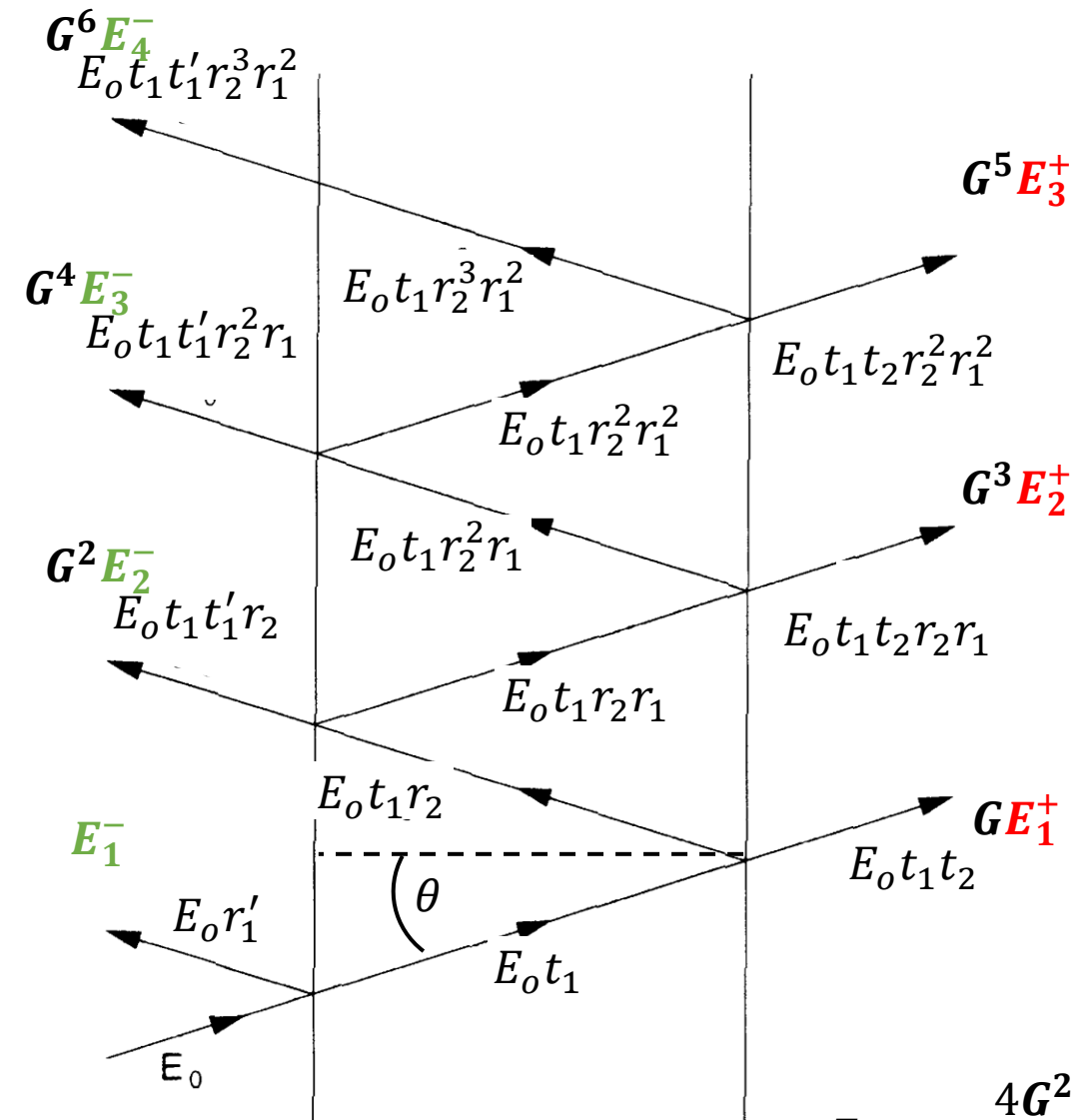
En cada pasaje agrego el término de ganancia

$$G = e^{g(\nu)L/2}$$

y/o de pérdida

$$V = e^{-\alpha(\nu)L/2}$$

Modos longitudinales + medio amplificador



$$E^+ = E_1^+ + E_2^+ + E_3^+ + E_4^+ \dots$$

Sin ganancia

$$E^+ = E_0 t_1 t_2 \{1 + r_1 r_2 e^{i\delta} + r_1^2 r_2^2 e^{i2\delta} + \dots\} e^{i(k.r - \omega t)}$$

Con ganancia

$$E^+ = E_0 t_1 t_2 G \{1 + G^2 r_1 r_2 e^{i\delta} + G^4 r_1^2 r_2^2 e^{i2\delta} + \dots\} e^{i(k.r - \omega t)}$$

$$E^+ = E_0 t_1 t_2 e^{i(k.r - \omega t)} \frac{G}{1 - G^2 r_1 r_2 e^{i\delta}}$$

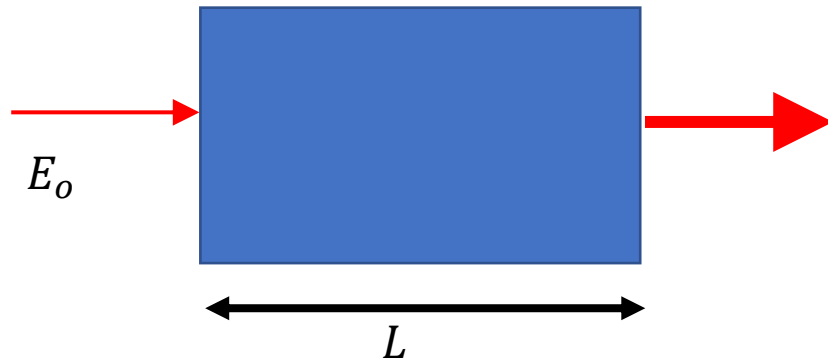
$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_0^2 |t_1 t_2|^2 G^2}{|1 - r_1 r_2 G^2 e^{i\delta}|^2}$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_0^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - G^2 |r_1| |r_2|)^2} \frac{G^2}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

$$F = \frac{4G^2 |r_1| |r_2|}{(1 - G^2 |r_1| |r_2|)^2}$$

$$G^2 |r_1| |r_2| < 1$$

Modos longitudinales + medio amplificador

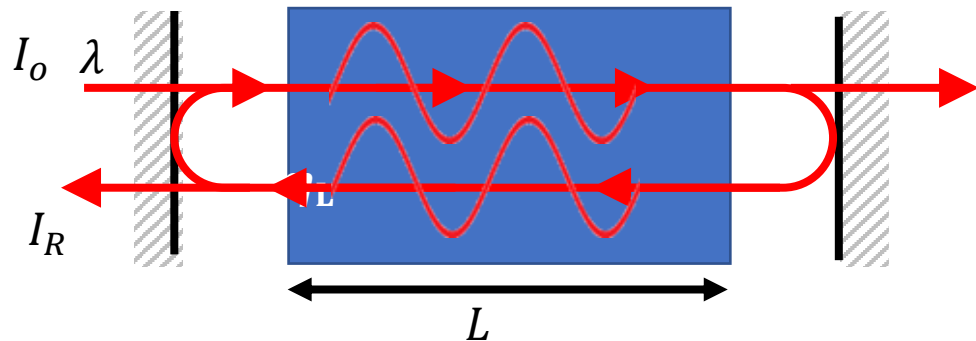


$$I_{out} = I_o e^{g(\nu)L}$$

$$E_{out} = E_o e^{g(\nu)L/2}$$

Nota: para agregar perdidas por scattering y absorción, multiplicaría además por

$$e^{-\alpha(\nu)L/2}$$



$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2}{(1 - G^2 |r_1| |r_2|)^2} \frac{G^2}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

$$I_t = |E^+|^2 = \frac{E_o^2 |t_1 t_2|^2 G^2}{|1 - r_1 r_2 G^2 e^{i\delta}|^2}$$

Condición umbral $G^2 |r_1| |r_2| V^2 \sim 1$

$$g_{th}(\nu) = -\frac{1}{L} \ln(|r_1| |r_2|) + \alpha$$

Resonador laser: Si $G^2 |r_1| |r_2| V^2 \sim 1$ cualquier pequeña emisión en la cavidad (emisión espontánea) va a generar una onda estacionaria con mucha potencia intracavidad (a pesar de que no haya un haz incidiendo a esa frecuencia)

Modos longitudinales + medio amplificador



Ganancia de pequeña señal : $I \sim 0 \rightarrow G_o^2 = G^2(I \sim 0) = e^{g_o L}$ (puedo medirla tapando un espejo)

Condición umbral: ganancia de round trip iguala a las pérdidas

Por encima del umbral:

Si $G_o^2 |r_1| |r_2| V^2 > 1$ la intensidad intracavidad crece vuelta tras vuelta: la ganancia supera a las pérdidas.

$$G_{th}^2 = \frac{1}{|r_1| |r_2| V^2} = e^{g_{th} L} \rightarrow g_{th} = -\frac{1}{L} \ln(|r_1| |r_2|) + \alpha$$

los modos longitudinales resonantes con $G_o^2 > G_{th}^2$ ($g_o > g_{th}$) oscilan en la cavidad y la intensidad intracavidad crece

Saturación de la ganancia

El crecimiento no puede continuar indefinidamente. Cuando la intensidad intracavidad aumenta y se vuelve comparable con la intensidad de saturación $I \sim I_{sat}$, la emisión estimulada reduce la inversión de población, y la ganancia del medio disminuye por saturación

Recordemos que podemos modelar esa saturación como: $g(I) = \frac{g_o}{1 + I/I_{sat}} \rightarrow G^2 = e^{g(I)L} = \exp \left[\frac{g_o L}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \right]$

Estado estacionario

En estado estacionario, la **ganancia saturada** baja hasta compensar exactamente las pérdidas:

$$G^2(I_{SS}) = G_{th}^2$$

es decir:

$$\exp\left[\frac{g_0 L}{1 + I_{SS}/I_{sat}}\right] = G_{th}^2$$

Despejando:

$$I_{SS} = I_{sat} \left[\frac{g_0 L}{\ln(G_{th}^2)} - 1 \right]$$

$$G_{th}^2 = \frac{1}{|r_1||r_2|V^2} = e^{g_{th}L}$$

$$\ln(G_{th}^2) = g_{th}L$$

$$I_{SS} = I_{sat} \left[\frac{g_0}{g_{th}} - 1 \right]$$

$$g_0 > g_{th} \Rightarrow I_{SS} > 0$$

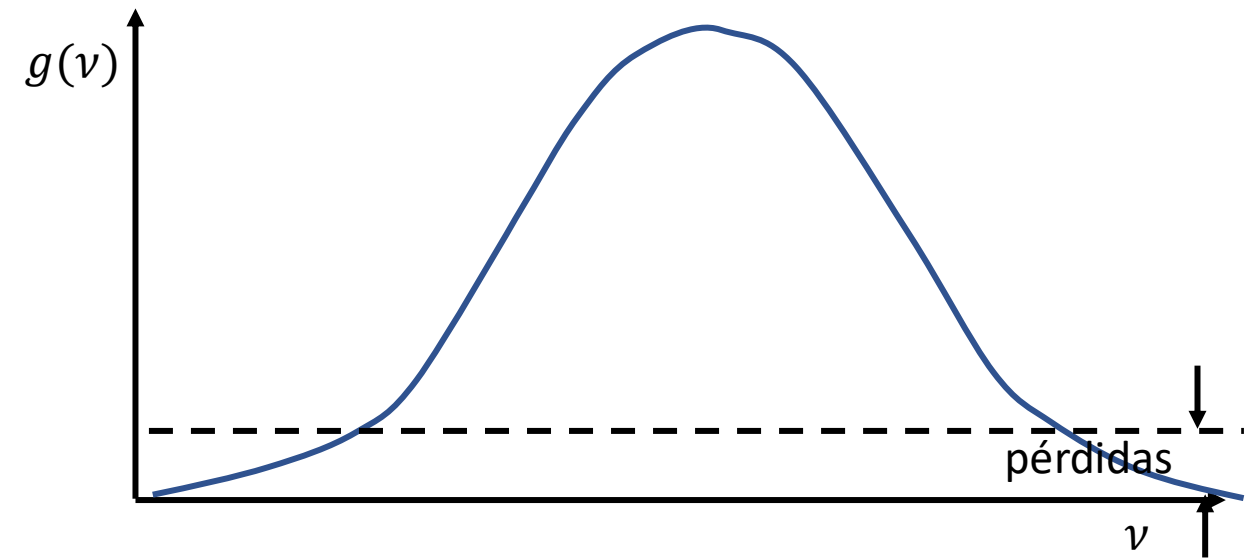
Condiciones para que los modos de la cavidad laseen



1) La ganancia en el amplificador debe exceder a las pérdidas

$$g(\nu) > g_{th}$$

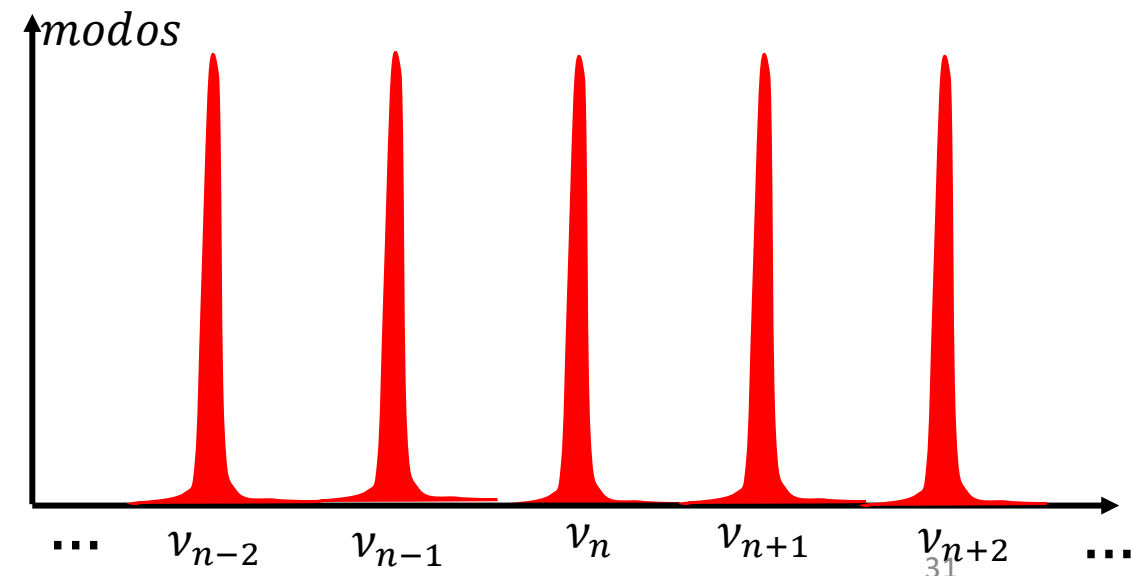
$$g_{th}(\nu) = -\frac{1}{L} \ln(|r_1||r_2|) + \alpha$$



2) La frecuencia específica es un modo de la cavidad

$$\nu_n = \frac{c n}{2d\eta}$$

$$\nu_n = \frac{c n}{2[\eta L + (d - L)\eta_c]}$$



Condiciones para que los modos de la cavidad laseen



Ensanchamiento homogéneo:

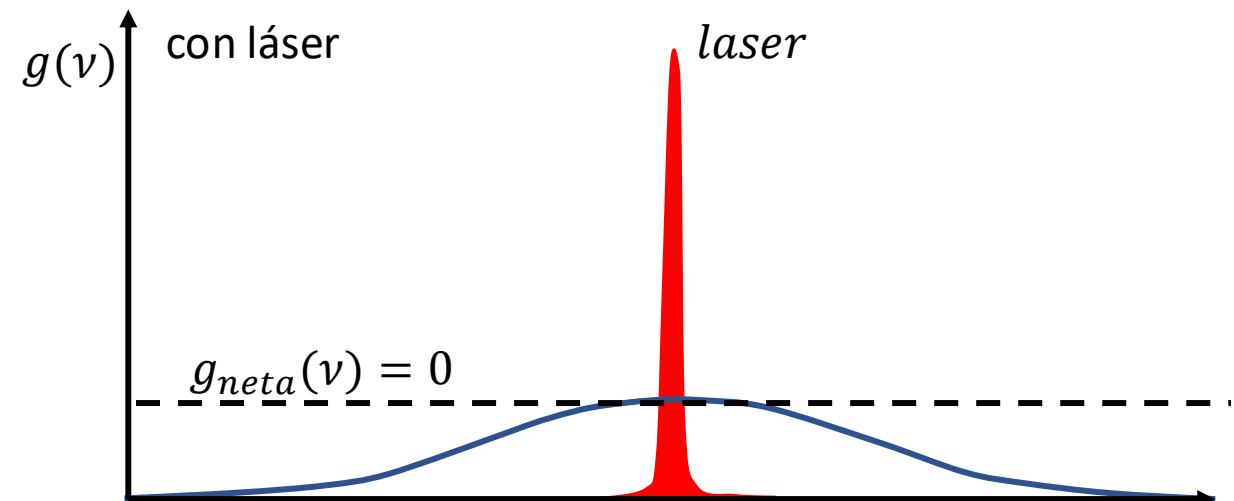
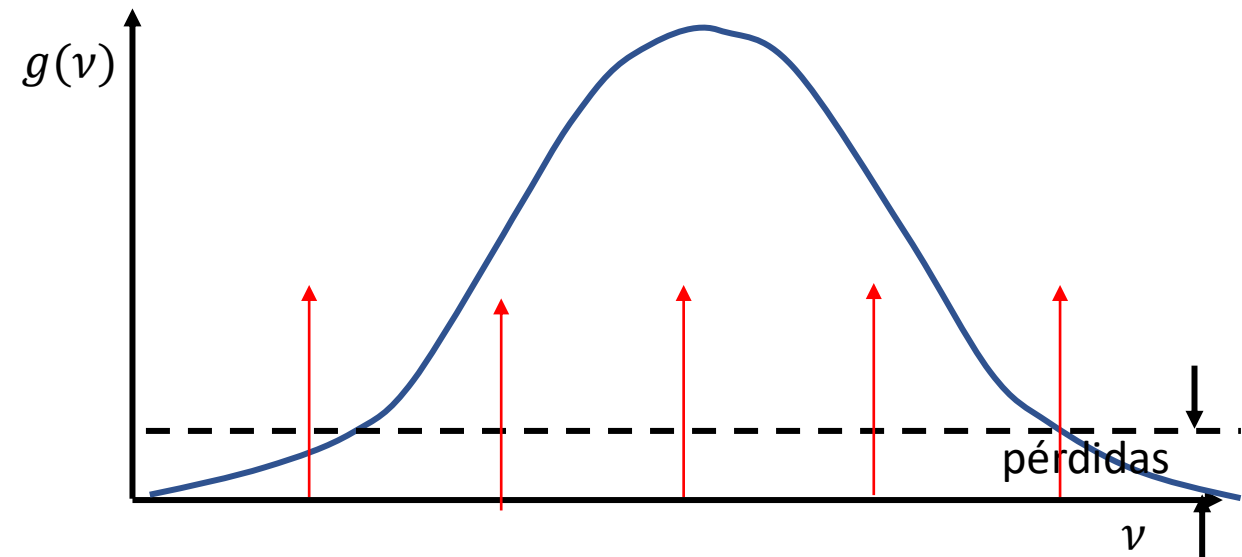
Toda la población N_u contribuye igual a la ganancia

El modo que tenga mayor ganancia es el que primero se desarrolla y se lleva toda la población del nivel superior reduciendo toda la ganancia

$$g(\nu_q) > g_{th}$$

En el estado estacionario, el modo que está oscilando ajusta la ganancia saturada hasta el valor de umbral:

$$g(\nu_{laser}, I_{ss}) = g_{th}$$



Condiciones para que los modos de la cavidad laseen



Ensanchamiento inhomogéneo:

- El ancho homogéneo $\Delta\nu^H$ de cada grupo de átomos o subpoblación resonante es mucho menor que el ancho Doppler $\Delta\nu^D$ y que la separación entre modos $\Delta\nu$

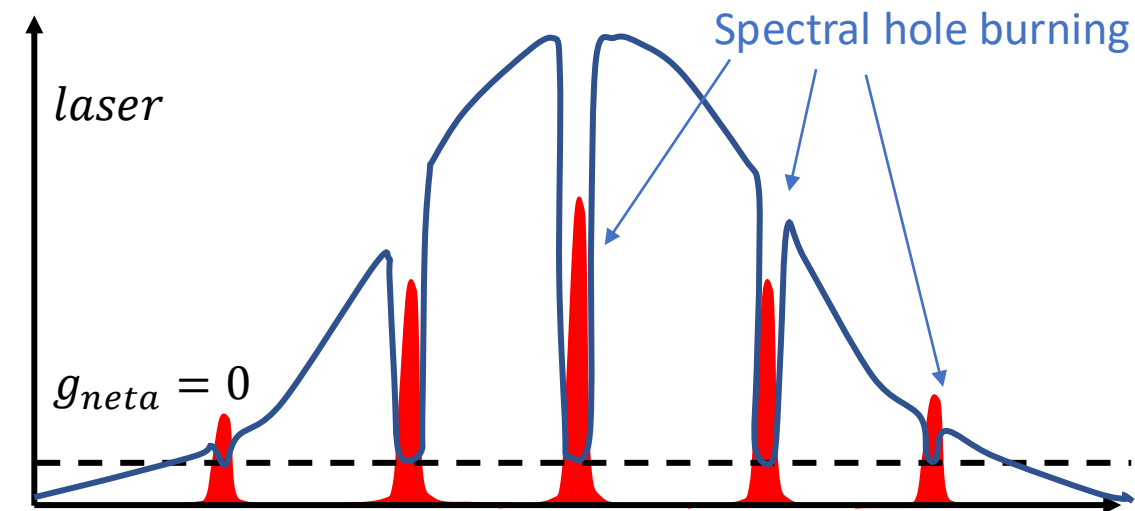
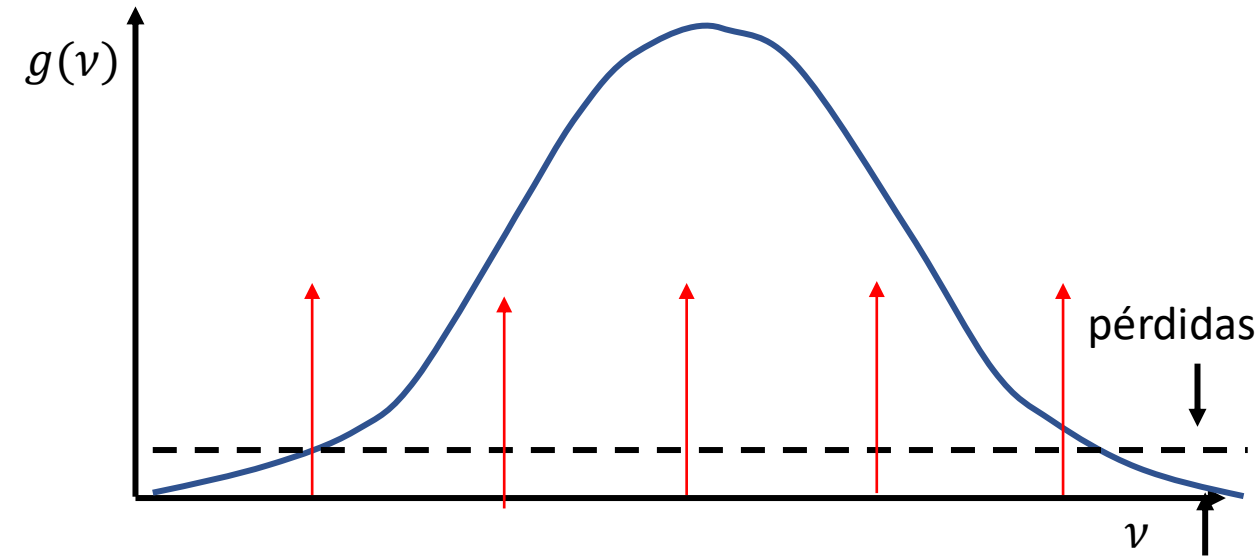
$$\Delta\nu^H < \Delta\nu^D, \quad \Delta\nu^H < \Delta\nu$$

- toda la población $N_u(\nu)$ contribuye a distintas regiones del espectro de ganancia

- Varios modos pueden alcanzar la condición $g_{neta}(\nu_q) = g(\nu_q) - g_{th} = 0$

- Spectral hole burning si $\Delta\nu^H < \Delta\nu^D$

(en otro caso es parecido al homogéneo)



GaAs

$$\lambda_o = 800 \text{ nm}$$

$$d = 100 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\eta = 3.6$$

$$n = \frac{2 d \eta}{\lambda_o} = 900$$

Longitudes de onda permitidas $\lambda_n = \frac{2 d \eta}{n}$

$$n = 899 \rightarrow \lambda = 800.8898 \dots \text{ nm}$$

$$n = 900 \rightarrow \lambda = 800 \dots \text{ nm}$$

$$n = 901 \rightarrow \lambda = 799.1121 \dots \text{ nm}$$

Los modos longitudinales permitidos por la cavidad que caen dentro del perfil de ganancia y cumplen $g(\nu_n) > g_{th}$ pueden oscilar.

He-Ne

$$\lambda_o = 632.8 \text{ nm} \rightarrow \nu_o = \frac{c}{\lambda} = 474083.43 \text{ GHz} = 474.08343 \text{ THz}$$

$$d = 0.25 \text{ m}$$

$$\lambda_n = \frac{2d}{n} \rightarrow n = \frac{2d}{\lambda_o} \sim 790139$$

- Cuantos modos longitudinales operan en la cavidad si $g(\nu) > g_{th}$ ocurre en $\Delta\nu_{FWHM}(\Delta\nu^D = 1.5 \text{ GHz})$ de la ganancia

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d\eta}$$

$$\lambda_n = \frac{2d}{n}$$

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c n}{2d}$$

$$\eta \sim 1,$$

$$\Delta\nu = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2 \times 0.25 \text{ m}} = 0.6 \text{ GHz}$$

$$n = 790138 \rightarrow \lambda = 632.79925 \dots \text{ nm}, \quad \nu = 474.0828 \text{ THz}$$

$$n = 790139 \rightarrow \lambda = 632.80005 \dots \text{ nm}, \quad \nu = 474.0834 \text{ THz}$$

$$n = 790140 \rightarrow \lambda = 632.79925 \dots \text{ nm}, \quad \nu = 474.0840 \text{ THz}$$

$$\frac{\Delta\nu^D}{\Delta\nu} = \frac{1.5 \text{ GHz}}{0.6 \text{ GHz}} \sim 2.5 \rightarrow \text{Entren 3 modos (dos espaciados)}$$

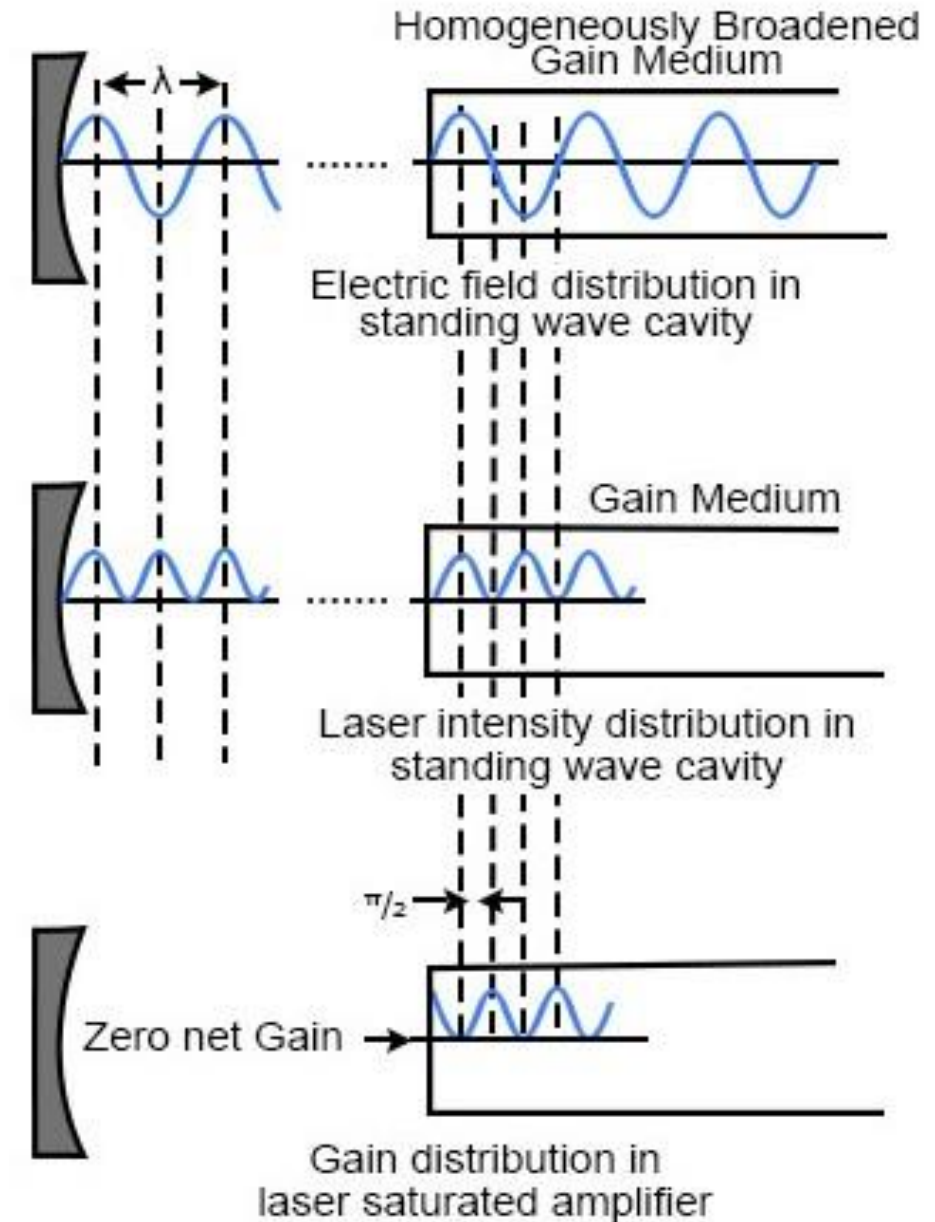
$$\Delta\lambda (\dots 39 - \dots 40) \sim \frac{1}{1250} \text{ nm}$$

Spatial hole burning

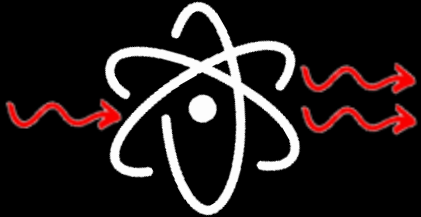


Laser monomodo
(medio de ganancia con ensanchamiento homogéneo)

Hay regiones de la ganancia no aprovechadas
(si hubiera otros modos puede ser aprovechado, ej transversales o longitudinales desfasados)



Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

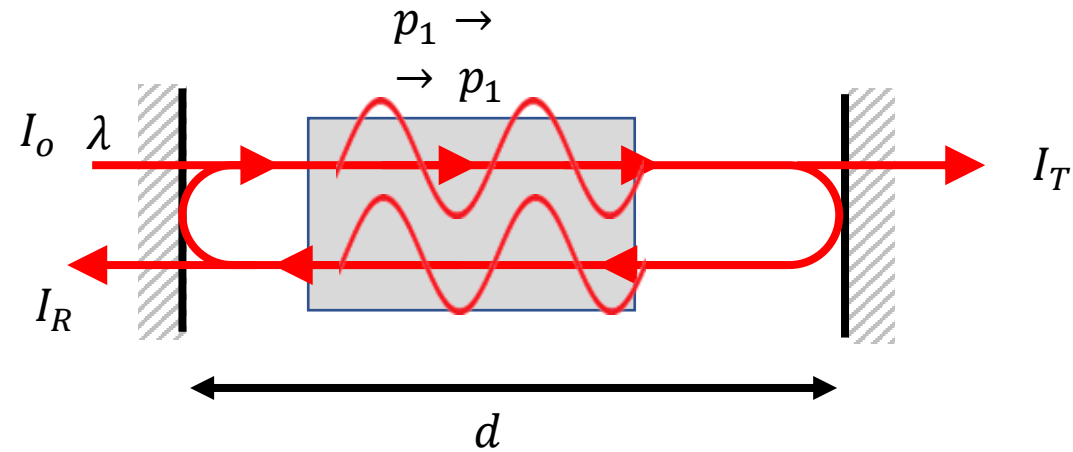
- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

2^{do} cuatrimestre 2021

Modos transversales en cavidades



Clase pasada

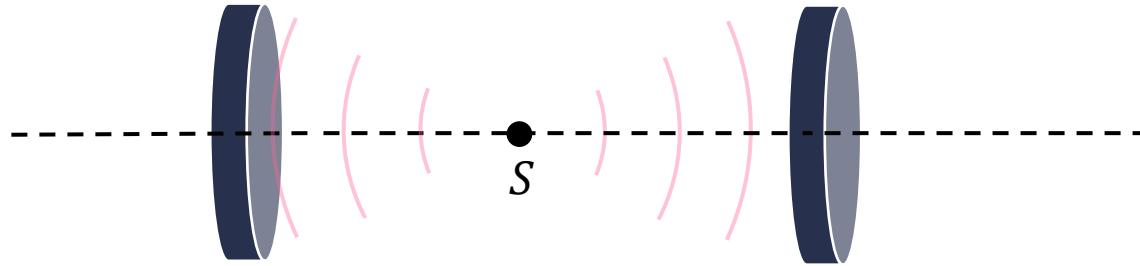
- Onda plana de extensión infinita
- Espejos de extensión infinita

bordes de espejos, del medio activo, ni el diámetro del propio haz → Difracción
Cualquier apertura produce pérdidas por difracción

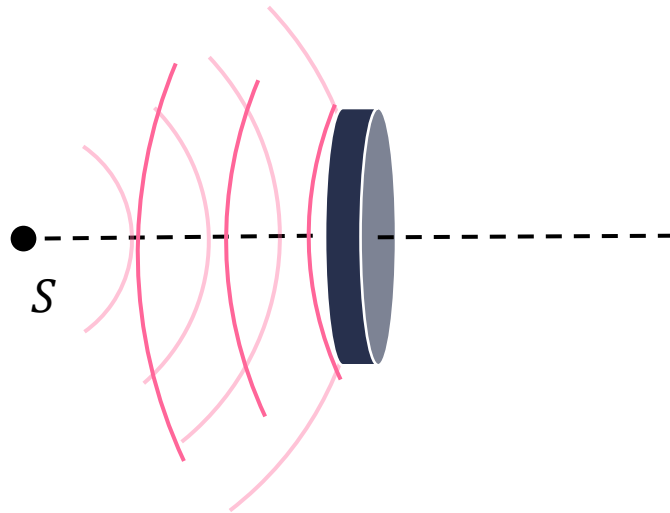


- Suponemos inicialmente espejos planos paralelos de sección circular
- El haz se genera en el interior de la cavidad

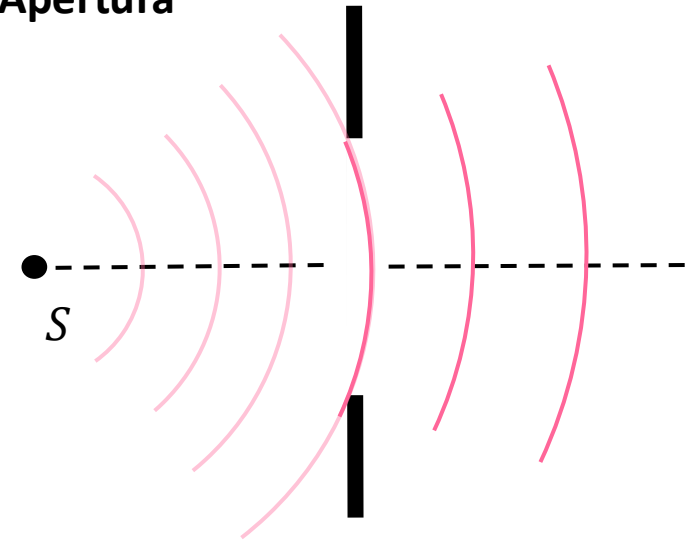
Modos transversales en cavidades



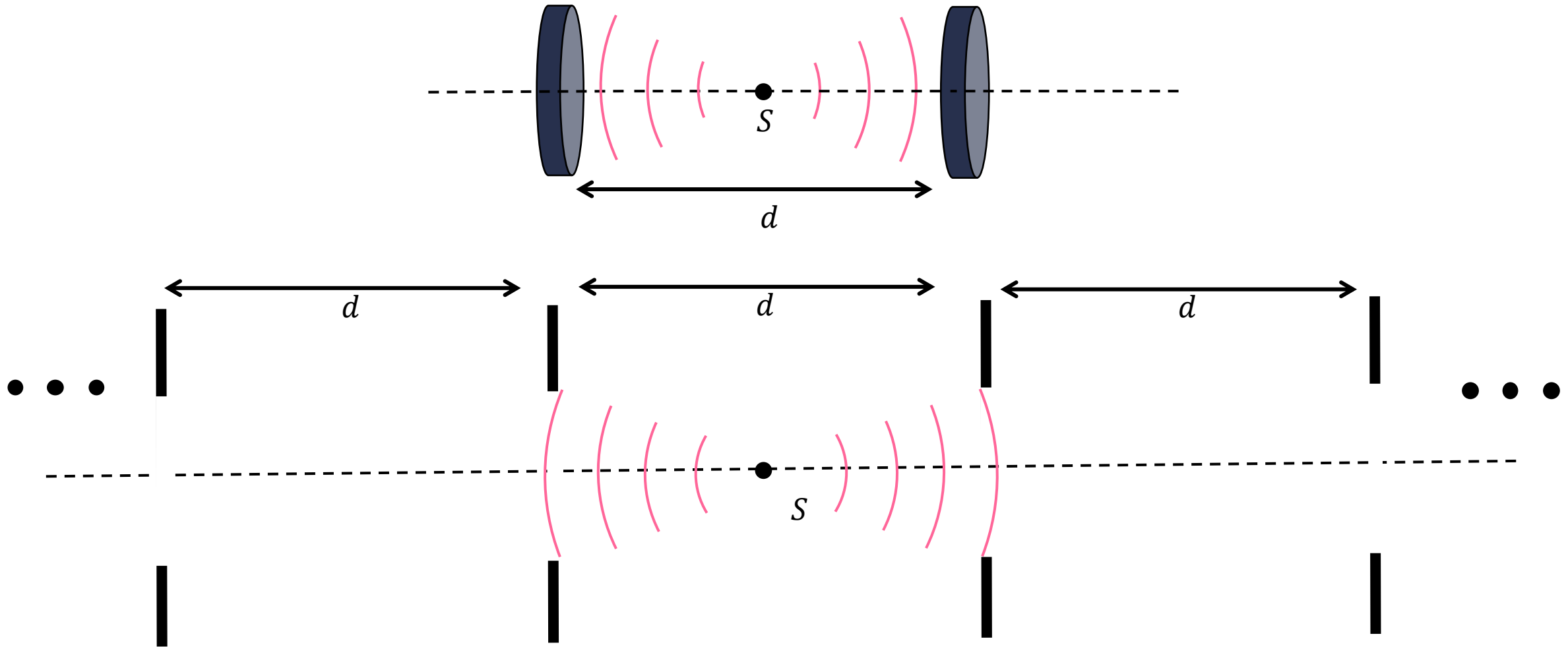
Espejo



Apertura



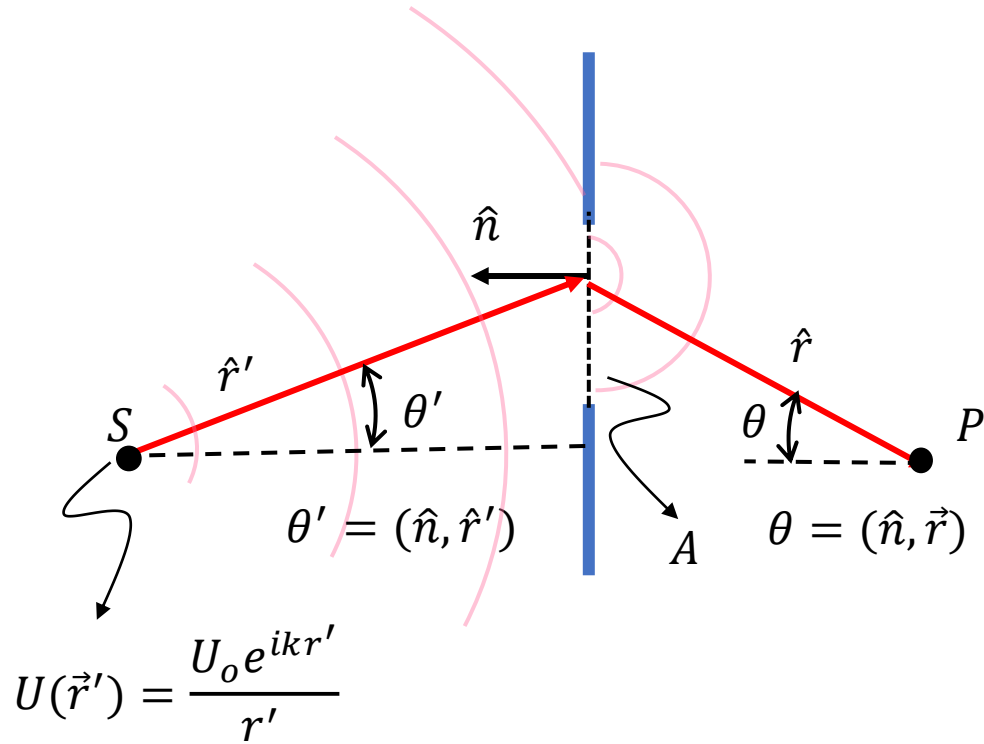
Modos transversales en cavidades



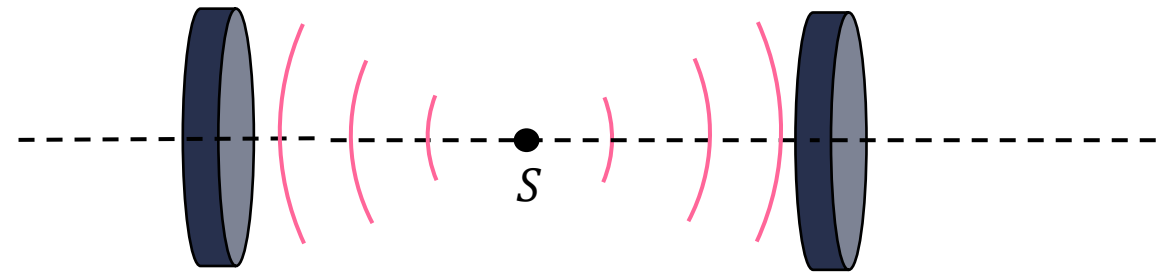
Modos transversales en cavidades



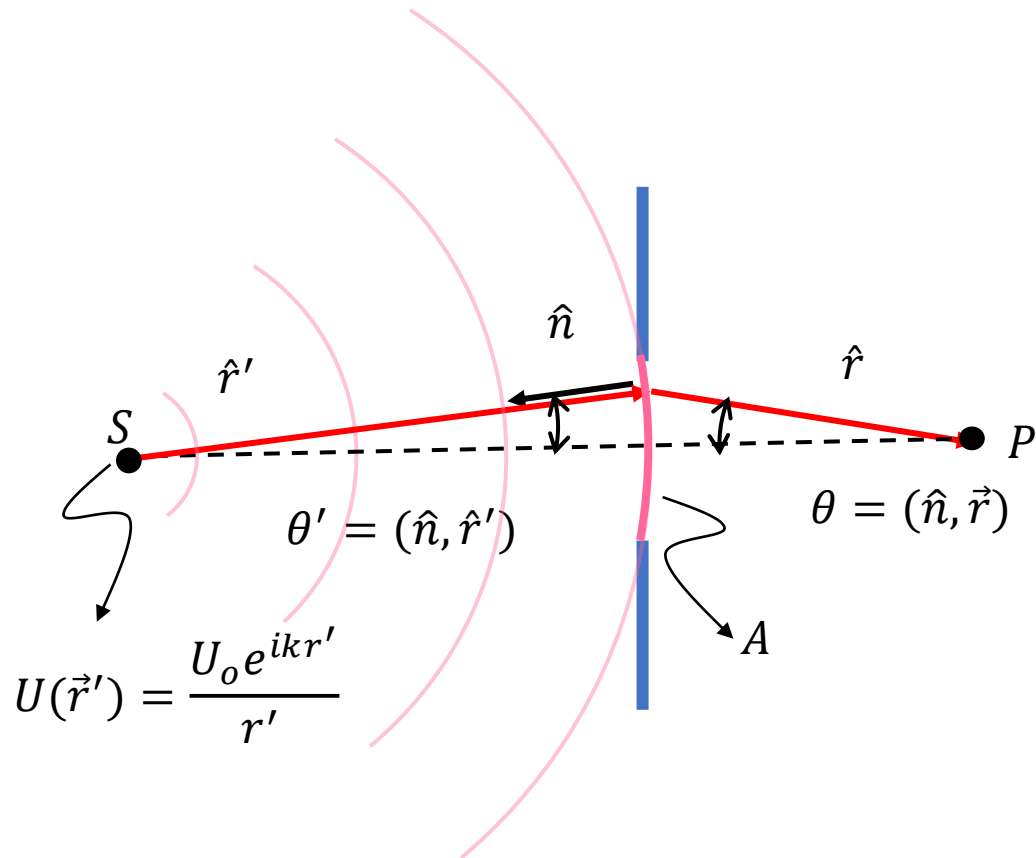
Integral de Fresnel – Kirchhoff



$$U_P(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_o \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) - \cos(\hat{n}, \hat{r}')] dA$$



Integral de Fresnel – Kirchhoff



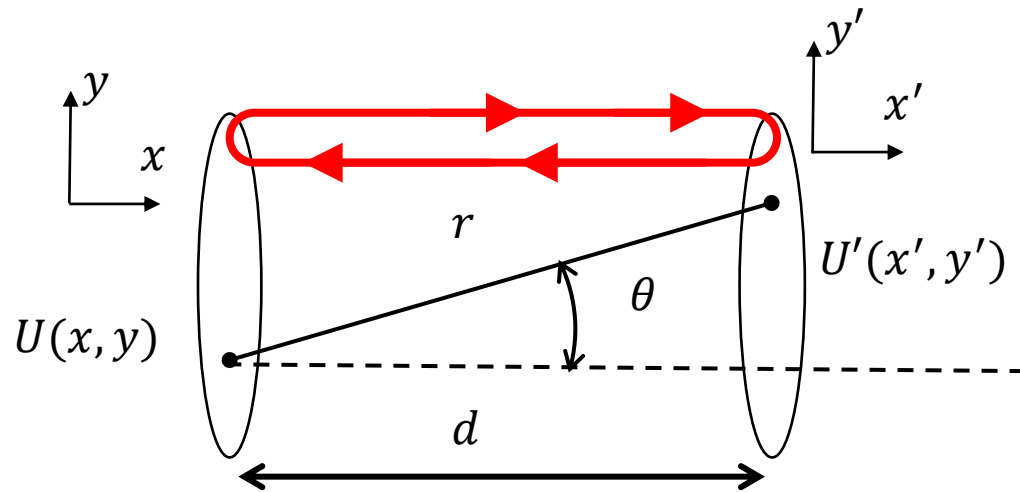
$$U_P(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_o \frac{e^{i k r'}}{r'} \frac{e^{i k r}}{r} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) - \cos(\hat{n}, \hat{r}')] dA$$

A : casquete esférico

$$\cos(\hat{n}, \hat{r}') = -1$$

$$U_o \frac{e^{i k r'}}{r'} = U_A$$

$$U_P(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_A \frac{e^{i k r}}{r} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dA$$



$$r = (d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

$U'(x', y')$ está determinada por todas las ondas generadas en (x, y)

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1] dx dy$$

Solución estacionaria $U(x, y) \rightarrow U'(x', y')$ sin cambiar la forma de la distribución de amplitud

$$U'(x', y') = \gamma U(x', y')$$

γ puede representar

- pérdidas por difracción $\gamma < 1 \rightarrow$ debería incluirse en el cálculo de g_{th}
- Ganancia $\gamma > 1$

$$U'(x', y') = \gamma U(x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1] dx dy$$

$$r = (d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

Existen infinitas soluciones de esta ecuación U_n con autovalores γ_n

$$\gamma_n = |\gamma_n| e^{i\phi_n} \rightarrow \text{atenuación compleja del campo}$$

Pérdida de energía por pasaje: $1 - |\gamma_n|^2$ ($|\gamma_n|^2$ factor de atenuación para la energía)

Kernel de la ecuación : $K(x, y, x', y') = \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1]$

Kernel de la ecuación :

$$K(x, y, x', y') = \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1]$$

$$K(x, y, x', y') = \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{d}{r} + 1 \right]$$

$$r = (d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

Difracción de Fresnel $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 \ll d^2$ (aproximación paraxial)

- En denominador $r \sim d$
- En la exponencial compleja: la función varía muy rápido por $k = 2\pi/\lambda$ hacemos Taylor orden 2

$$r = (d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{1}{2}} = d \left(1 + \frac{(x' - x)^2}{d^2} + \frac{(y' - y)^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx d \left(1 + \frac{(x' - x)^2}{2d^2} + \frac{(y' - y)^2}{2d^2} \right)$$

Usamos:

$$(1 + x)^{1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1] dx dy$$

$$r \approx d \left(1 + \frac{(x' - x)^2}{2d^2} + \frac{(y' - y)^2}{2d^2} \right)$$

$$K(x, y, x', y') = \frac{e^{ikr}}{r} [\cos(\theta) + 1] = \frac{e^{ikr}}{\underset{\textcolor{red}{r}}{r}} \left[\frac{d}{\textcolor{red}{r}} + 1 \right] \quad \textcolor{red}{r} \sim d$$

$$K(x, y, x', y') \sim \frac{e^{ikr}}{d} \left[\frac{d}{d} + 1 \right] \sim \frac{2}{d} e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d} ((x' - x)^2 + (y' - y)^2)}$$

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{2\pi d} e^{ikd} \iint_A U(x, y) e^{\frac{ik}{2d} ((x' - x)^2 + (y' - y)^2)} dx dy$$

Difracción de Fraunhofer

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{2\pi d} e^{ikd} \iint_A U(x, y) e^{\frac{ik}{2d} ((x'-x)^2 + (y'-y)^2)} dx dy$$

$$((x' - x)^2 + (y' - y)^2) = x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy'$$

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{2\pi d} e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d} (x'^2 + y'^2)} \iint_A U(x, y) e^{\frac{ik}{2d} (x^2 + y^2)} e^{-\frac{ik}{d} (xx' + yy')} dx dy$$

$$e^{\frac{ik}{2d} (x^2 + y^2)} \rightarrow 1, \quad d \gg \frac{k}{2} (x^2 + y^2) \sim \frac{Ak}{2} \rightarrow$$

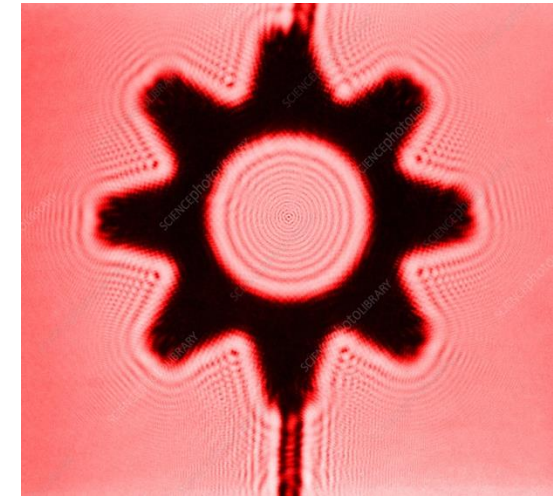
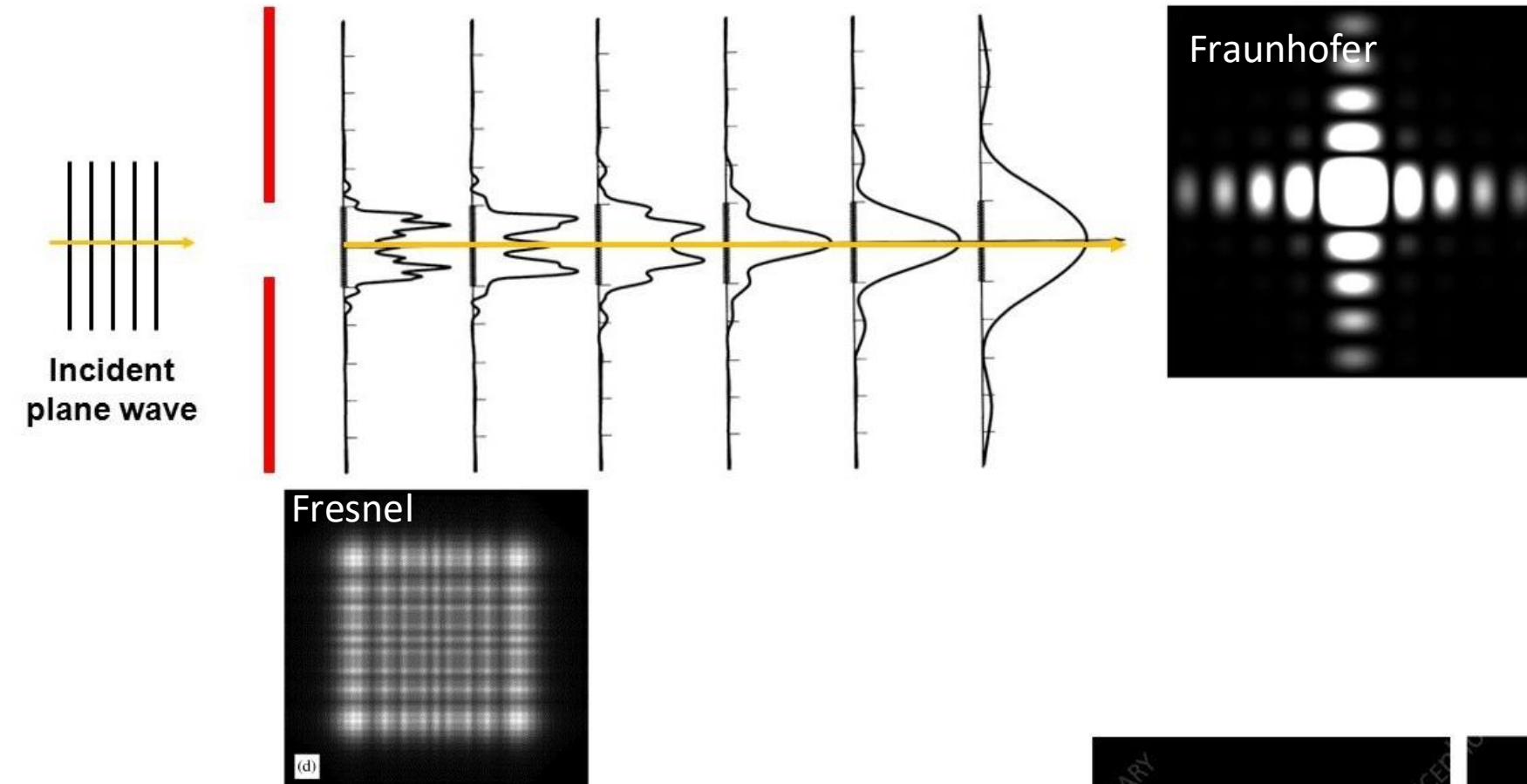
$$U'(x', y') = -\frac{ik}{2\pi d} e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d} (x'^2 + y'^2)} \iint_A U(x, y) e^{-i2\pi \frac{1}{\lambda d} (xx' + yy')} dx dy \longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda d}\{U(x, y)\} = F\left\{\frac{x'}{\lambda d}, \frac{y'}{\lambda d}\right\}$$

Número de Fresnell

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda d}$$

$N_F \ll 1$ difracción Fraunhofer

Aproximaciones de Fourier y Fraunhofer



$N_F \gtrsim 1 \rightarrow$ régimen de Fresnel (campo cercano)
 $N_F \ll 1 \rightarrow$ régimen de Fraunhofer (campo lejano)



Modos transversales en cavidades

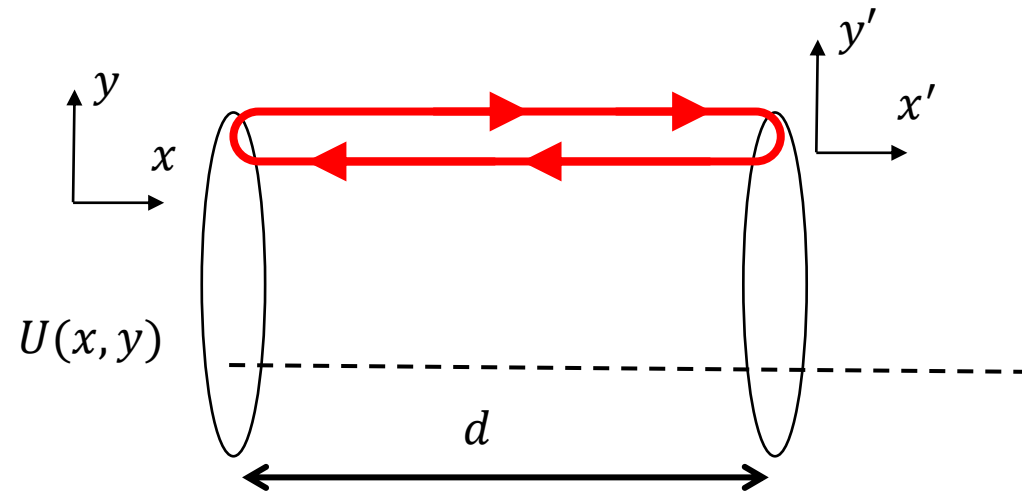
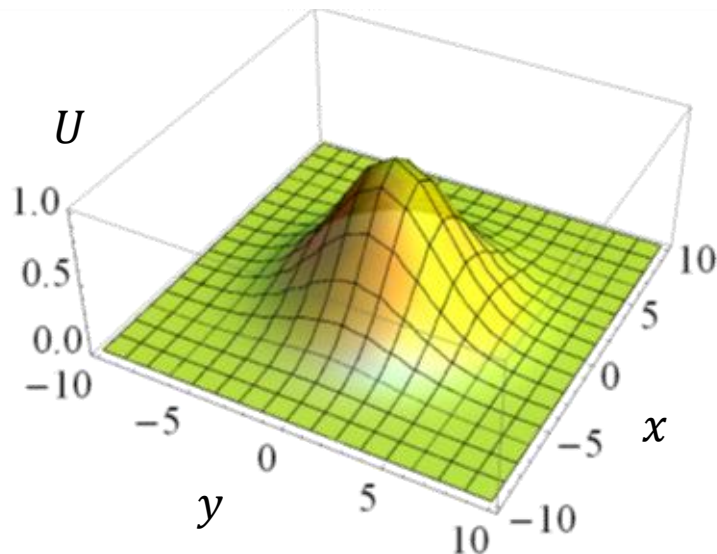


$$U'(x', y') = \gamma U(x', y') = -\frac{ik}{2\pi d} e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x'^2 + y'^2)} \iint_A U(x, y) e^{-i2\pi \frac{1}{\lambda d}(xx' + yy')} dx dy$$

Una función que satisface ser proporcional a su transformada

Transformada de Fourier

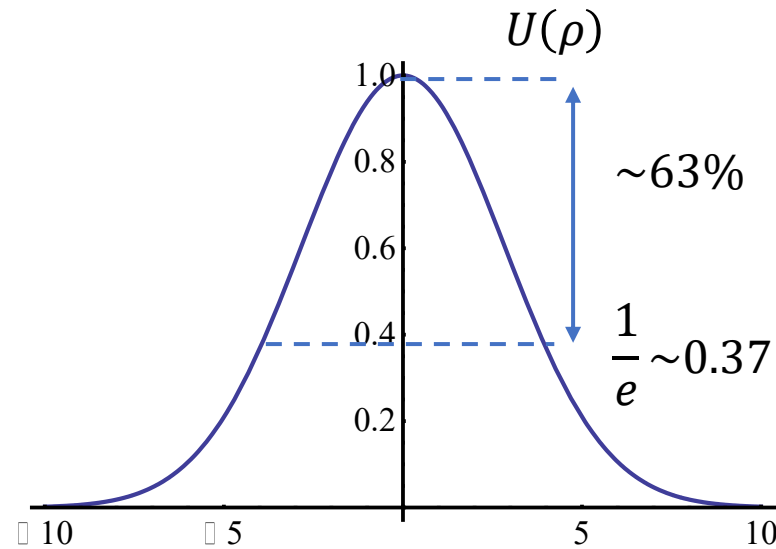
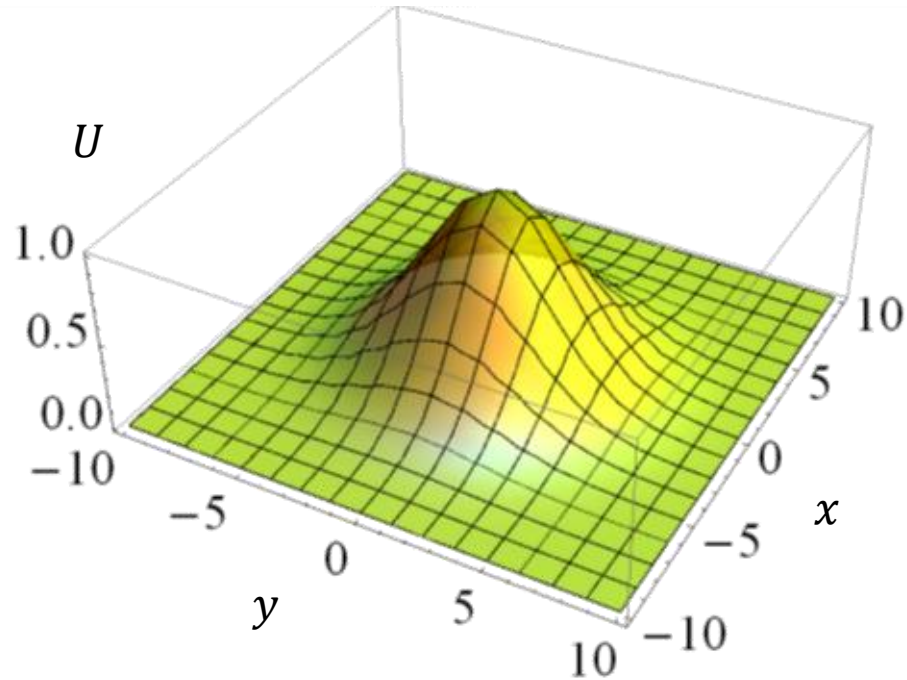
$$U(x, y) = A e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}} = A e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{\omega^2}}$$



Modos transversales en cavidades



$$U(x, y) = U(\rho) = Ae^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}} = Ae^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2}}$$



$$\Delta x_{1/e} = 2\omega$$

$$I(\rho) = |U(\rho)|^2 = I_0 e^{-2\frac{\rho^2}{\omega^2}}$$

$$\Delta x_{1/e^2} = 2\omega$$

$$\frac{1}{e^2} \sim 0.135 \rightarrow \sim 86\%$$

$$P = \iint |U(x, y)|^2 dA \Rightarrow I(\rho) = \frac{2P}{\pi\omega^2} e^{-2\frac{\rho^2}{\omega^2}}$$

x

Modos transversales en cavidades



Soluciones generales con simetría x-y: todas cumplen que son proporcionales a su transformada

$$U_{pq}(x, y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2}}$$

Modos Hermite-Gauss

$U_{pq}(x, y)$ distribución de campo eléctrico

TEM_{pq} modo transverso electromagnético pq

$TEM_{npq} \rightarrow n$ podría indicar a que modo longitudinal corresponde, sin embargo vimos que n es muy muy grande

Polinomios de Hermite

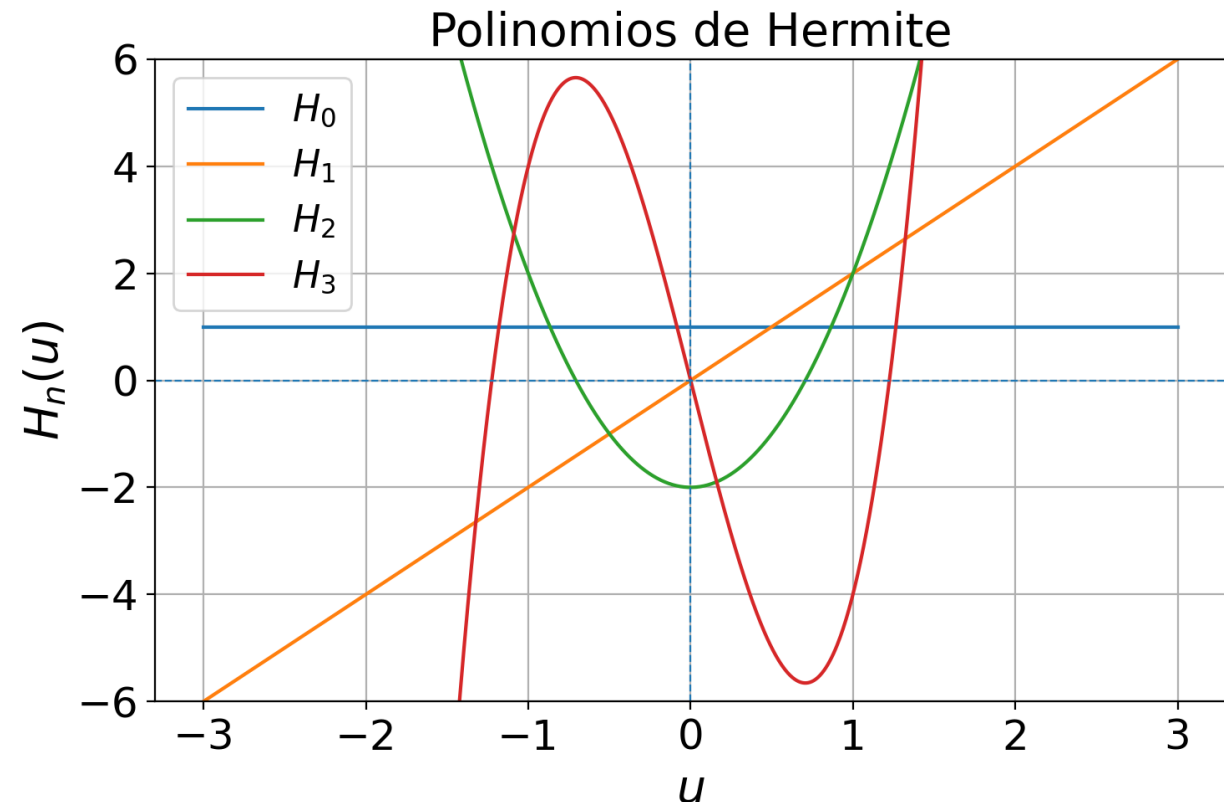
$$H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

$$H_2(u) = 2(2u^2 - 1)$$

$$H_m(u) = (-1)^m e^{u^2} \frac{d^m(e^{-u^2})}{du^m}$$

$H_m(u)$ tiene m raíces



Modos transversales en cavidades



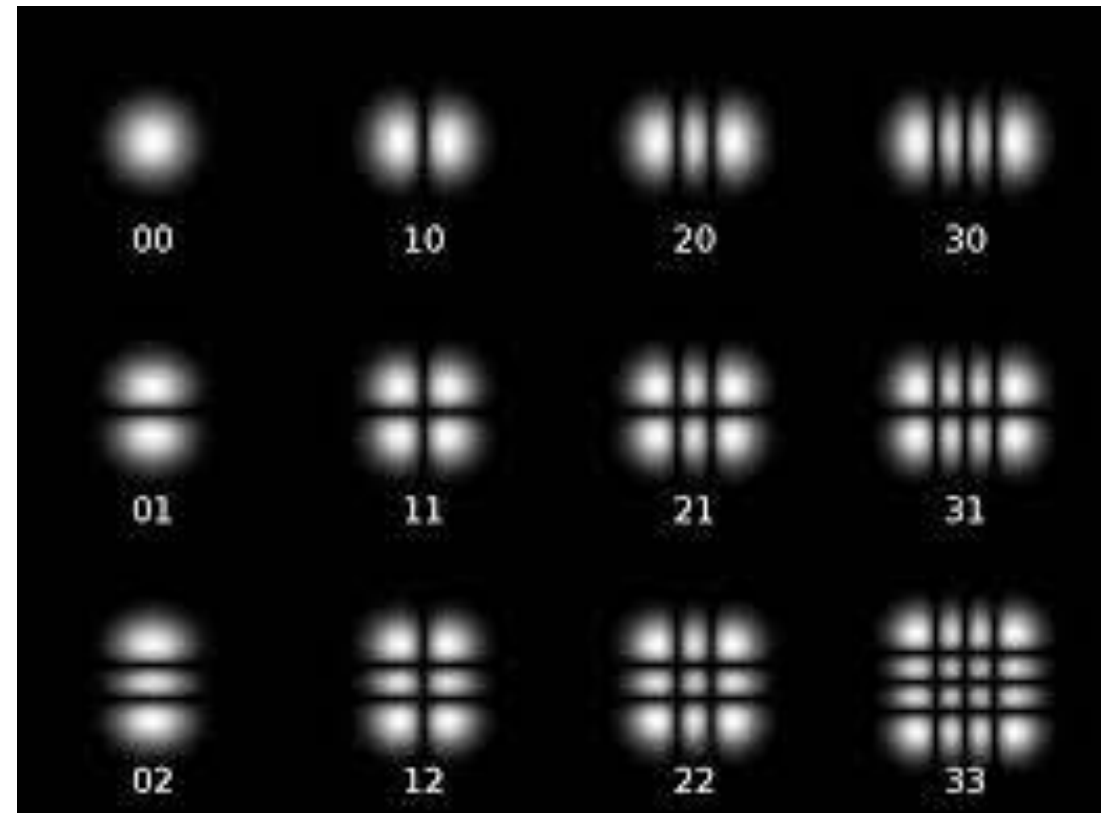
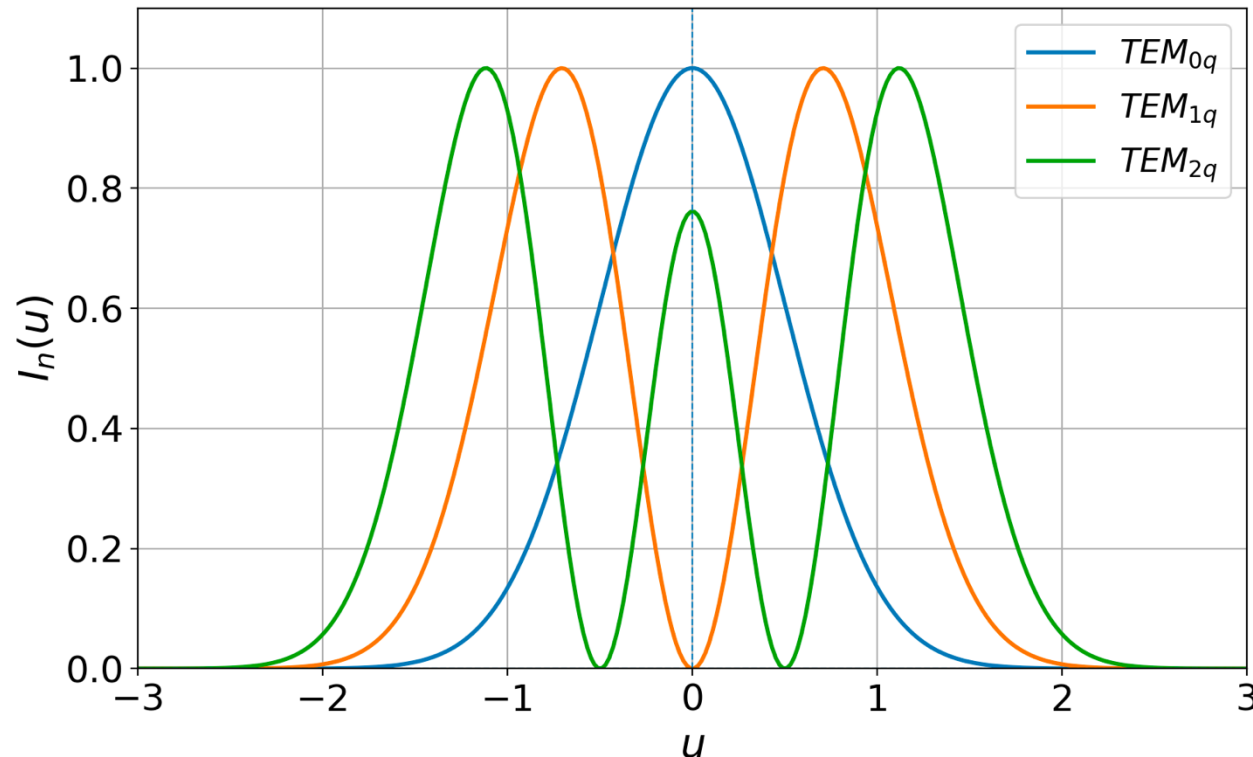
$$U_{pq}(x, y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2}}$$

$$I_{pq}(x, y) \propto |U_{pq}(x, y)|^2$$

Este tipo de modos aparecen si se rompe la simetría de la cavidad inhibiendo la formación del modo TEM_{00}

- Ventana en Brewster
- Espejo ligeramente desalineado
- Astigmatismo, pérdidas asimétricas, aperturas no circulares

Intensidad de modos Hermite-Gauss



Modos transversales en cavidades



Soluciones generales con simetría cilíndrica

$$I_{pl}(\rho, \varphi) = I_0 \rho^l [L_p^l(\rho)]^2 \cos^2(l\varphi) e^{-\rho}$$

Modos Laguerre-Gauss

$$\rho = 2r^2/\omega^2$$

$$L_p^l(\rho)$$

Polinomio de Laguerre generalizados de orden p e índice l

$$L_p^l(\rho) = \frac{\rho^{-l} e^{\rho}}{p!} \frac{d^p (\rho^{p+l} e^{-\rho})}{d\rho^p}$$

$$L_0^l(\rho) = 1$$

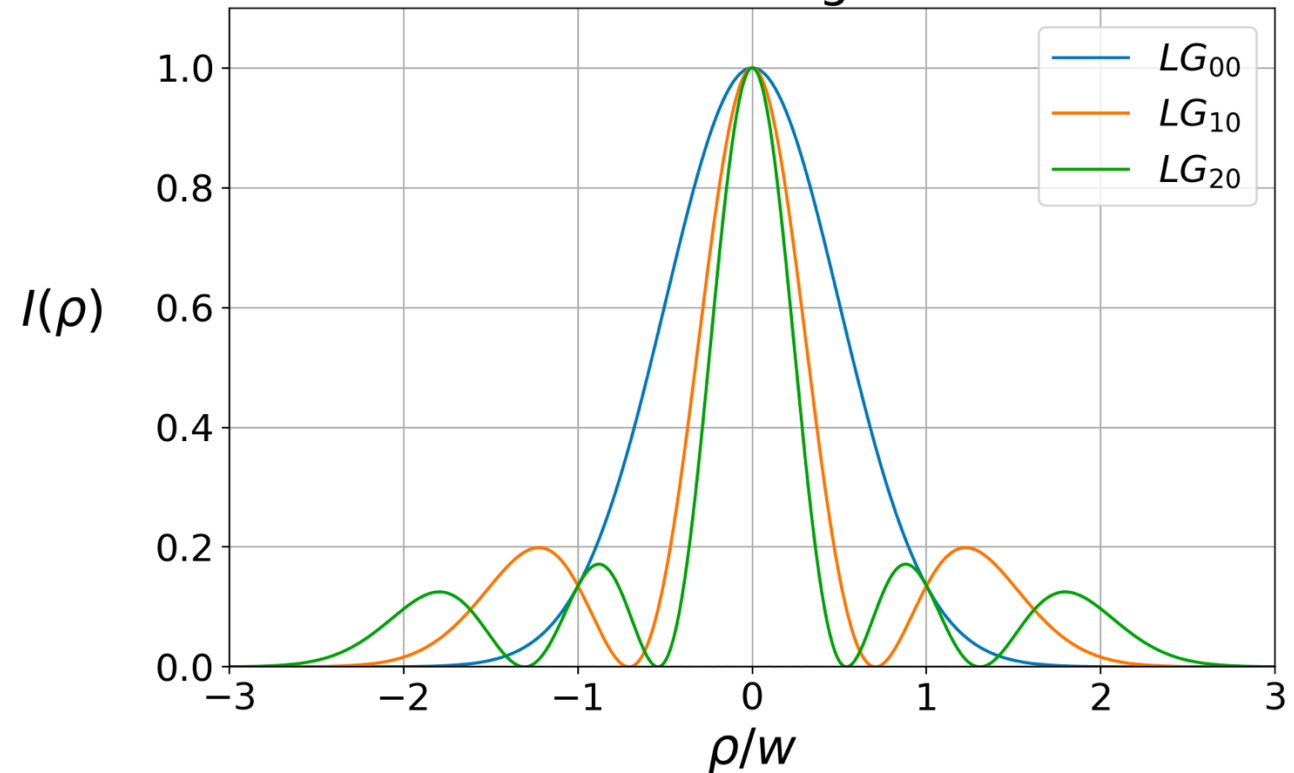
$$L_1^0(\rho) = 1 - \rho \quad L_1^l(\rho) = 1 + l - \rho$$

$$L_2^0(\rho) = 1 - 2\rho + \frac{1}{2}\rho^2$$

$$L_p^0(\rho) = L_p(\rho)$$

Prof. MG Capeluto

Perfiles radiales Laguerre-Gauss



Modos transversales en cavidades



Soluciones generales con simetría cilíndrica

$$I_{pl}(\rho, \varphi) = I_o \rho^l [L_p^l(\rho)]^2 \cos^2(l\varphi) e^{-\rho}$$

$$\rho = 2r^2/\omega^2$$

$L_p^l(\rho)$ Polinomio de Laguerre de orden p e índice l

p número de ceros en la dirección radial

l número de ceros en la dirección azimutal

Modo más bajo (fundamental) TEM_{00}

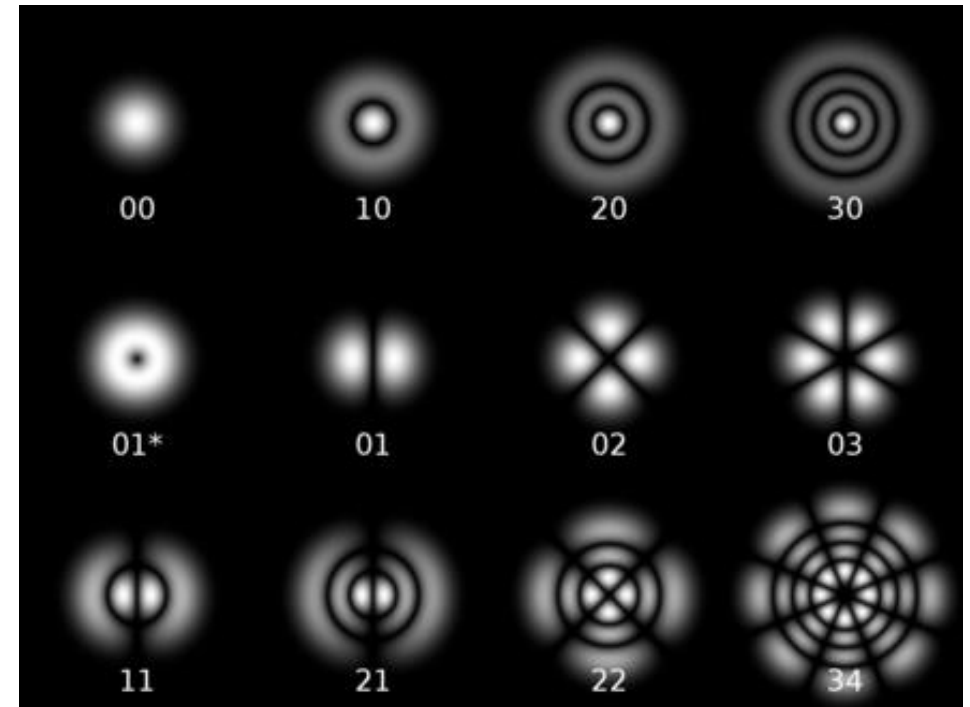
$$I_{00}(\rho, \varphi) = I_o e^{-2r^2/\omega^2} \text{ Gaussiano}$$

TEM_{0i} Modo Doughnut (por ejemplo en laser de rayos x de 46.7 nm

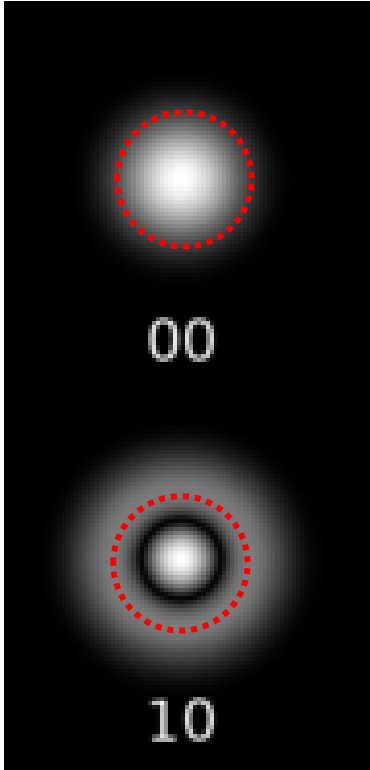
superposición de los modos TEM_{01} rotados en $2\pi/(4i)$)

Todos conviven!

- Cuanto mayor es la ganancia, van laseando mas modos
- Con un diafragma de tamaño adecuado me quedo con **TEM_{00}**



¿Qué modo tiene más pérdidas por difracción?



La potencia transmitida por la apertura es:

$$T_m = \frac{\int_{\text{apertura}} |U_m(x, y)|^2 dA}{\int_{\text{todo el plano}} |U_m(x, y)|^2 dA}$$

Estimo a las pérdidas (clipping losses) por pasaje como

$$L_m = 1 - T_m$$

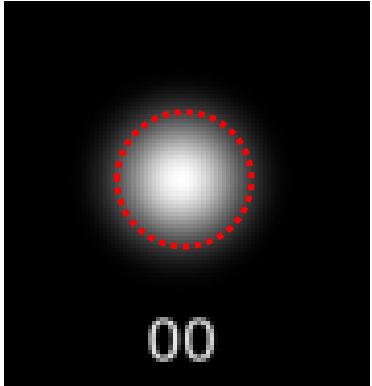
Si el modo está muy concentrado cerca del eje, como el TEM_{00} , casi toda su energía entra en la apertura:

$$\begin{aligned} T_{00} &\simeq 1 \\ L_{00} &\simeq 0 \end{aligned}$$

Pero si el modo es de orden alto, parte importante de su energía está más lejos del eje; entonces la apertura recorta más campo:

$$\begin{aligned} T_m &< T_{00} \\ L_m &> L_{00} \end{aligned}$$

¿Qué modo tiene más pérdidas por difracción?



Ejemplo: Modo TEM₀₀: $I(r) = I_0 e^{-2r^2/\omega^2}$

Apertura de radio $a \Rightarrow$ $T_{00} = \frac{P(a)}{P_{total}} = 1 - e^{-\frac{2a^2}{\omega^2}} \rightarrow L_{00clip} = 1 - T_m = e^{-2a^2/\omega^2}$

Apertura	Pérdida del modo gaussiano
$a = \omega$	13.5%
$a = 1.5\omega$	1.1%
$a = 2\omega$	0.034%
$a = 3\omega$	$\sim 1.5 \times 10^{-8}$

Veremos que el tamaño del haz (ω) depende de los parámetros de la cavidad

- Radios de curvatura de los espejos R_1, R_2
- Distancia entre espejos L
- Longitud de onda λ

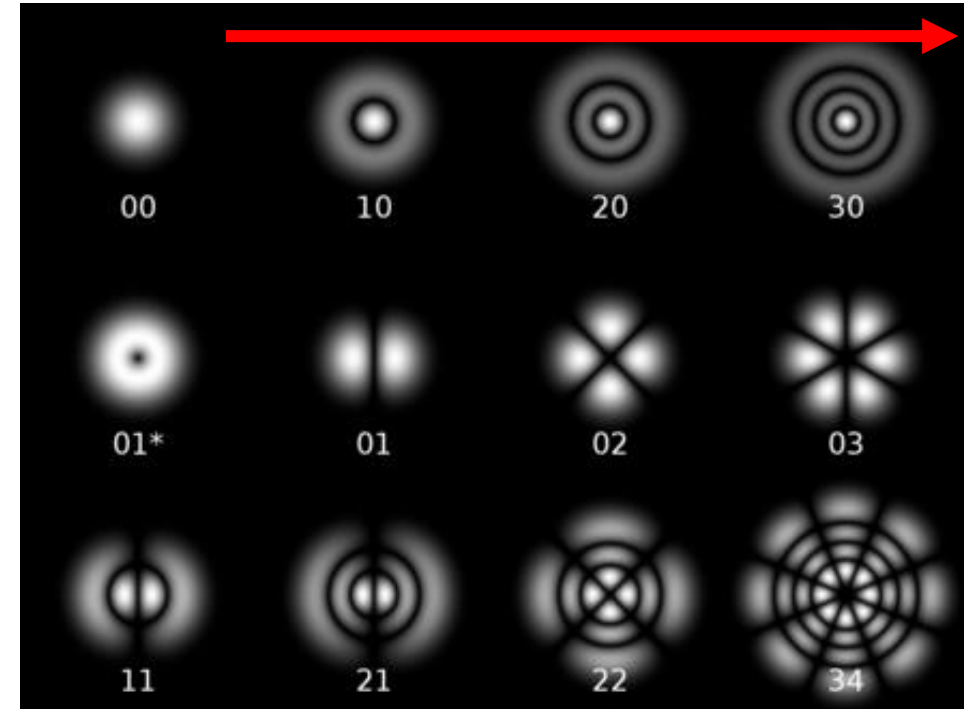
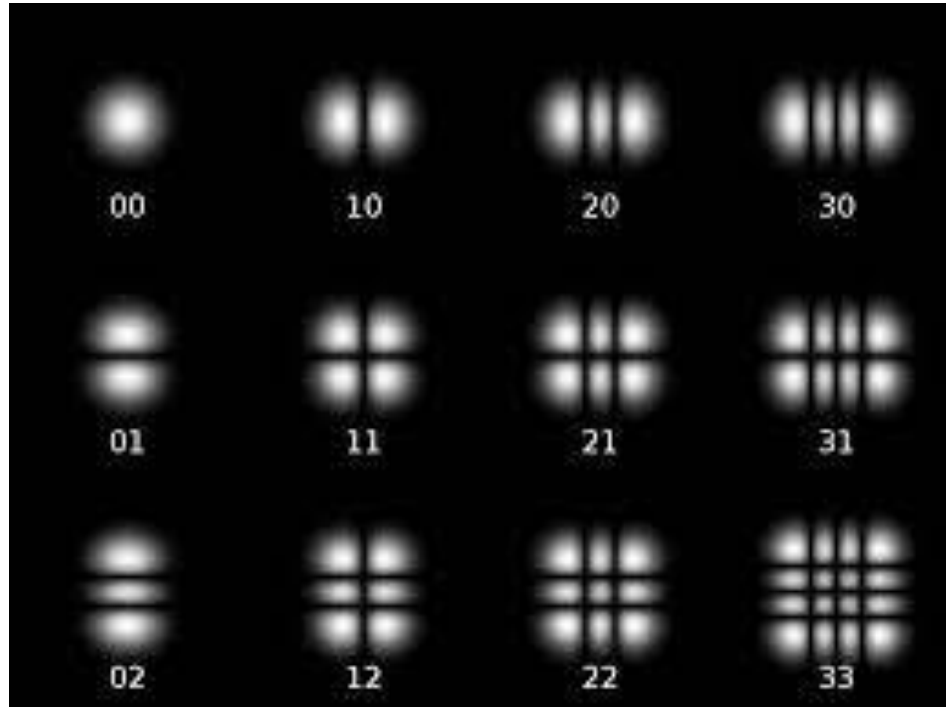
El diámetro finito de los espejos o de la apertura solo introduce **recorte y pérdidas por difracción**.

Modos transversales en láseres



Que modo lasea primero $\rightarrow$ aquel que tenga menos pérdidas por difracción (umbral más bajo) $\rightarrow TEM_{00}$

TEM_{00} es quien tiene más chances de lasear (a menos que ponga perdidas intencionales en la cavidad)



Difracta más a medida que aumenta el orden (aumentan las pérdidas por difracción)

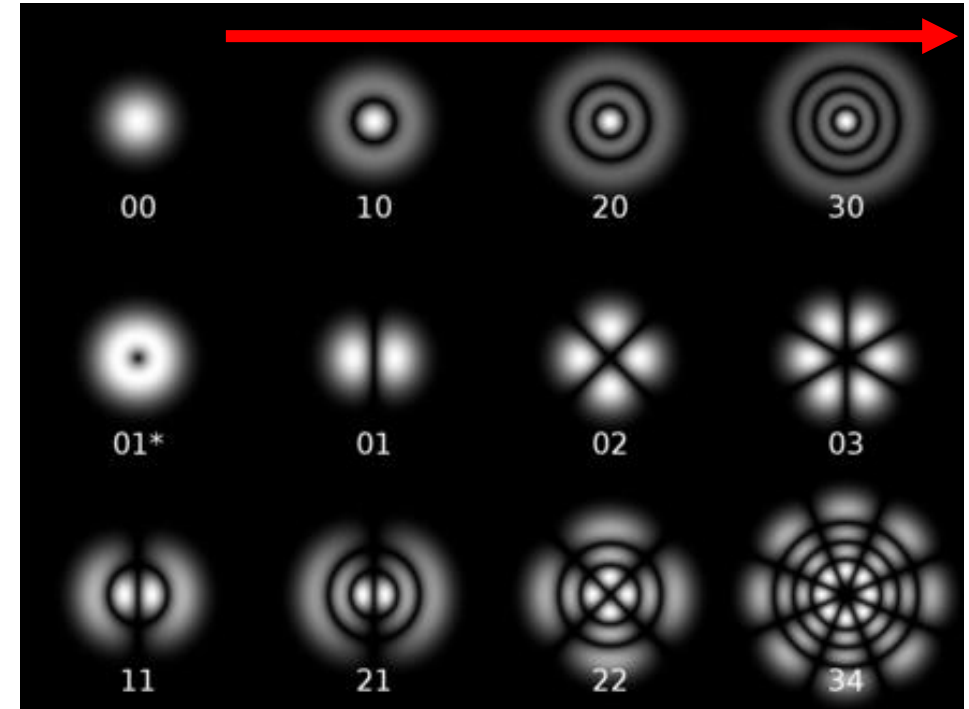
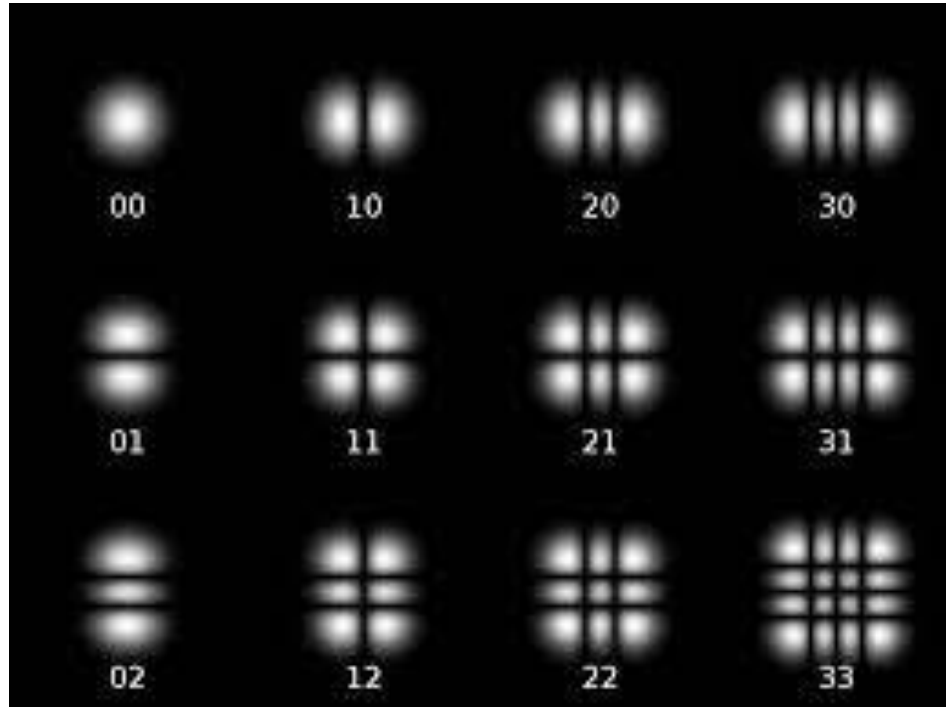
$$\text{Pérdida de energía por pasaje: } 1 - |\gamma_n|^2$$

Modos transversales en láseres



Que modo lasea primero $\rightarrow$ aquel que tenga menos pérdidas por difracción (umbral más bajo) $\rightarrow TEM_{00}$

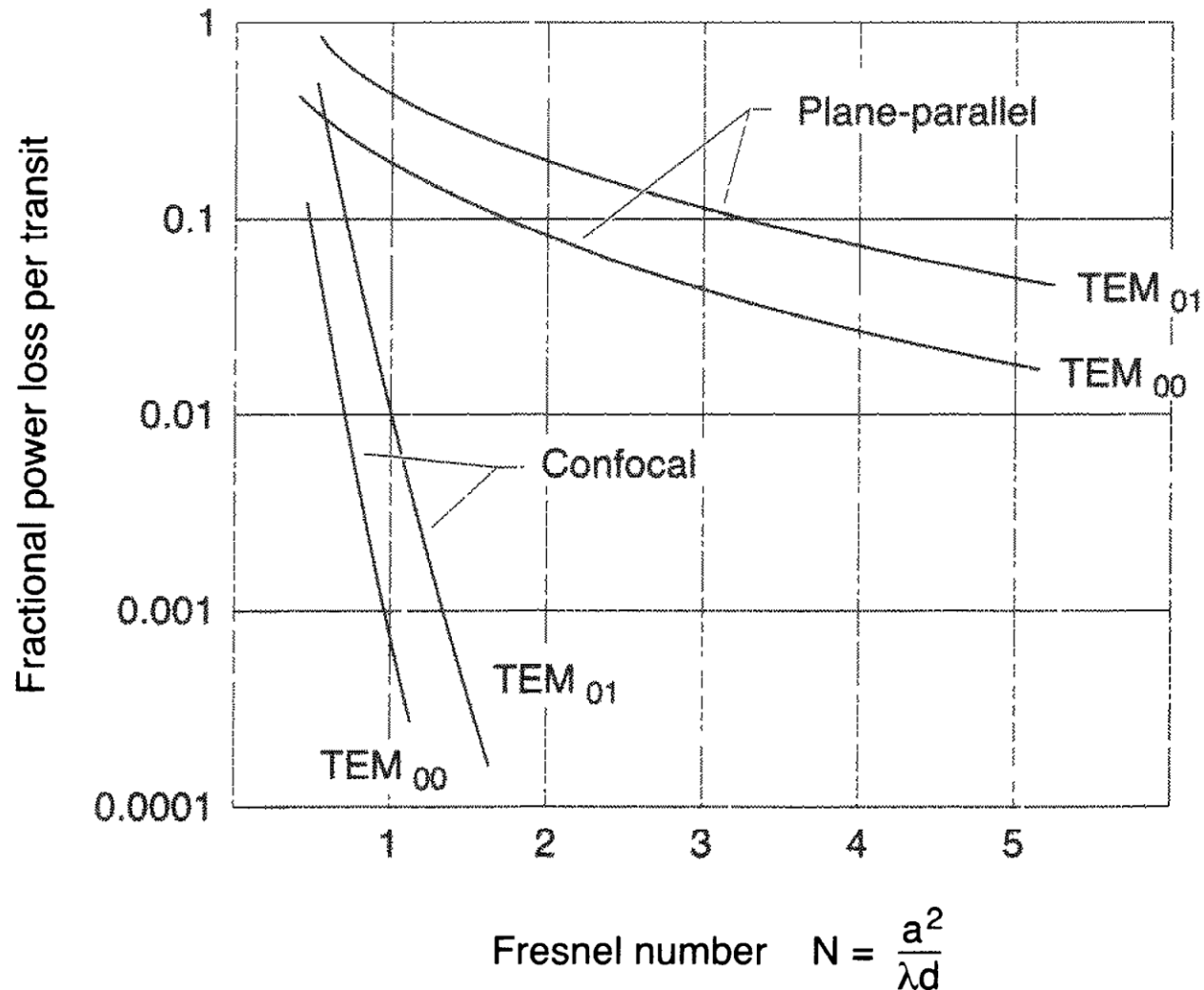
TEM_{00} es quien tiene más chances de lasear (a menos que ponga perdidas intencionales en la cavidad)



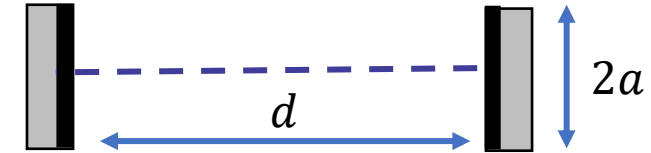
$$G_{th,m}^2 = \frac{1}{|r_1| |r_2| V^2 |\gamma_m|^2}$$

Entonces, si el modo tiene más pérdidas por difracción $|\gamma_m|^2 \downarrow \Rightarrow G_{th,m}^2 \uparrow$

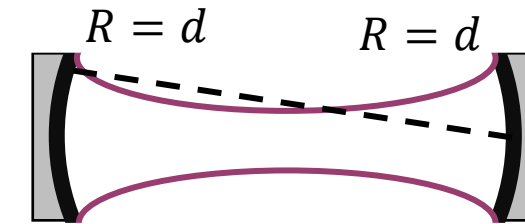
Cavidades planas – Cavidades con espejos curvos



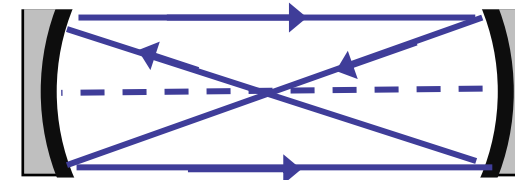
Cavidad plana



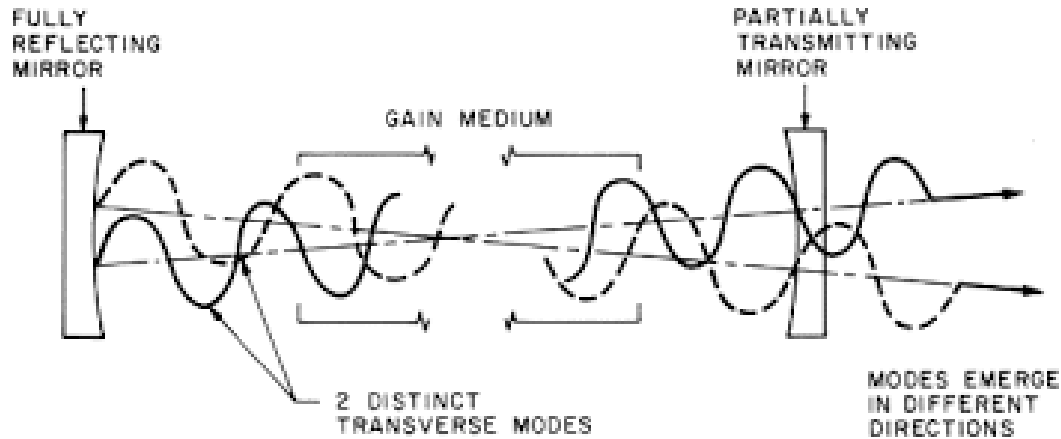
Cavidad confocal



Los espejos curvos reenfochan el haz dentro de la cavidad → menores pérdidas por difracción.



Modos transversales en láseres



$$\nu = \nu_{npq} = \nu[n, p, q]$$

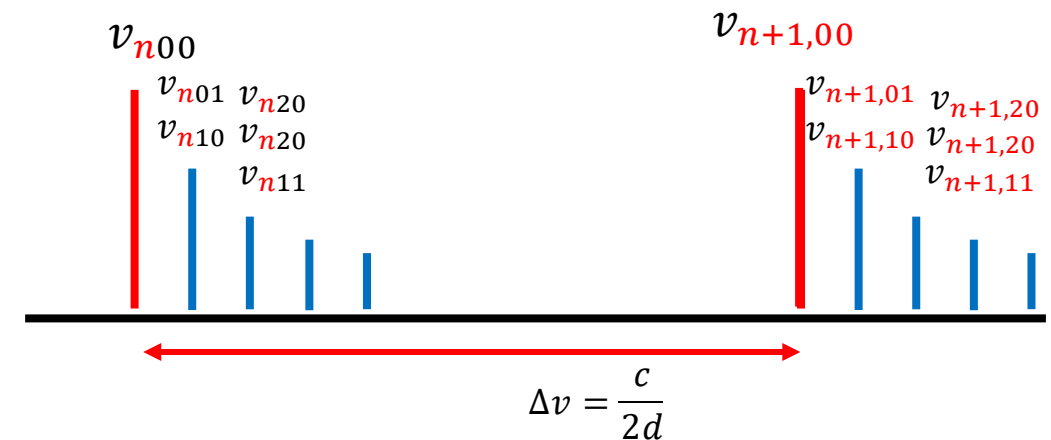
n longitudinal
 pq transversal

Igual n distinto $pq \rightarrow$ recorren distinto camino debido a que cada uno tiene distinta distribución angular $\rightarrow$ distinta frecuencia

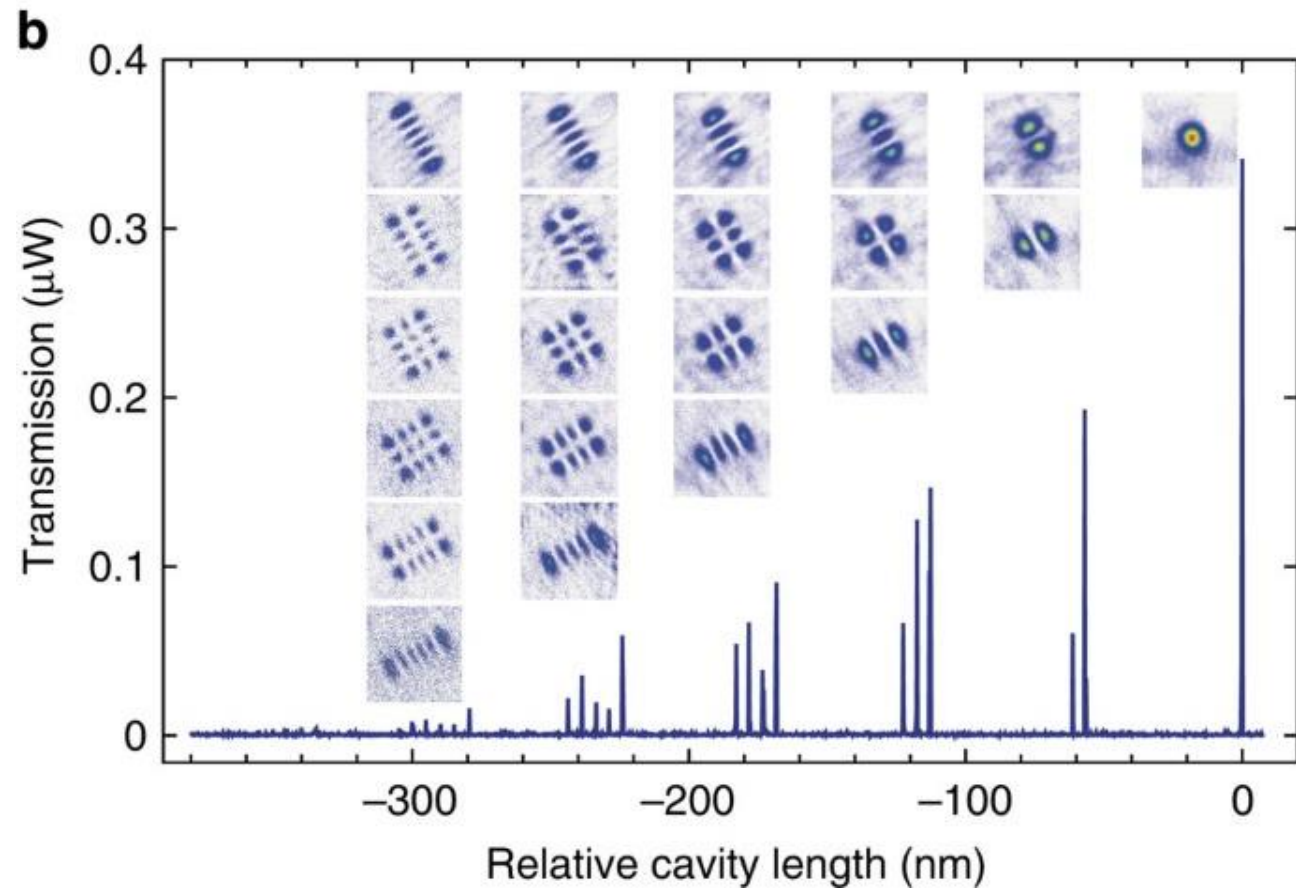
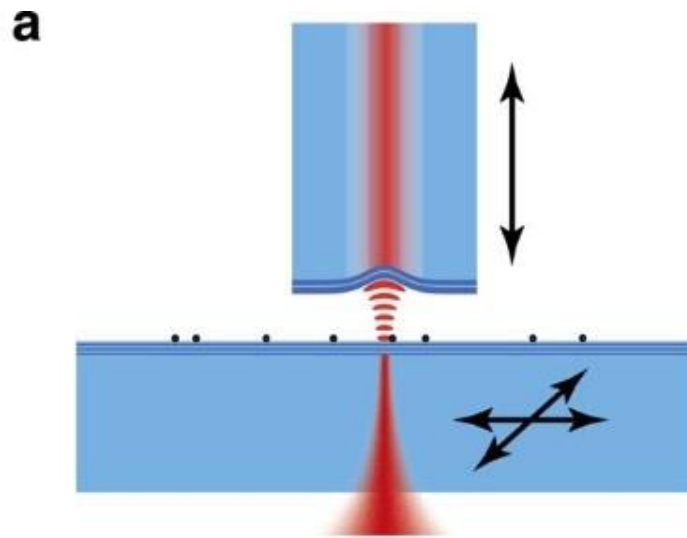
Típicamente

$$\nu[n+1, p, q] - \nu[n, p, q] \gg \nu[n, p+1, q] - \nu[n, p, q]$$

Dejamos el cálculo de estas frecuencias para más adelante...

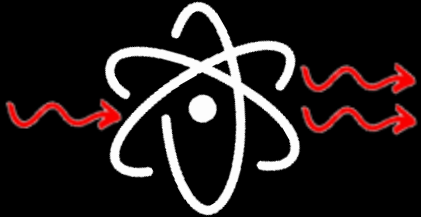


Modos transversales en láseres



Mader, M., Reichel, J., Hänsch, T. *et al.* A scanning cavity microscope. *Nat Commun* **6**, 7249 (2015). <https://doi.org/10.1038/ncomms8249>

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

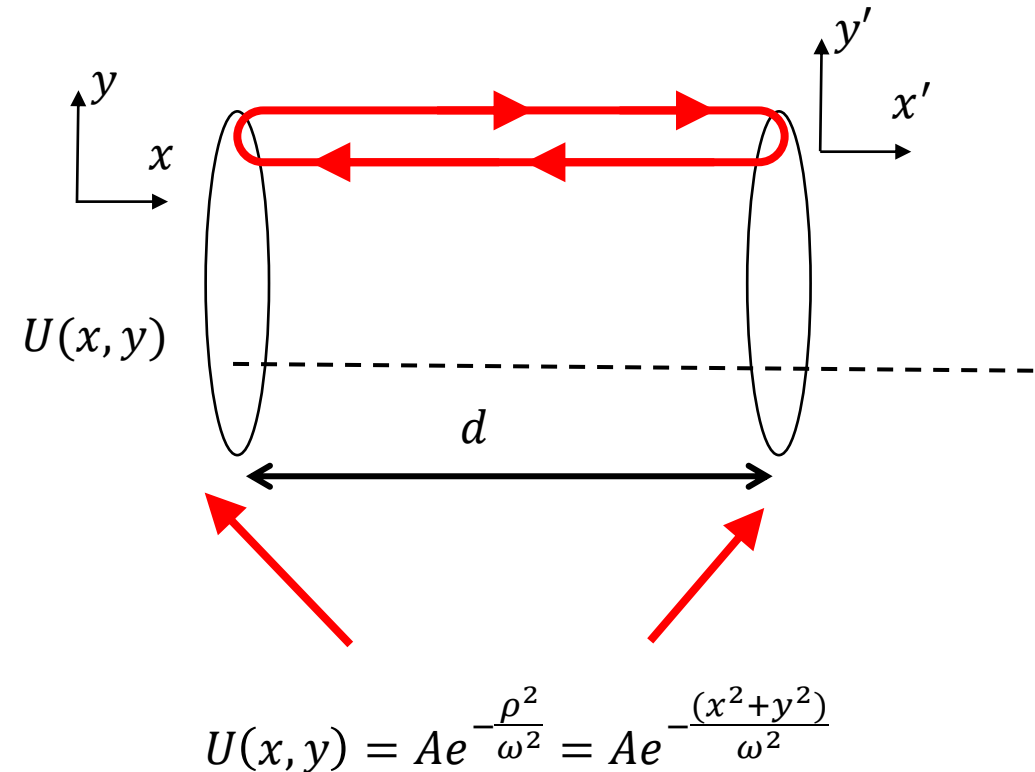
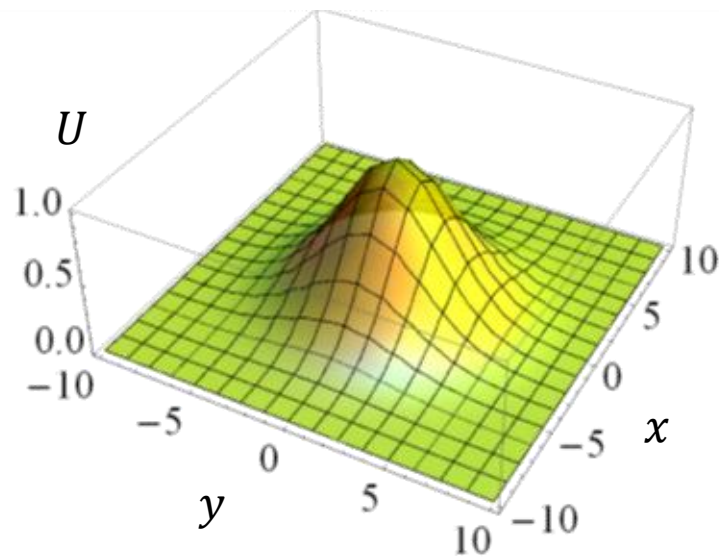
1^{do} cuatrimestre 2026

Que vimos, que veremos

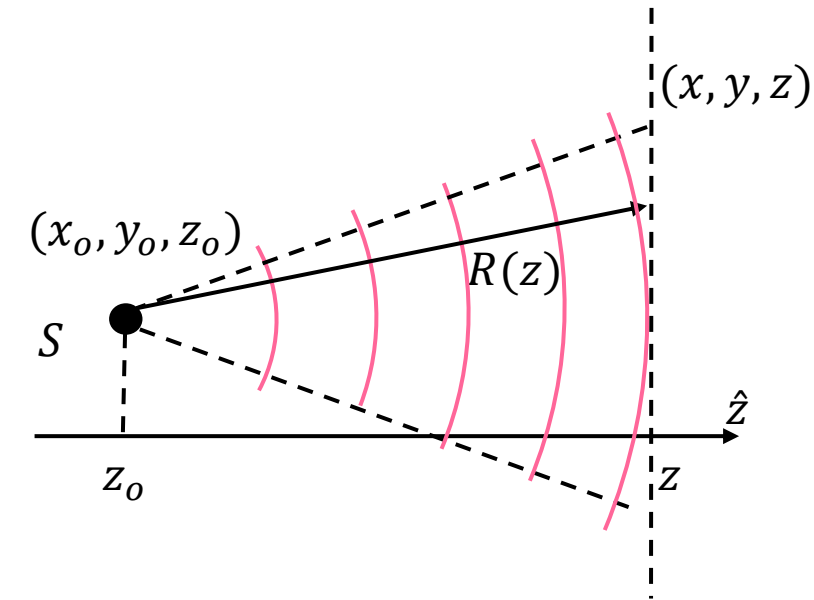


Vimos que, en los espejos, la distribución transversal del **campo** puede escribirse como modos Hermite-Gauss o Laguerre-Gauss; la intensidad se obtiene como $|U|^2$

Ejemplo TEM_{00}



Vamos a ver que, si es gaussiano en los espejos, es gaussiano en todo el espacio (a menos que cambiemos la cavidad o pongamos alguna perturbación) → Para eso hay que ver como se propagan los haces gaussianos.



Onda esférica en la aproximación paraxial

$$U(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

- $r^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2$
- $(1 + u)^{1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}u$

- $r \sim z - z_o = R(z)$ *denominador (radio de curvatura)*
- en la exponencial $r = (z - z_o) \left(1 + \frac{((x-x_o)^2 + (y-y_o)^2)}{(z-z_o)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sim (z - z_o) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{((x-x_o)^2 + (y-y_o)^2)}{(z-z_o)^2} \right)$

$$U(r) = e^{-ik(z-z_o)} \frac{e^{-ik \frac{1}{2} \frac{((x-x_o)^2 + (y-y_o)^2)}{R(z)}}}{R(z)}$$

$R(z) > 0$ diverge
 $R(z) < 0$ converge

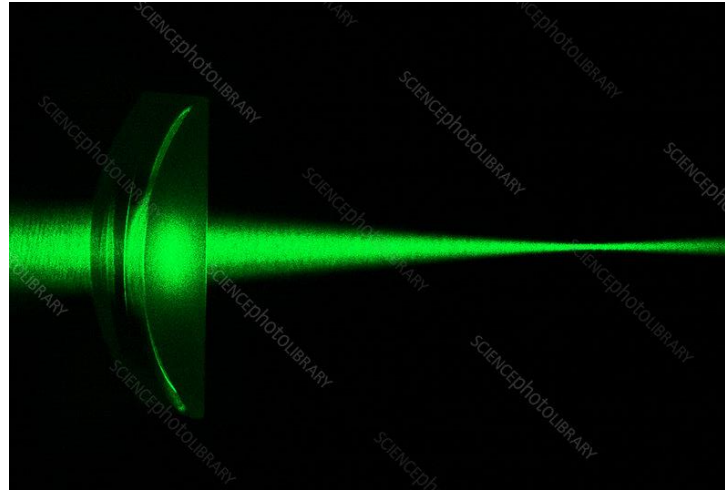
$$I(r) \sim |U(r)|^2 = 1/|R(z)|^2$$

*Esta onda se extiende al infinito en la dirección transversal
 por lo que no puede ser una onda real*

Haces gaussianos esféricos.



- Limitado en la dirección transversal a la de propagación
- Divergencia pequeña
- se pueda enfocar (o modificar en general con elementos ópticos)



Un laser real no puede tener extensión infinita

El haz gaussiano esférico en conjunto con sus extensiones de orden superior (Hermite Gauss y Laguerre Gauss) pueden derivarse de muchas formas, entre ellas

- 1) La Fuente puntual compleja
- 2) A partir de la ecuación diferencial de ondas en la aproximación paraxial
- 3) A partir de la integral de Huygens Fresnel
- 4) Expansión en ondas planas

Haces gaussianos esféricos.



$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_o)} \frac{e^{-jk \frac{1}{2} \frac{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}{R(z)}}}{R(z)}$$

$$R(z) = z - z_o$$

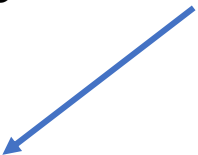
Más general

$$R(z) = R_o + z - z_o$$

Supongamos que S está ubicada en un punto de coordenadas complejo

$$(x_o', y_o', z_o') \rightarrow (0, 0, z_o - \tilde{q}_o) \quad \tilde{q}_o = jz_R$$

$$R(z) = z - z_o' \rightarrow z - z_o + \tilde{q}_o$$

$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_o)} \frac{\tilde{q}_o}{z - z_o + \tilde{q}_o} e^{-jk \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)}{z-z_o+\tilde{q}_o}} = e^{-jk(z-z_o)} \frac{\tilde{q}(z_o)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)}{\tilde{q}(z)}}$$


$\tilde{q}(z_o) = \tilde{q}_o = jz_R$ se agrega para normalizar

$$|U(0,0,z_o)|^2 = 1$$

Radio complejo de curvatura

$$\tilde{q}(z) = z - z_o + \tilde{q}_o$$

Haces gaussianos esféricos.



$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_o)} \frac{\tilde{q}(z_o)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)}{\tilde{q}(z)}}$$

Radio complejo de curvatura

$$\tilde{q}(z) = z - z_o + \tilde{q}_o \quad \tilde{q}_o = jz_R$$

Definición que conecta con la física

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

Propagación axial

$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_o)} \frac{\tilde{q}(z_o)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2(z)}}$$

Modulación gaussiana del campo con ancho $\omega(z)$

$\tilde{q}(z_o)$ se agrega para normalizar

$$|U(0,0,z_o)|^2 = \left| \frac{\tilde{q}(z_o)}{\tilde{q}(z_o)} \right|^2 = 1$$

Contiene la **fase de Guoy** $\psi(z)$

Fase cuadrática: frente de ondas esférico con radio de curvatura $R(z)$

Pero quienes son $R(z)$ y $\omega(z)$ y $\psi(z)$?

Haces gaussianos esféricos.



Radio de curvatura y tamaño del haz

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{q_r(z)} - j \frac{1}{q_i(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$\tilde{q}(z) = z - z_o + jz_R$$

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{z - z_o + iz_R} = \frac{1}{z - z_o + iz_R} \frac{z - z_o - iz_R}{z - z_o - iz_R} = \frac{z - z_o - jz_R}{(z - z_o)^2 + z_R^2} = \frac{z - z_o}{(z - z_o)^2 + z_R^2} - j \frac{z_R}{(z - z_o)^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$R(z) = \frac{(z - z_o)^2 + z_R^2}{z - z_o} = \frac{(z - z_o)^2}{z - z_o} \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_o} \right)^2 \right] = (z - z_o) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_o} \right)^2 \right]$$

Radio de curvatura del haz

$$\omega^2(z) = \frac{\lambda \left((z - z_o)^2 + z_R^2 \right)}{\pi z_R}$$

Tamaño del haz

Cintura del haz: Tamaño del haz en $z = z_o$

$$\omega^2(z = z_o) = \omega_o^2 = \frac{\lambda}{\pi} z_R$$

parámetro de Rayleigh $z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_o^2$ “área / lambda”

$$R(z_o) \rightarrow \infty$$

Haces gaussianos esféricos.



Radio de curvatura y tamaño del haz

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{q_r(z)} - j \frac{1}{q_i(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$\tilde{q}(z) = z - z_o + jz_R$$

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{z - z_o + iz_R} = \frac{1}{z - z_o + iz_R} \frac{z - z_o - iz_R}{z - z_o - iz_R} = \frac{z - z_o - jz_R}{(z - z_o)^2 + z_R^2} = \frac{z - z_o}{(z - z_o)^2 + z_R^2} - j \frac{z_R}{(z - z_o)^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$R(z) = \frac{(z - z_o)^2 + z_R^2}{z - z_o} = \frac{(z - z_o)^2}{z - z_o} \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_o} \right)^2 \right] = (z - z_o) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_o} \right)^2 \right]$$

$$\omega^2(z) = \frac{\lambda \left((z - z_o)^2 + z_R^2 \right)}{\pi z_R}$$

Cintura del haz: Tamaño del haz en $z = z_o$

$$\omega^2(z = z_o) = \omega_o^2 = \frac{\lambda}{\pi} z_R$$

parámetro de Rayleigh $z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_o^2$ “área / lambda”

$$R(z_o) \rightarrow \infty$$

Radio de curvatura

$$R(z) = (z - z_o) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_o} \right)^2 \right]$$

Tamaño del haz

$$\omega(z) = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_o}{z_R} \right)^2}$$

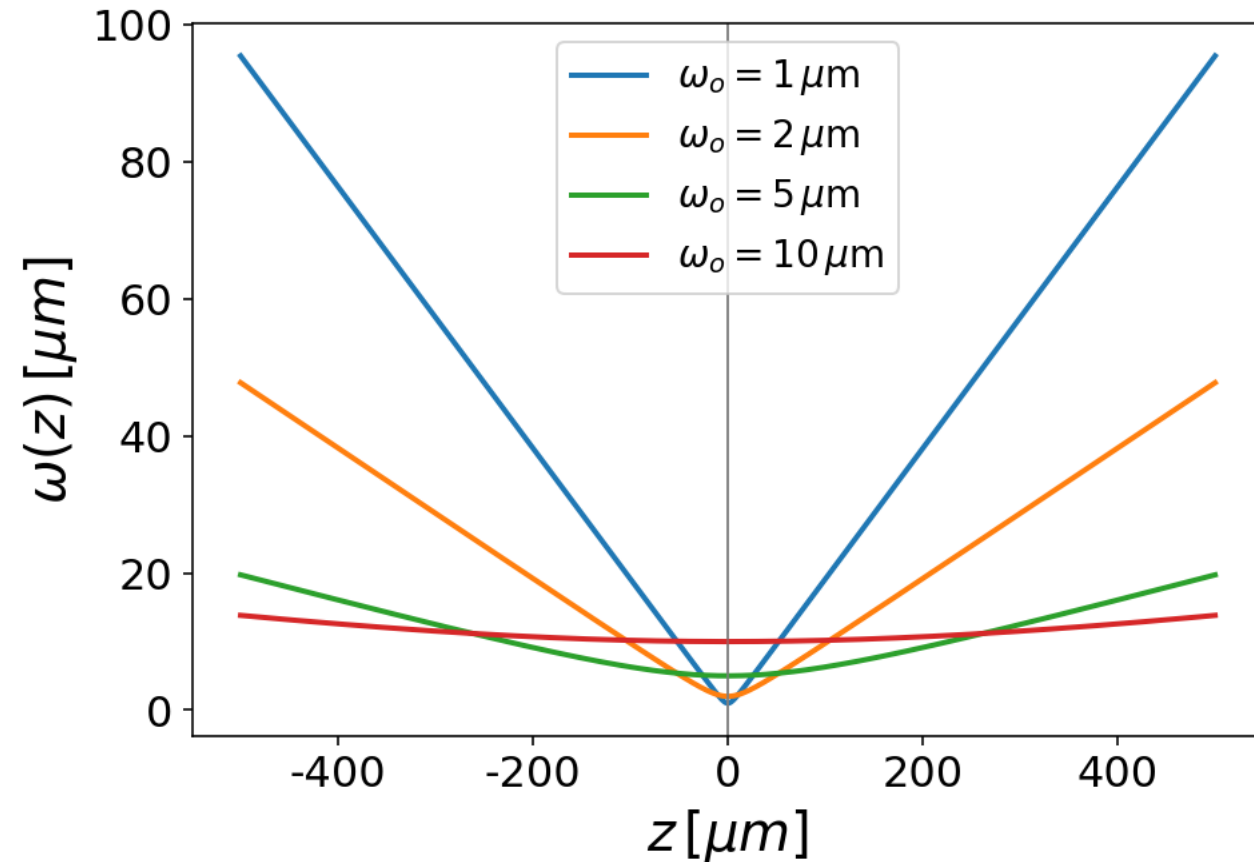
Parámetro de Raileigh

$$z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_o^2$$

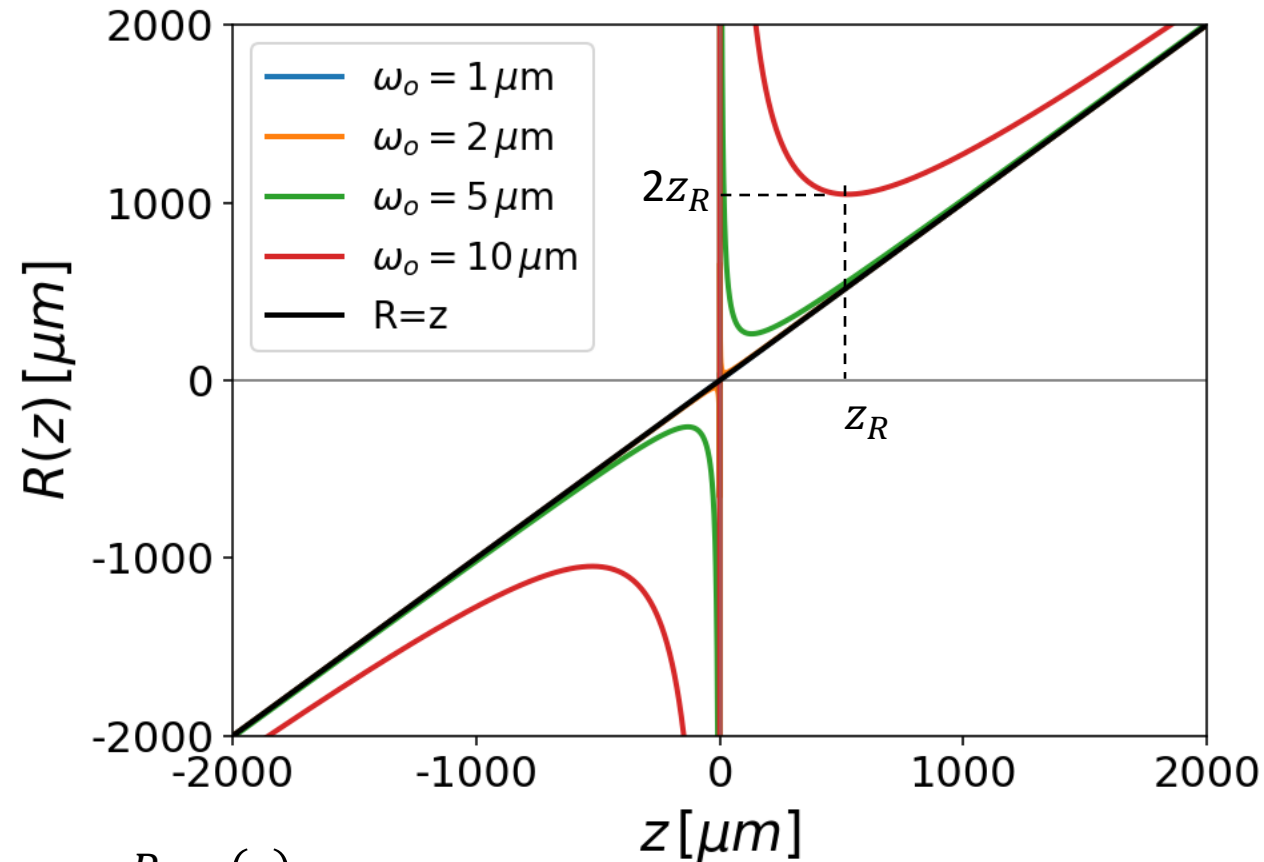
Haces gaussianos esféricos.



$$\omega(z) = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$



$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right] \quad z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_o^2$$



Cuanto más chica la cintura, mayor es la divergencia (difracción de Fraunhofer)

$$R_{min}(z) \rightarrow z = z_R$$

$$R_{min}(z_R) = 2z_R$$

Haces gaussianos esféricos



Amplitud del haz y fase de Guoy

$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_0)} \frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2(z)}}$$

$$\tilde{q}(z) = z - z_0 + jz_R$$

$$\frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} = \frac{jz_R}{z - z_0 + jz_R} = jz_R \frac{z - z_0 - jz_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} = z_R \frac{j(z - z_0) + z_R}{(z - z_0)^2 + z_R^2} = z_R \frac{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_R^2}}{(z - z_0)^2 + z_R^2} e^{j\psi(z)}$$

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z - z_0}{z_R}\right) \text{ fase de Gouy} \rightarrow \text{consecuencia de tener haz limitado en el espacio}$$

$$\frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} = \frac{z_R}{\sqrt{(z - z_0)^2 + z_R^2}} e^{j\psi(z)} = \frac{z_R}{|\tilde{q}(z)|} e^{j\psi(z)} = \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{j\psi(z)}$$

La amplitud del haz cambia con el tamaño del mismo

Radio de curvatura

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right]$$

Tamaño del haz

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2}$$

Parámetro de Raileigh

$$z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2$$

Fase de Guoy

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)$$

Haces gaussianos esféricos: Resumen TEM₀₀



$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_0)} \frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2(z)}}$$

Propagación axial

Modulación gaussiana del campo con ancho $\omega(z)$

Fase cuadrática: frente de ondas esférico con radio de curvatura $R(z)$

$$|U(0,0,z_0)|^2 = \left| \frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z_0)} \right|^2 = 1$$

Radio complejo de curvatura

$$\tilde{q}(z) = z - z_0 + jz_R \quad \frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$\frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} = \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{j\psi(z)}$$

Todos los parámetros están determinados por ω_0 y λ

Un haz gaussiano no es solamente una gaussiana en intensidad. Es una solución de propagación que combina una envolvente transversal gaussiana, un frente de onda curvo, una fase axial y una fase adicional de Gouy

Radio de curvatura

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right]$$

Tamaño del haz

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2}$$

Parámetro de Raileigh

$$z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2$$

Fase de Guoy

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)$$

Haces gaussianos esféricos: Resumen TEM₀₀



$$U(x, y, z) = e^{-jk(z-z_0)} \frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} e^{-jk \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2(z)}}$$

$$I(\rho, z) \propto |U(\rho, z)|^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 e^{-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Propagación axial

$$|U(0,0,z_0)|^2 = \left| \frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z_0)} \right|^2 = 1$$

Modulación gaussiana del campo con ancho $\omega(z)$

Fase cuadrática: frente de ondas esférico con radio de curvatura $R(z)$

Radio complejo de curvatura

$$\tilde{q}(z) = z - z_0 + jz_R \quad \frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

$$\frac{\tilde{q}(z_0)}{\tilde{q}(z)} = \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{j\psi(z)}$$

Todos los parámetros están determinados por ω_0 y λ

Radio de curvatura

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{z_R}{z - z_0} \right)^2 \right]$$

Tamaño del haz

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2}$$

Parámetro de Raileigh

$$z_R = \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2$$

Fase de Guoy

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)$$

Un haz gaussiano no es solamente una gaussiana en intensidad. Es una solución de propagación que combina una envolvente transversal gaussiana, un frente de onda curvo, una fase axial y una fase adicional de Gouy

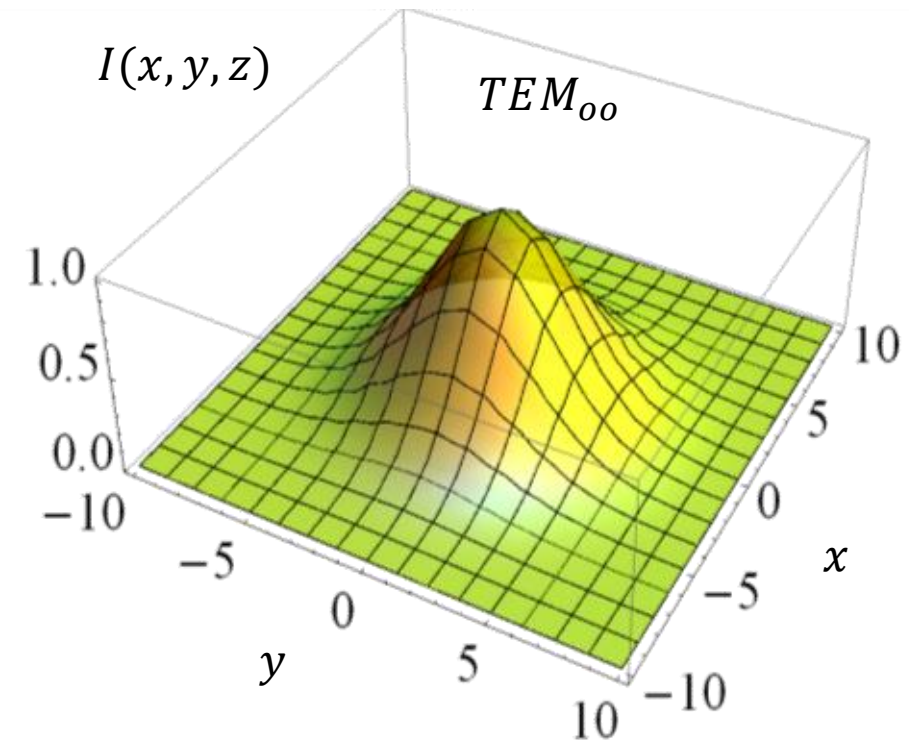
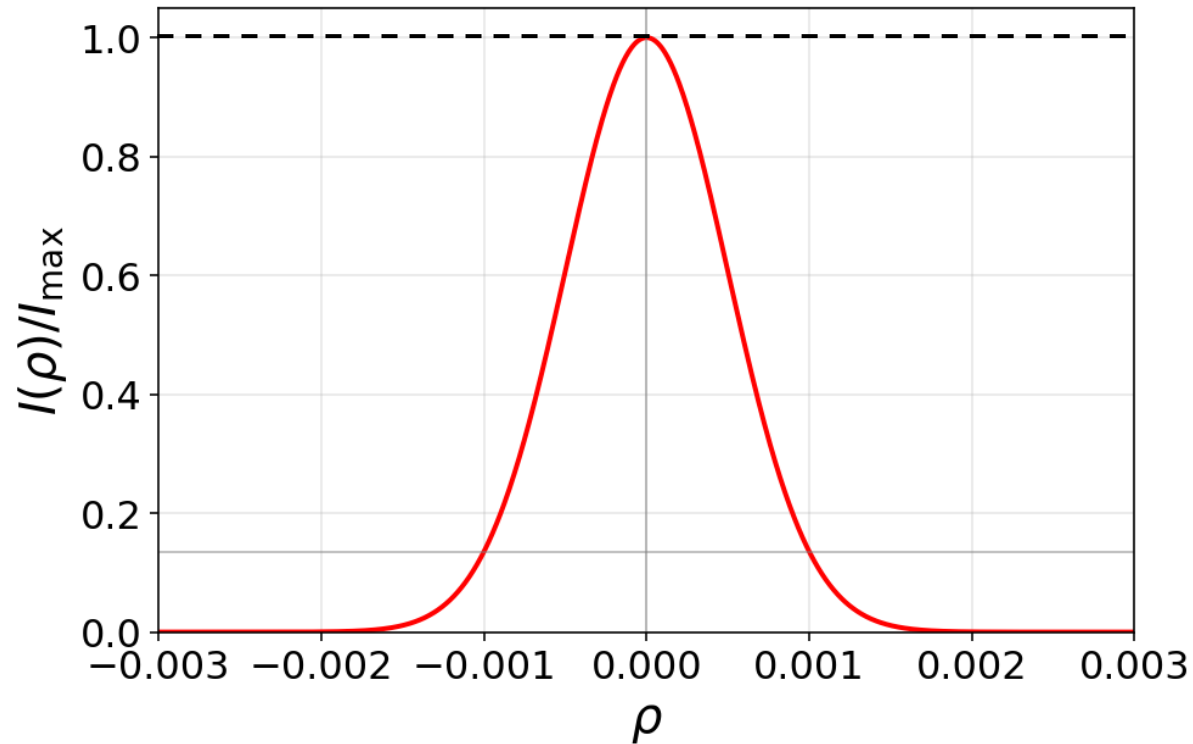
Haces gaussianos esféricos. TEM_{00}



$$I(\rho, z) \propto |U(\rho, z)|^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 e^{-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_{max} = I(0, z) = \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2$$



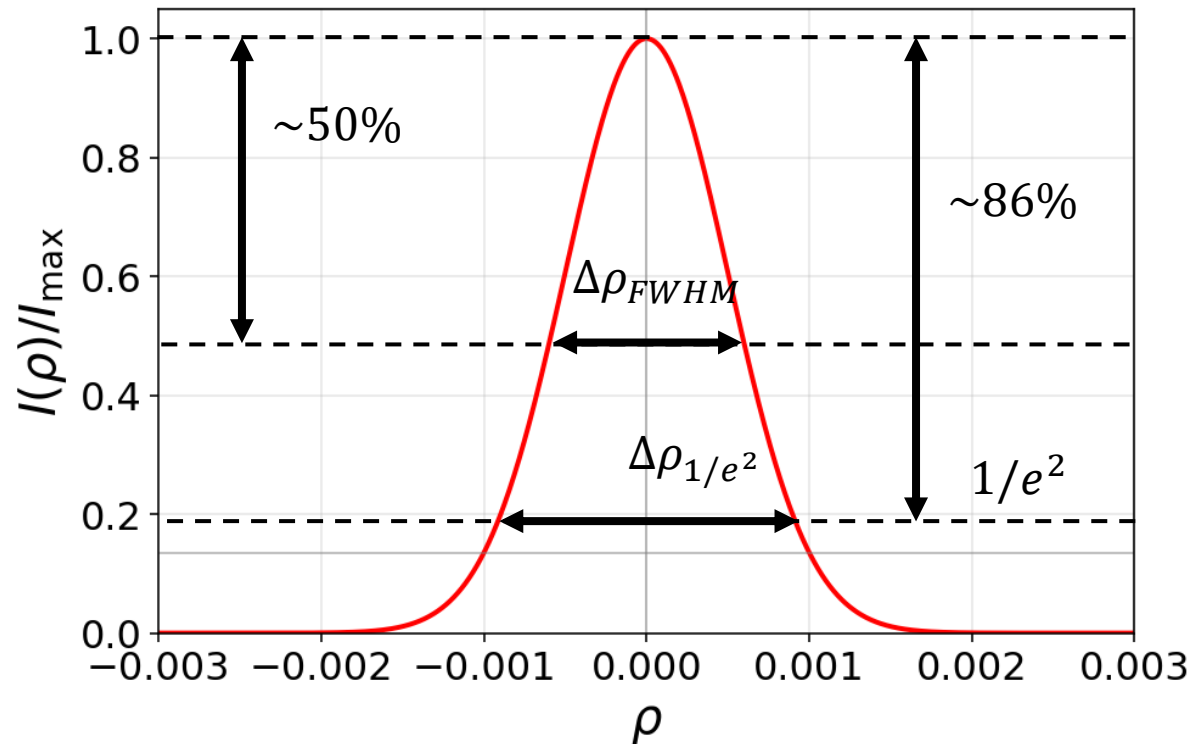
Haces gaussianos esféricos. TEM₀₀



$$I(\rho, z) \propto |U(\rho, z)|^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 e^{-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_{max} = I(0, z) = \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2$$



Ancho 1/e²

$$I(\rho, z) = I_{max} e^{-2} \rightarrow e^{-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}} = e^{-2} \rightarrow \rho_{\pm} = \pm \omega(z)$$

$$\Delta\rho_{1/e^2} = 2\omega(z)$$

Ancho Δρ_{FWHM}

$$I(\rho, z) = \frac{I_{max}}{2} \rightarrow e^{-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}} = \frac{1}{2} \rightarrow \rho_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \ln(2)} \omega(z)$$

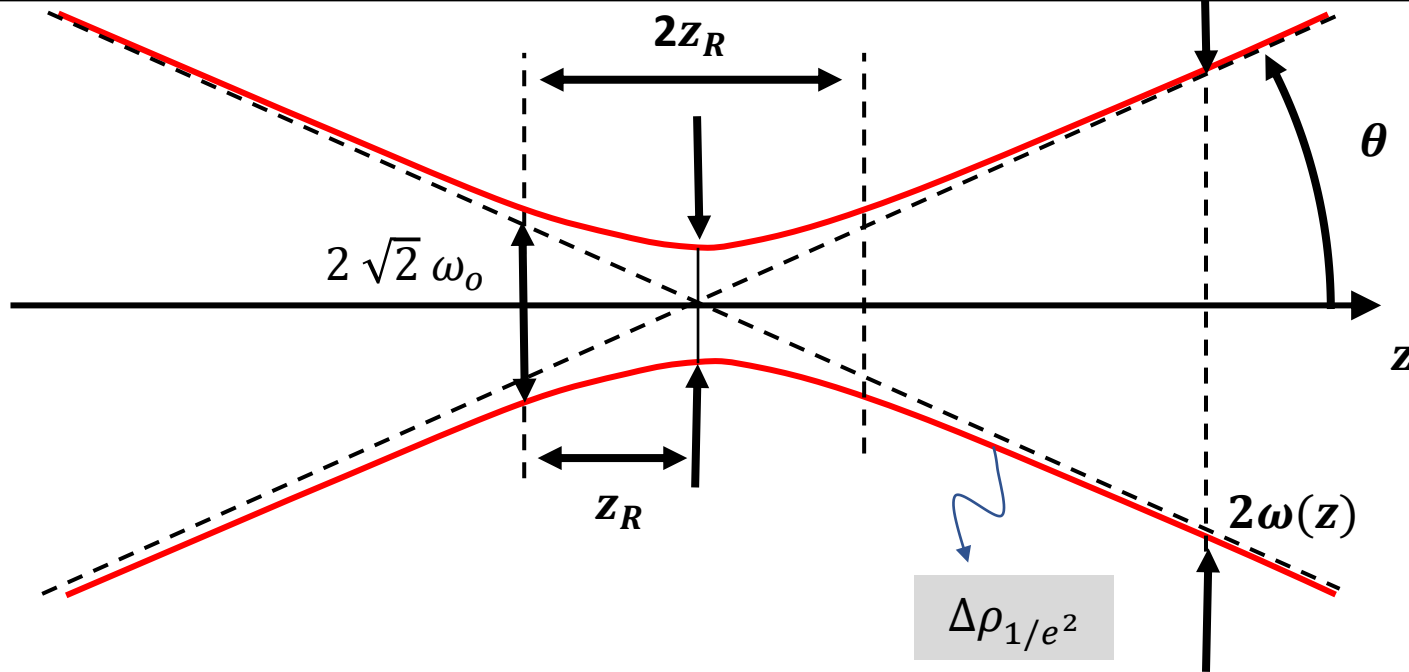
$$\Delta\rho_{FWHM} = \sqrt{2 \ln(2)} \omega(z)$$

$$\text{En } z = 0 \rightarrow \Delta\rho_{1/e^2} = 2 \omega_0$$

$$\text{En } z = z_R \rightarrow \Delta\rho_{1/e^2} = \sqrt{2} 2 \omega_0$$

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$

Haces gaussianos esféricos. TEM₀₀



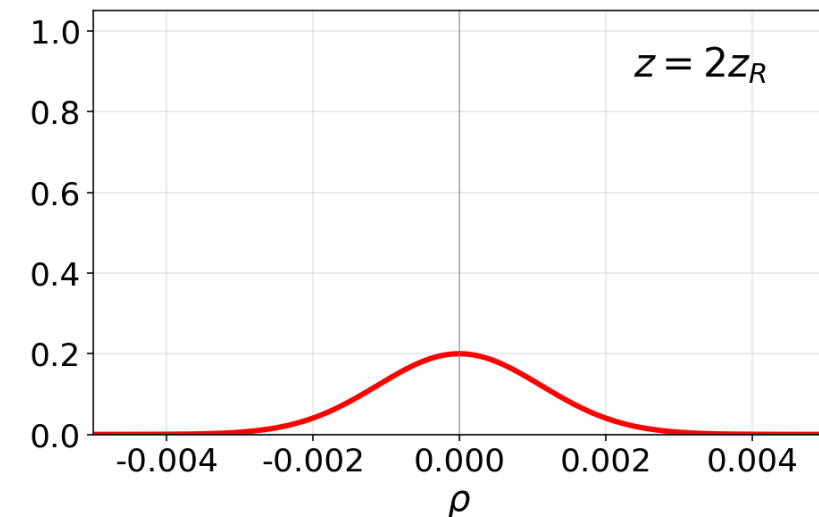
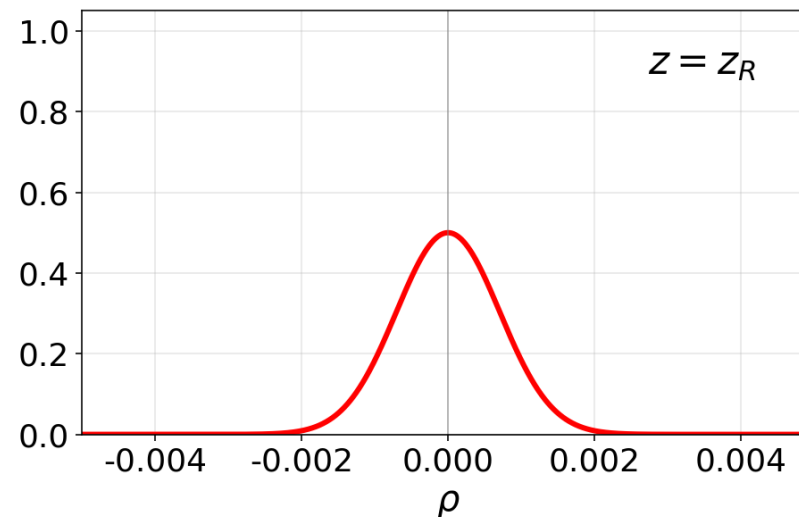
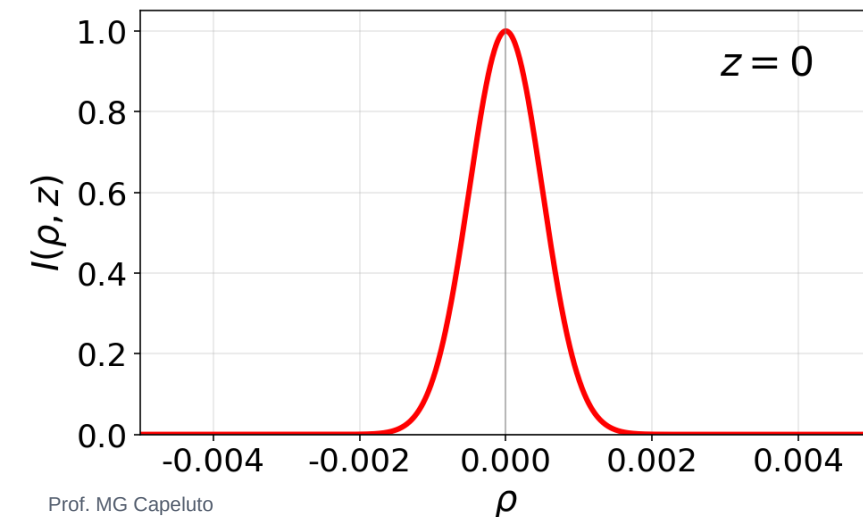
$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi\omega_0}$$

$$\Theta = 2\theta \text{ (divergencia)}$$

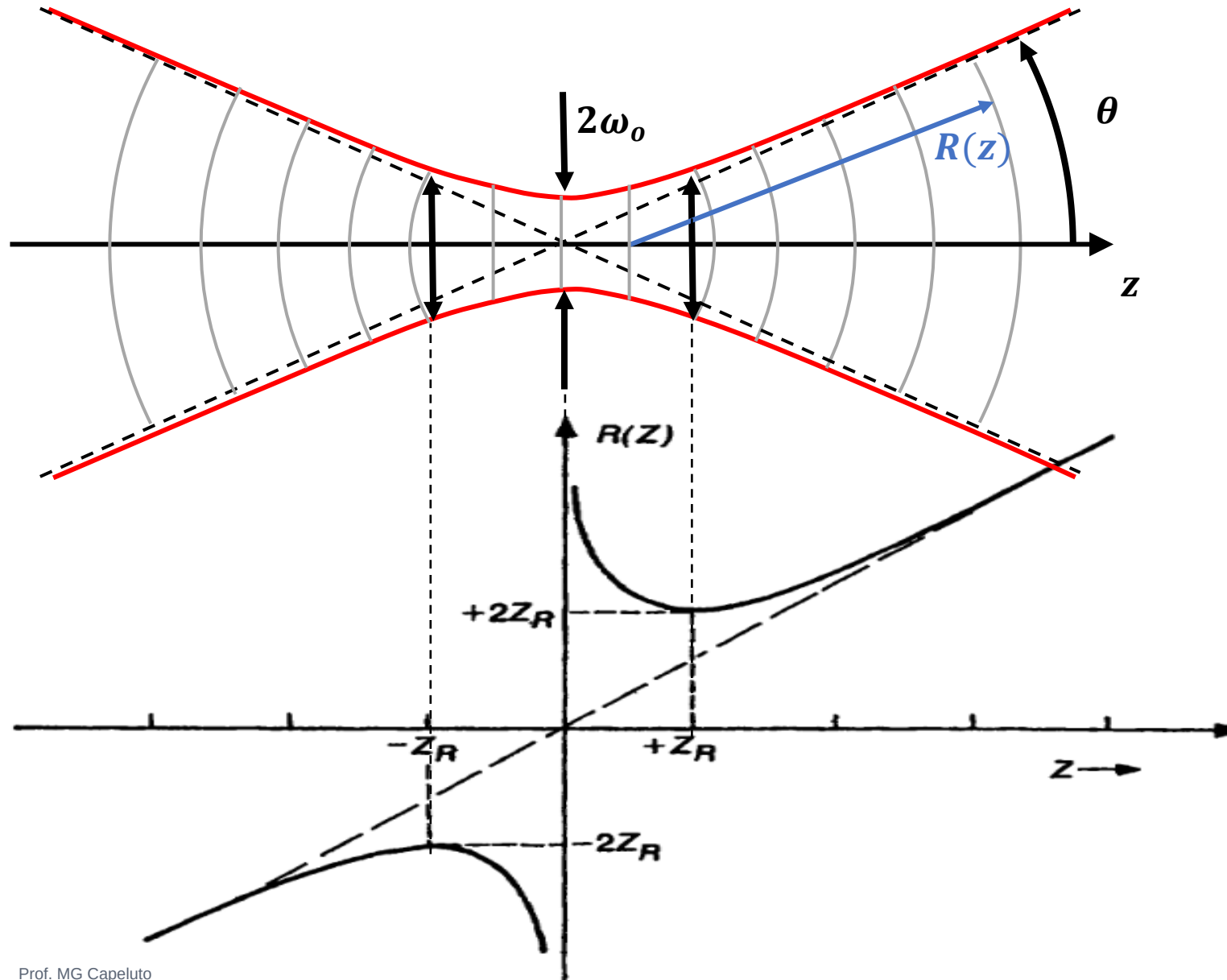
Cuanto más chica la cintura, mayor es la divergencia (“difracción de Fraunhofer”)

$$z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}: \text{ parámetro de Rayleigh}$$

$$2z_R: \text{ parámetro confocal}$$



Haces gaussianos esféricos. TEM₀₀



$$e^{-jk(z-z_0)} e^{-j\psi(z)} e^{-jk \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{Z_R}{z} \right)^2 \right]$$

$$z_0 = 0$$

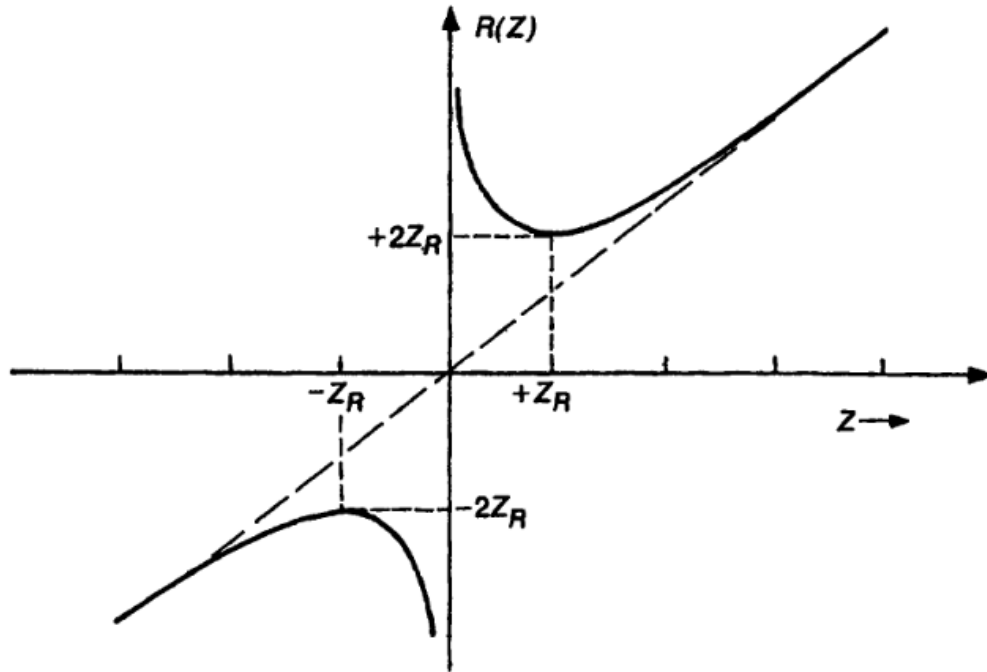
$R(z) \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$) (frente de ondas plano)

$R(z) \sim z$ ($z \gg 0 = z_0$)

$$Z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$$

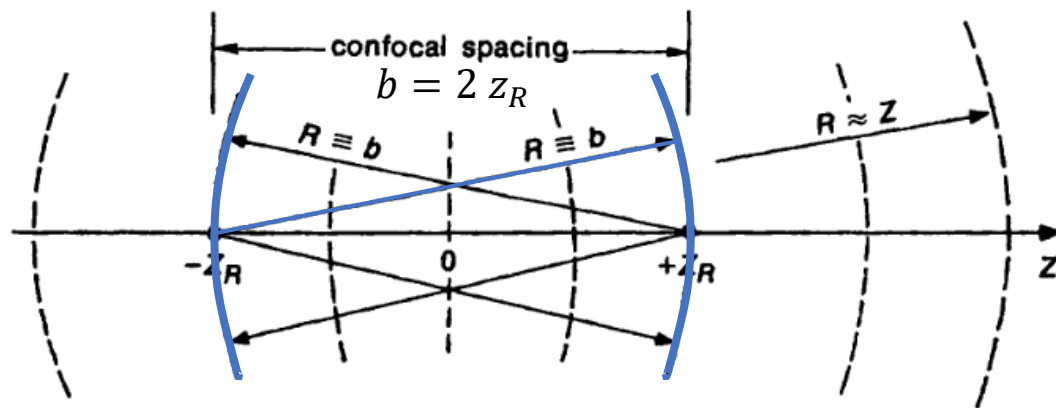
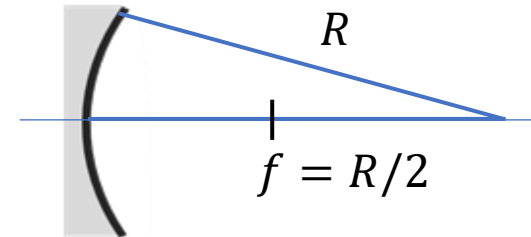
$R(\pm Z_R) = 2Z_R \rightarrow$ radio de curvatura mínimo

Haces gaussianos esféricos. TEM₀₀



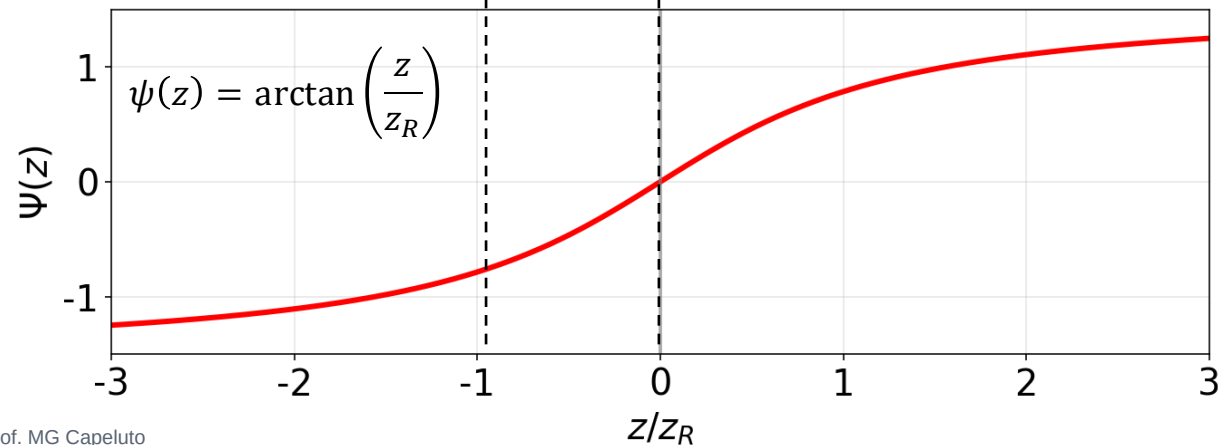
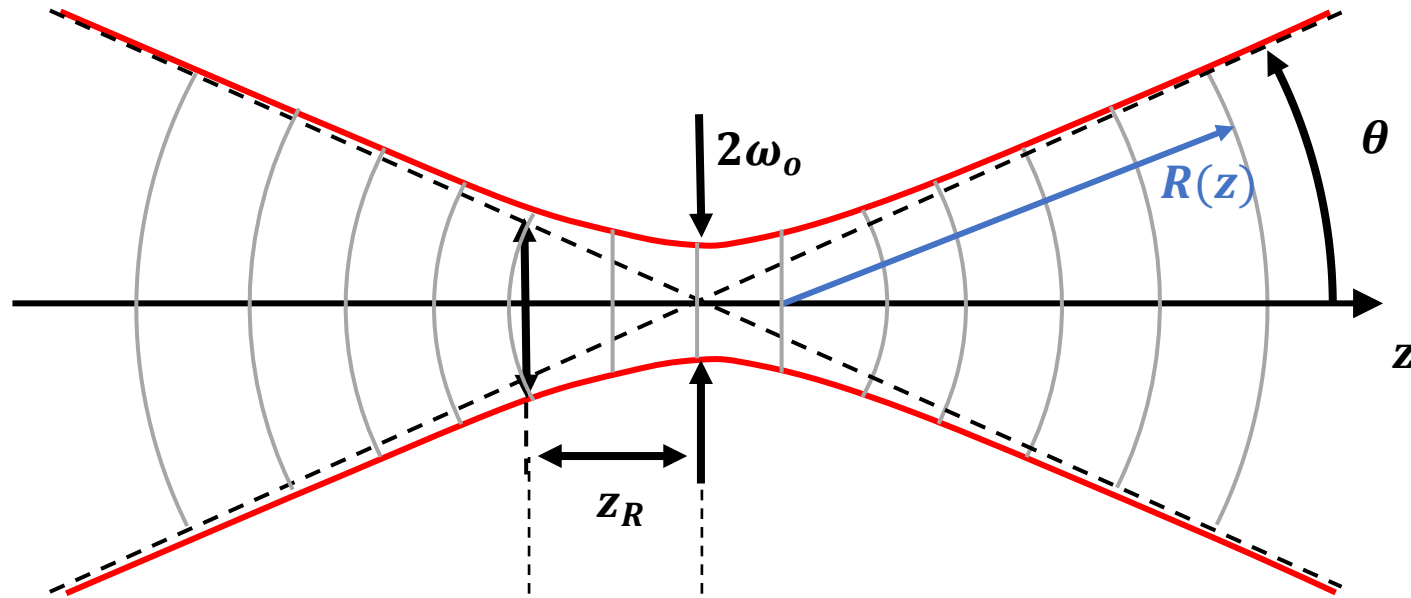
$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$

El radio mínimo ocurre cuando $z = z_R$ y vale $R(z_R) = 2 z_R = b$ **parámetro confocal**



Espejos de igual radio que las superficies confocales
permiten obtener cavidades estables
El foco de los espejos está justo en $z=0$

Haces gaussianos esféricos. T



$$e^{-jk(z-z_0)} e^{-j\psi(z)} e^{-jk\frac{(x^2+y^2)}{2R(z)}}$$

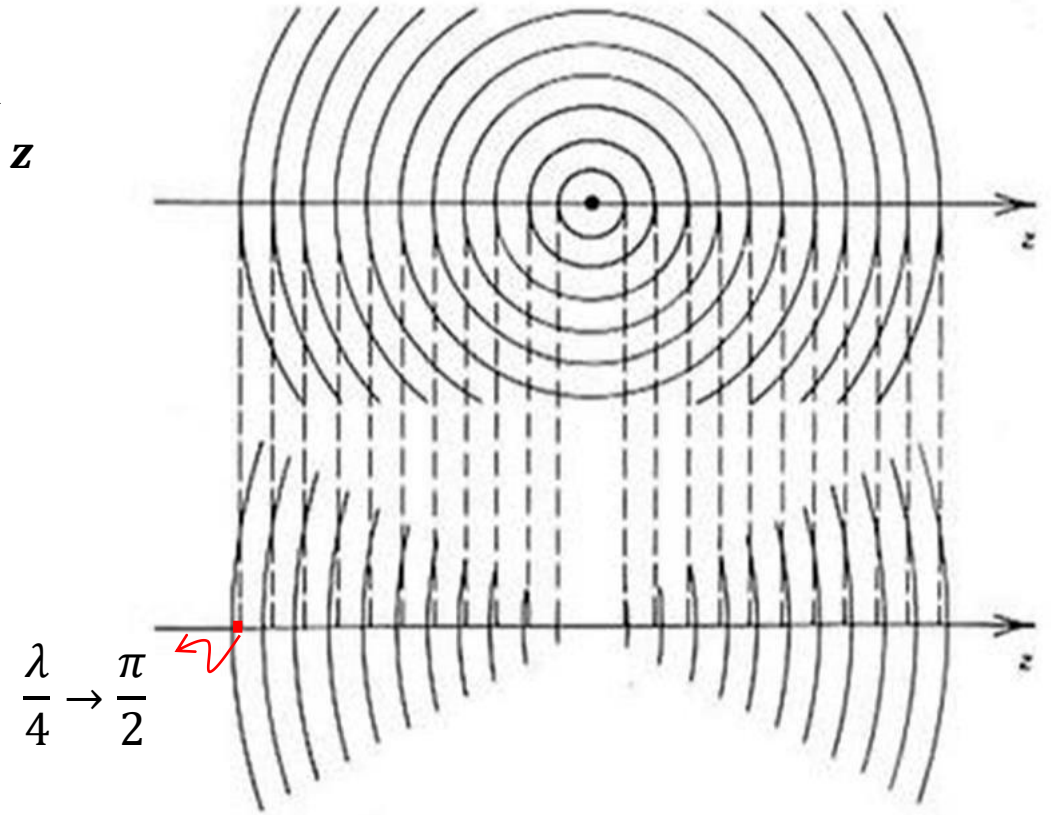


Figure 3.1-8 Wavefronts of (a) a uniform plane wave; (b) a spherical wave; (c) a Gaussian beam. At points near the beam center, the Gaussian beam resembles a plane wave. At large z the beam behaves like a spherical wave except that the phase is retarded by 90° (shown in this diagram by a quarter of the distance between two adjacent wavefronts).

Modos superiores con todos los factores: Hermite-Gauss

$$E(x, y, z) = U_n(x, z)U_m(y, z)e^{-ikz}$$

$$U_n(x, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n! \omega_o}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{q}_o}{\tilde{q}(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{q}_o \tilde{q}^*(z)}{\tilde{q}_o^* \tilde{q}(z)}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) e^{-jk\frac{x^2}{2\tilde{q}(z)}}$$

$U_m(y, z)$ (expresión análoga)

$$E(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega_o} \left(\frac{1}{2^{n+m} n! m!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{q}_o}{\tilde{q}(z)}\right) \left(\frac{\tilde{q}_o \tilde{q}^*(z)}{\tilde{q}_o^* \tilde{q}(z)}\right)^{(n+m)/2} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{-jkz}$$

E_{nm}

Ambos contribuyen al defasaje de Gouy

Modos superiores con todos los factores: Hermite-Gauss

$$\left(\frac{\tilde{q}_o}{\tilde{q}(z)} \right) \left(\frac{\tilde{q}_o \tilde{q}^*(z)}{\tilde{q}_o^* \tilde{q}(z)} \right)^{(n+m)/2}$$

$$\tilde{q}(z) = z + jz_R$$

$$\frac{\tilde{q}(z_o)}{\tilde{q}(z)} = \frac{z_R}{|\tilde{q}(z)|} e^{j\psi(z)} = \frac{\omega_o}{\omega(z)} e^{j\psi(z)}$$

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$$

$$\left(\frac{\tilde{q}_o \tilde{q}^*(z)}{\tilde{q}_o^* \tilde{q}(z)} \right)^{(n+m)/2} = \left(\frac{jz_R}{-jz_R} \frac{z - jz_R}{z + jz_R} \right)^{(n+m)/2} = \left(\frac{jz + z_R}{z_R - jz} \right)^{(n+m)/2} = \left(\frac{|\tilde{q}(z)| e^{j\psi(z)}}{|\tilde{q}(z)| e^{-j\psi(z)}} \right)^{(n+m)/2} = e^{j\psi(z)(m+n)}$$

$$\left(\frac{\tilde{q}_o}{\tilde{q}(z)} \right) \left(\frac{\tilde{q}_o \tilde{q}^*(z)}{\tilde{q}_o^* \tilde{q}(z)} \right)^{(n+m)/2} = \frac{\omega_o}{\omega(z)} e^{j\psi(z)(m+n+1)}$$

$$\Phi(z) = \psi(z)(m + n + 1) \text{ Fase de Gouy.}$$

$$E(x, y, z) = E_{nm} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{-jkz} e^{j\psi(z)(m+n+1)}$$

Hermite- Gauss

$$E(x, y, z) = E_{nm} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{-jkz} e^{j\psi(z)(m+n+1)}$$

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)$$

n, m cuantos ceros tengo en x e y respectivamente

Laguerre Gauss

$$E(r, \theta, z) = E_{pm} \frac{1}{\omega(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right)^m L_p^m \left(\frac{2r^2}{\omega(z)^2} \right) e^{-jk \frac{r^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{jm\theta} e^{-ikz} e^{j\psi(z)(2p+m+1)}$$

m, p cuantos ceros tengo en r y θ respectivamente

Hermite- Gauss

$$E(x, y, z) = E_{nm} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{-jkz} e^{j\psi(z)(m+n+1)}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ \phi(0,0, z) &= kz - \psi(z)(m + n + 1) \end{aligned}$$

n, m cuantos ceros tengo en x e y respectivamente

Laguerre Gauss

$$E(r, \theta, z) = E_{pm} \frac{1}{\omega(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right)^m L_p^m \left(\frac{2r^2}{\omega(z)^2} \right) e^{-jk \frac{r^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{jm\theta} e^{-ikz} e^{j\psi(z)(2p+m+1)}$$

$$\begin{aligned} r = 0, \theta &= 0 \\ \phi(0,0, z) &= kz - \psi(z)(2p + m + 1) \end{aligned}$$

m, p cuantos ceros tengo en r y θ respectivamente

Frecuencias de los modos superiores



La fase total en la dirección axial es

$$\phi(z) = kz - \psi(z)(m + n + 1)$$

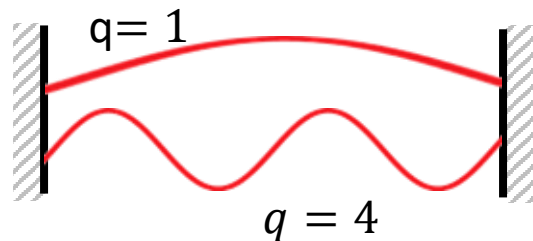
$$\Delta\phi(z) = \phi(z_2) - \phi(z_1) = k(z_2 - z_1) - (\psi(z_2) - \psi(z_1))(m + n + 1) = kd - \Delta\psi(m + n + 1)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{c} \nu$$

d : largo de la cavidad

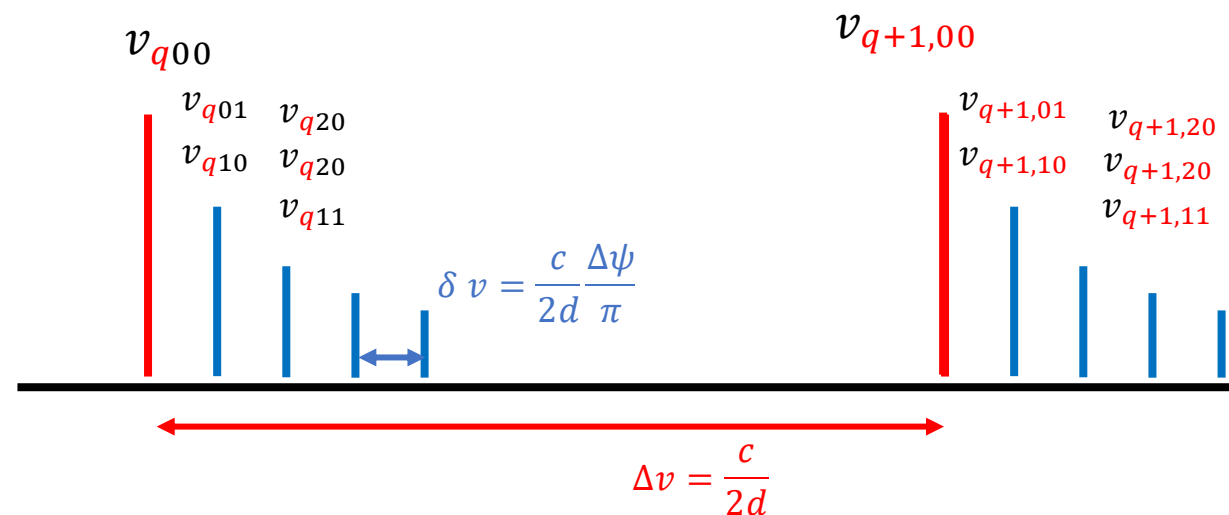
Condición de resonancia:

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta\phi = \pi \Rightarrow \Delta\phi(z) = q\pi$$

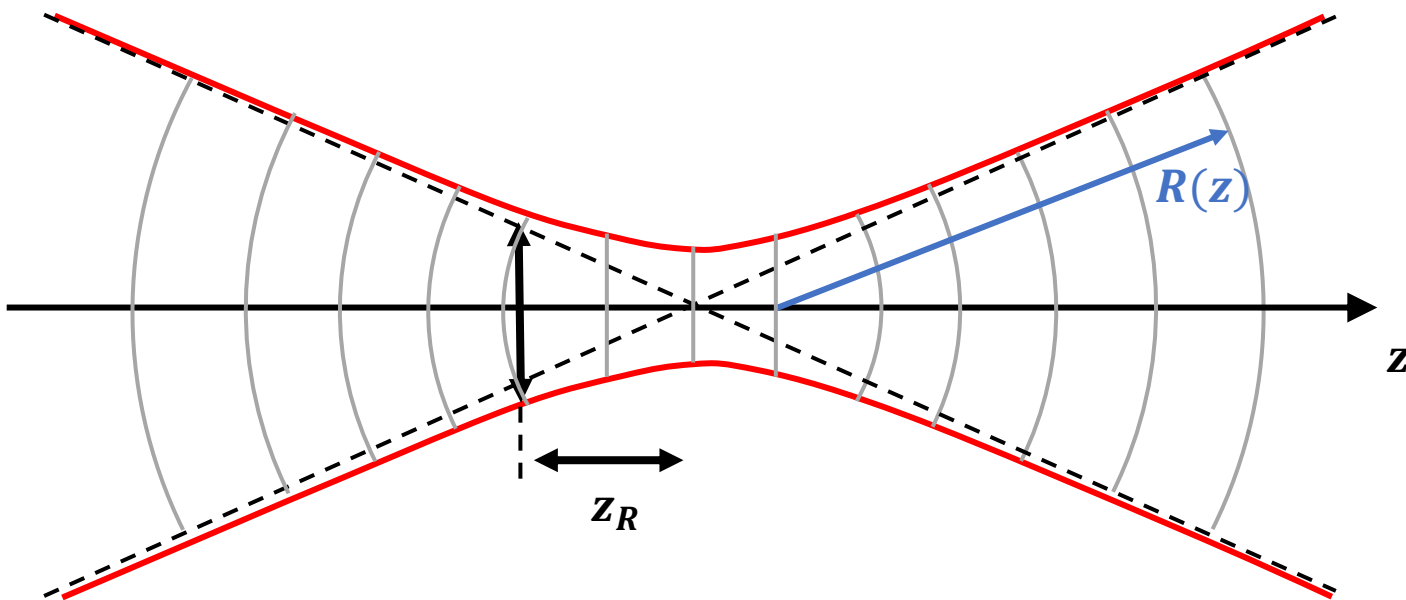


$$\left(\frac{2\pi}{c} \nu\right) d - \Delta\psi(m + n + 1) = q\pi$$

$$\nu_{qmn} = \left[q + \frac{\Delta\psi}{\pi} (m + n + 1) \right] \frac{c}{2d}$$

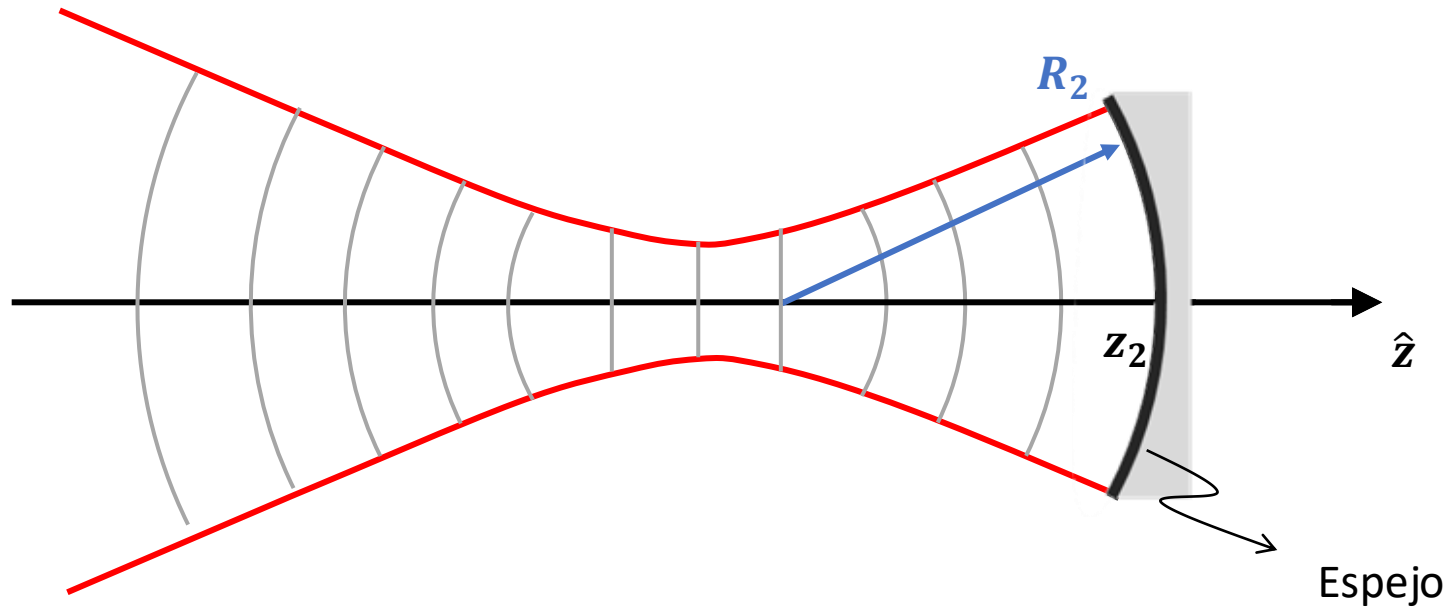


Haces Gaussianos y cavidades formadas por dos espejos



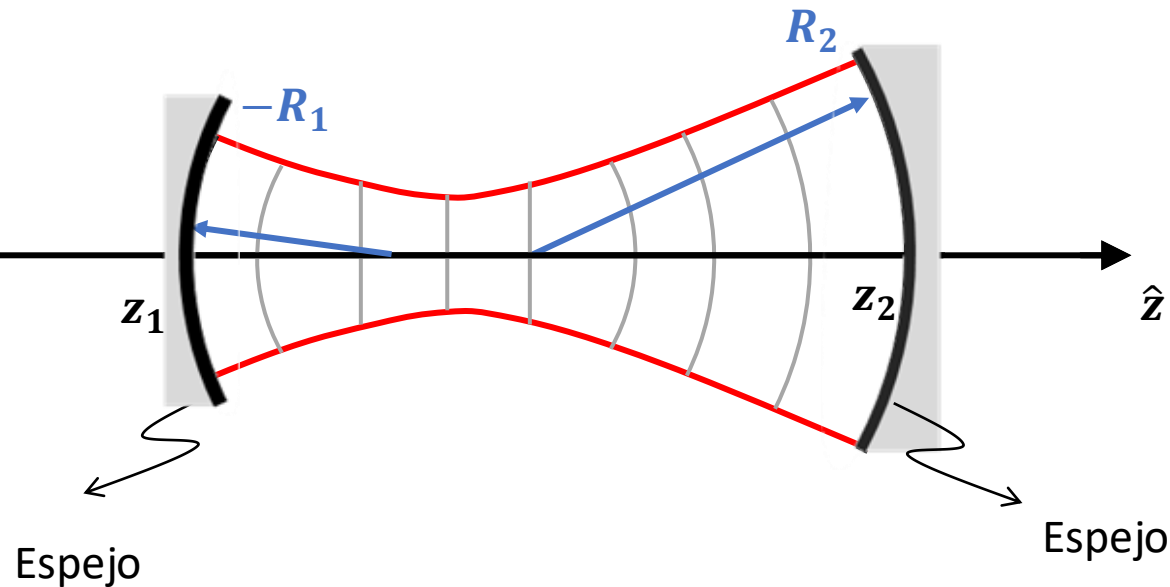
El haz gaussiano está totalmente determinado si conozco ω_0 y λ

Haces Gaussianos y cavidades formadas por dos espejos



Si en z_2 pongo un espejo de radio R_2 , el haz se refleja copiando exactamente el haz incidente

Haces Gaussianos y cavidades formadas por dos espejos

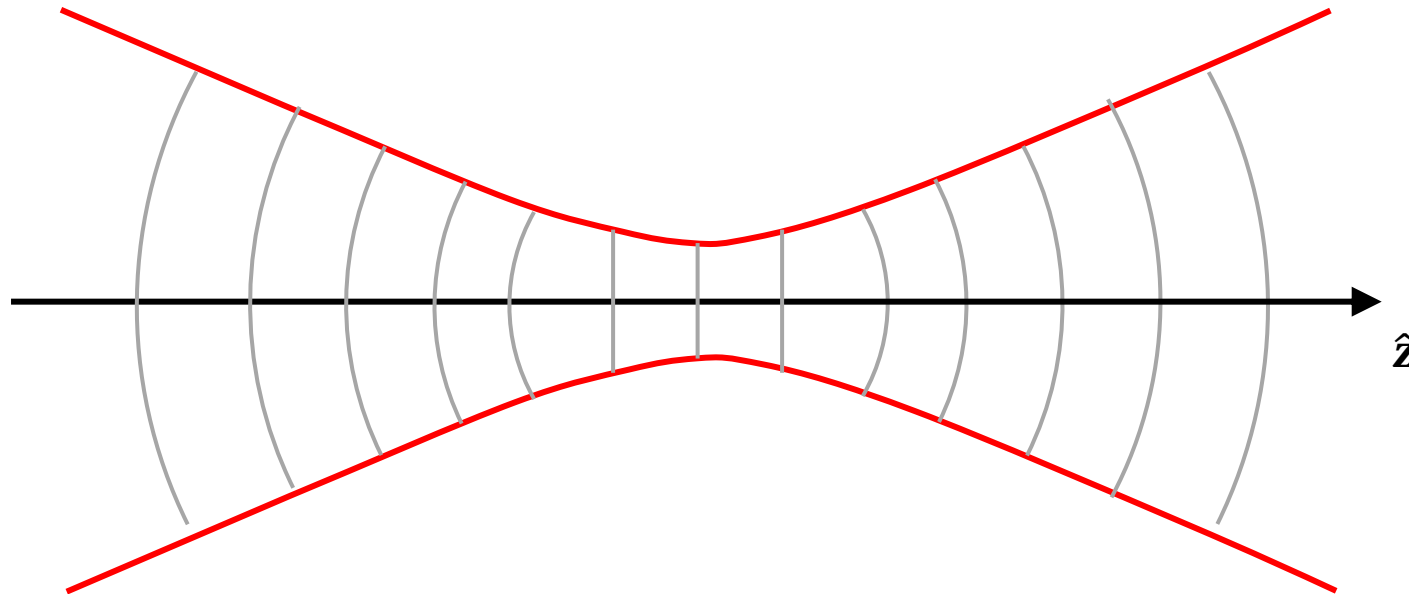


Si en z_1 y z_2 pongo espejos de radio R_1 y R_2 (iguales al radio de curvatura del haz), el haz se refleja entre ambos espejos copiando exactamente la forma del haz

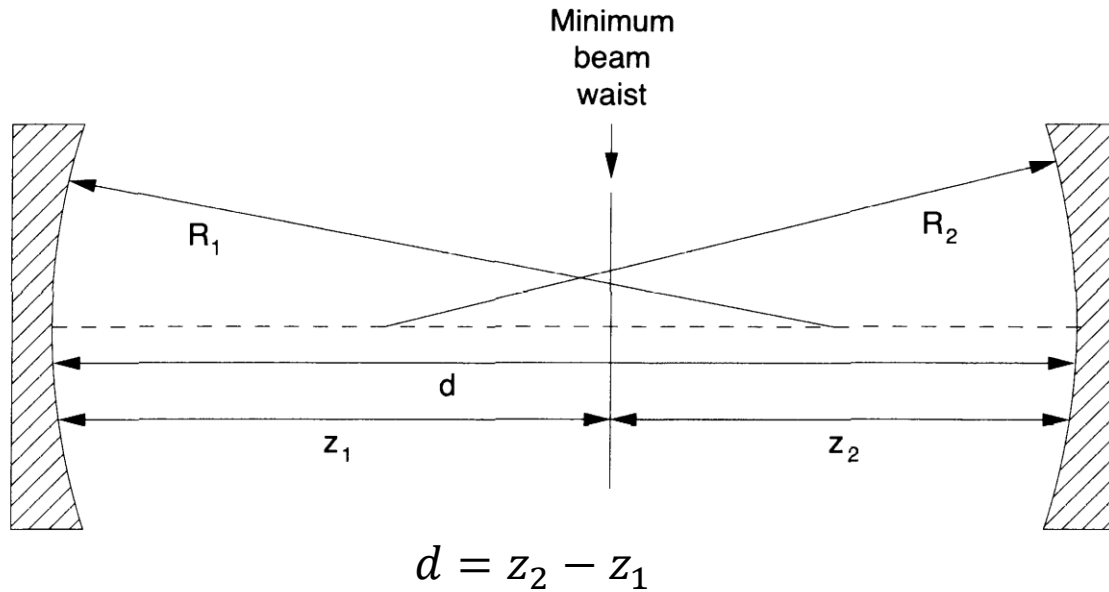
Haz estable
Cavidad estable

Además, se pueden encontrar una gran variedad de radios de espejos que da cavidades estables

Haces Gaussianos y cavidades formadas por dos espejos



Cavidades formadas por dos espejos



Tengo dos espejos de radio R_1, R_2 ,

- ¿a que distancia los pongo para que el resonador sea estable?
- ¿Cuál es el tamaño de la cintura? ¿En qué parte del resonador está?

Si es estable, R_1 y R_2 , deben coincidir con el radio de curvatura del haz en la posición z_1 y z_2

$$R(z_1) = -R_1 = z_1 + \frac{1}{z_R} z_1^2$$

$$R(z_2) = R_2 = z_2 + \frac{1}{z_R} z_2^2$$

$$\omega(z_1) = \omega_1 = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_R}\right)^2}$$
$$\omega(z_2) = \omega_2 = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_R}\right)^2}$$

$$\psi(z_1) = \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)$$

$$\psi(z_2) = \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right)$$

Cavidades formadas por dos espejos



$$\begin{aligned} R(z_1) = -R_1 = z_1 + \frac{1}{z_1} z_R^2 & \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= z_1^2 + z_R^2 + R_1 z_1 \\ 0 &= z_2^2 + z_R^2 - R_2 z_2 \end{aligned} & \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= -\frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \\ z_2 &= \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$$

Posiciones en donde colocar los espejos

Cual es la cintura del haz ($\omega_0 \leftrightarrow z_R$)?

$$d = z_2 - z_1$$

$$z_R^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}$$

$$d = z_2 - z_1$$

$$z_2 - z_1 = d = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} - \left(-\frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \right)$$

Cualquier combinación de signos

$$d - \frac{R_2}{2} - \frac{R_1}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2}$$

+ si los signos del paréntesis son iguales
- Si los signos del paréntesis son distintos

$$\left(d - \frac{R_2}{2} - \frac{R_1}{2} \right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \right)^2 = \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4} - 2z_R^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2}$$

$$\left(\left(d - \frac{R_2}{2} - \frac{R_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4} \right) + 2z_R^2 \right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \right)^2$$

$$\left(\left(d - \frac{R_2}{2} - \frac{R_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4} \right) + 2z_R^2 \right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \right)^2$$

$$\frac{1}{4} (2d^2 + R_1 R_2 - 2d(R_1 + R_2) + 4z_R^2)^2 = \frac{1}{4} (R_2^2 - 4z_R^2)(R_1^2 - 4z_R^2)$$

$$z_R^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}$$

Cavidades formadas por dos espejos



$$\begin{aligned} R(z_1) = -R_1 = z_1 + \frac{1}{z_1} z_R^2 &\quad \longrightarrow \quad 0 = z_1^2 + z_R^2 + R_1 z_1 &\quad \longrightarrow \quad z_1 = -\frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_R^2} \\ R(z_2) = R_2 = z_2 + \frac{1}{z_2} z_R^2 &\quad \longrightarrow \quad 0 = z_2^2 + z_R^2 - R_2 z_2 &\quad \longrightarrow \quad z_2 = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_R^2} \end{aligned}$$

Posiciones en donde colocar los espejos

Cual es la cintura del haz ($\omega_o \leftrightarrow z_R$)?

$$d = z_2 - z_1$$

$$z_R^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2}$$

Parámetros de estabilidad

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv 1 - \frac{d}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{d}{1 - g_1} \\ g_2 &\equiv 1 - \frac{d}{R_2} \rightarrow R_2 = \frac{d}{1 - g_2} \end{aligned}$$

$$z_R^2 = \frac{d^2 g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2}$$

Cavidades formadas por dos espejos



$$z_R^2 = \frac{d^2 g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2} \geq 0$$

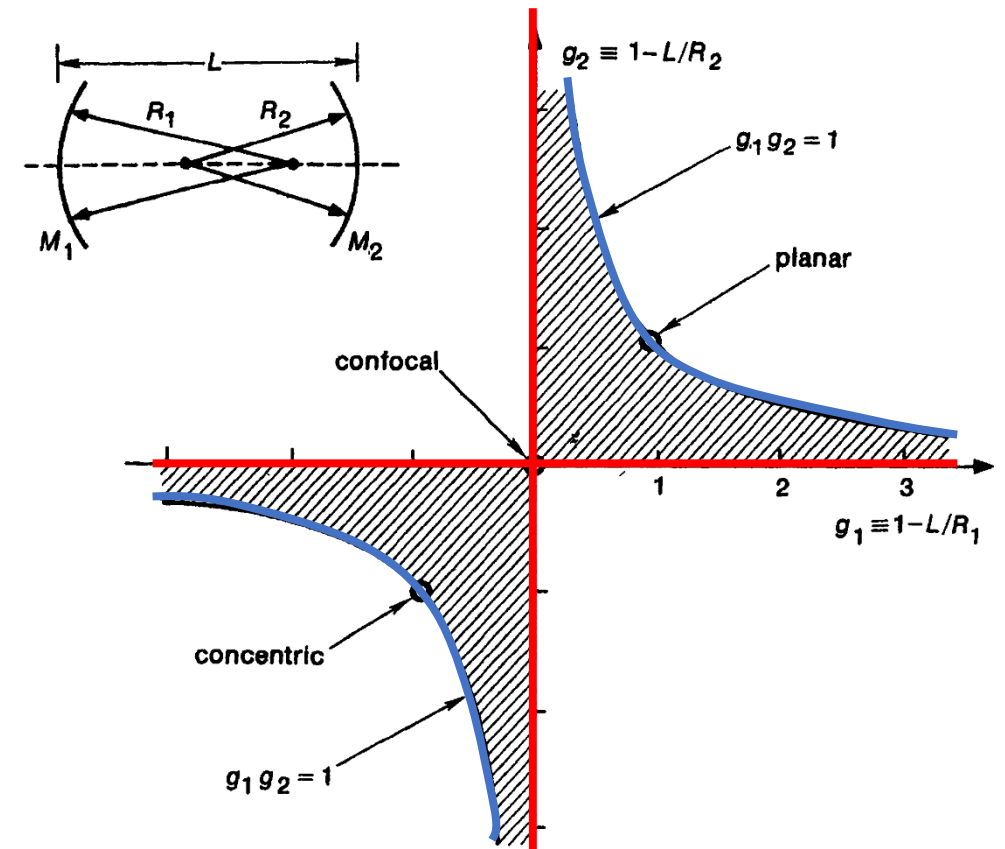
$$0 \leq (1 - g_1 g_2) \rightarrow g_1 g_2 \leq 1 \quad g_1 g_2 \geq 0$$

Si no se cumplen, las pérdidas por difracción son altas

Una cavidad sea estable significa que puede sostener un modo espacial que se reproduce luego de sucesivos viajes de ida y vuelta, con pérdidas por difracción bajas.

Criterio de estabilidad

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$
$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$



Cavidades formadas por dos espejos



$$z_R^2 = \frac{d^2 g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2} \geq 0$$

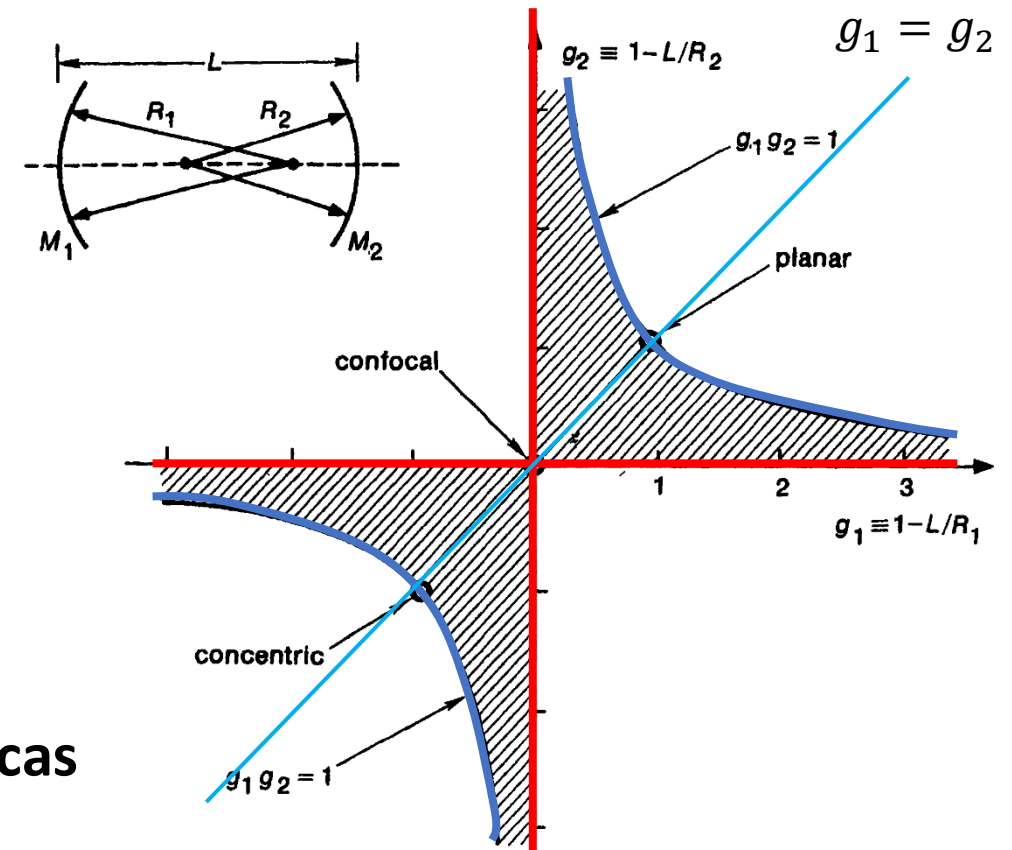
$$0 \leq (1 - g_1 g_2) \rightarrow g_1 g_2 \leq 1 \quad g_1 g_2 \geq 0$$

Si no se cumplen, las pérdidas por difracción son altas

Criterio de estabilidad

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$



Cavidades simétricas

Cavidades formadas por dos espejos



Cavidades simétricas

$$-R_1 = R_2 = R \quad g_1 = g_2 = g = 1 - \frac{d}{R}$$

$$z_2 - z_1 = d$$

$$-z_1 = z_2 = \frac{d}{2}$$

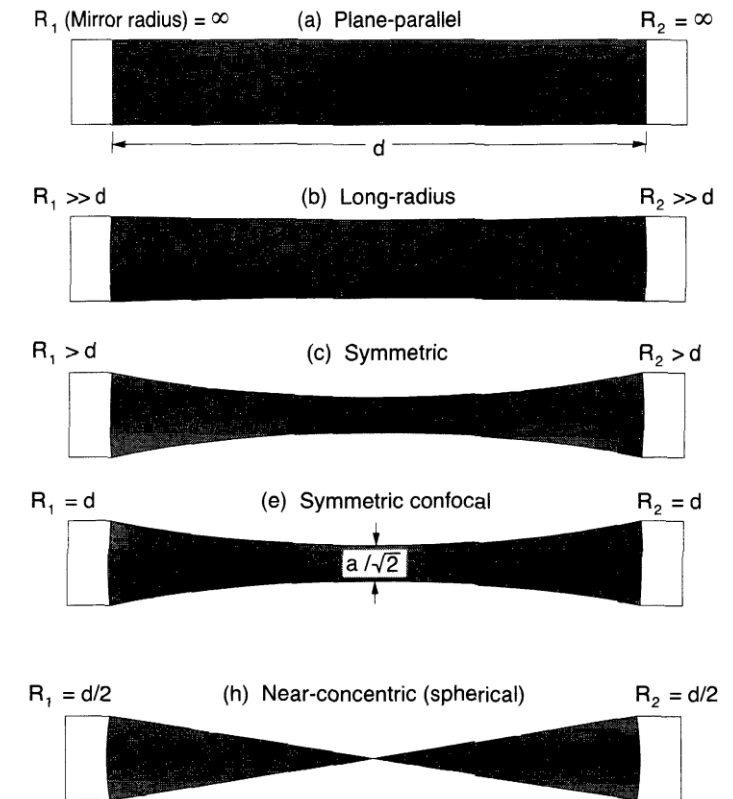
Parámetro de Rayleigh y cintura

$$z_R^2 = \frac{d^2 g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2}$$

$$z_R^2 = \frac{d^2 g^2 (1 - g^2)}{(2g - 2g^2)^2} = \frac{d^2 (1 - g^2)}{4(1 - g)^2} = \frac{d^2 (1 - g)(1 + g)}{4(1 - g)^2} = \frac{d^2 (1 + g)}{4(1 - g)}$$

$$z_R^2 = \frac{(2R - d)d}{4} = \frac{1}{2} \left(R - \frac{d}{2} \right) d$$

$$\omega_o = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{2} \right)^{1/4} (R - d/2)^{1/4}$$



Cavidades formadas por dos espejos



Tamaño del haz en los espejos

$$\omega_1 = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_R}\right)^2} = \omega_o \sqrt{1 + \frac{d^2}{4z_R^2}} = \omega_2$$

$$z_R^2 = \frac{1}{2} \left(R - \frac{d}{2}\right) d \quad \omega_o = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/4} (R - d/2)^{1/4}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_o \sqrt{1 + \frac{d^2}{2 \left(R - \frac{d}{2}\right) d}} = \omega_o \sqrt{\frac{2R}{(2R - d)}}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \left(\frac{\lambda d}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2R^2}{d \left(R - \frac{d}{2}\right)}\right)^{1/4}$$

ω_1 y ω_2 tienen un mínimo en $R = d$

Cavidades formadas por dos espejos

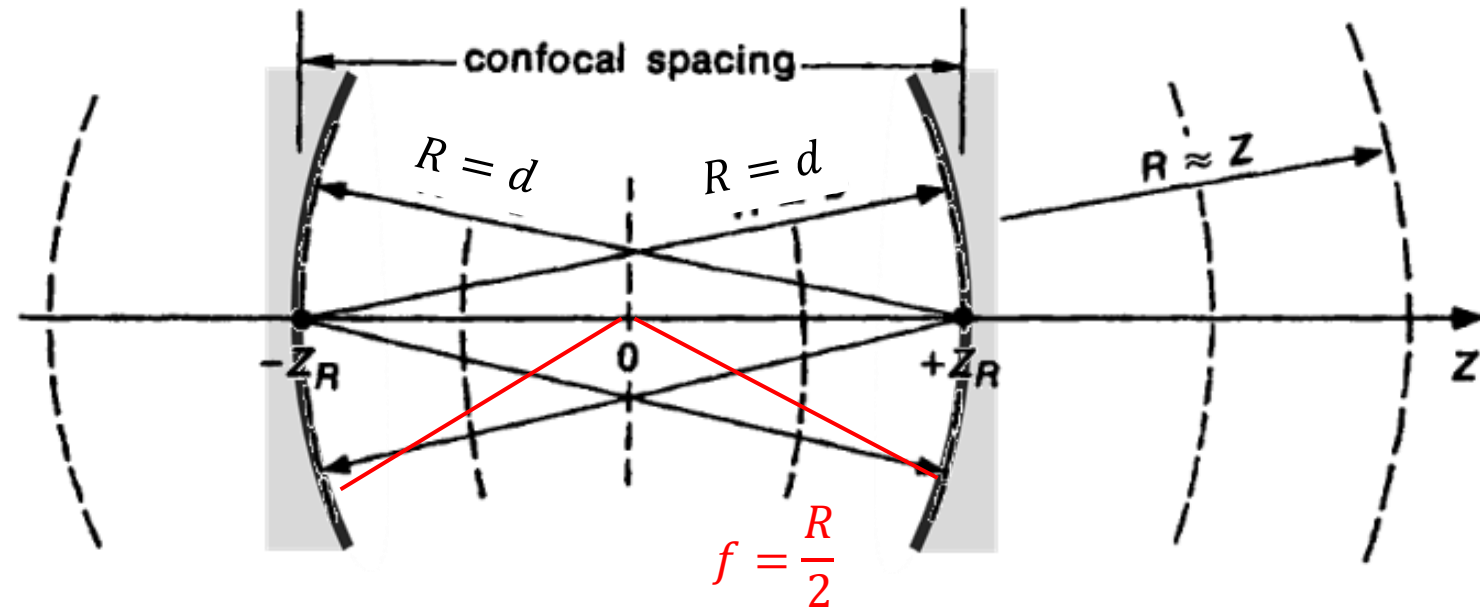


$R = d \rightarrow$ Cavity confocal (los focos de los espejos coinciden)

$$\omega_1 = \omega_2 = \left(\frac{\lambda d}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2R^2}{d \left(R - \frac{d}{2} \right)} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{d \lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \omega_o$$

$$z_R^2 = \frac{d^2}{4} \quad \omega_o = \left(\frac{z_R \lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d \lambda}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega_o^{conf}$$

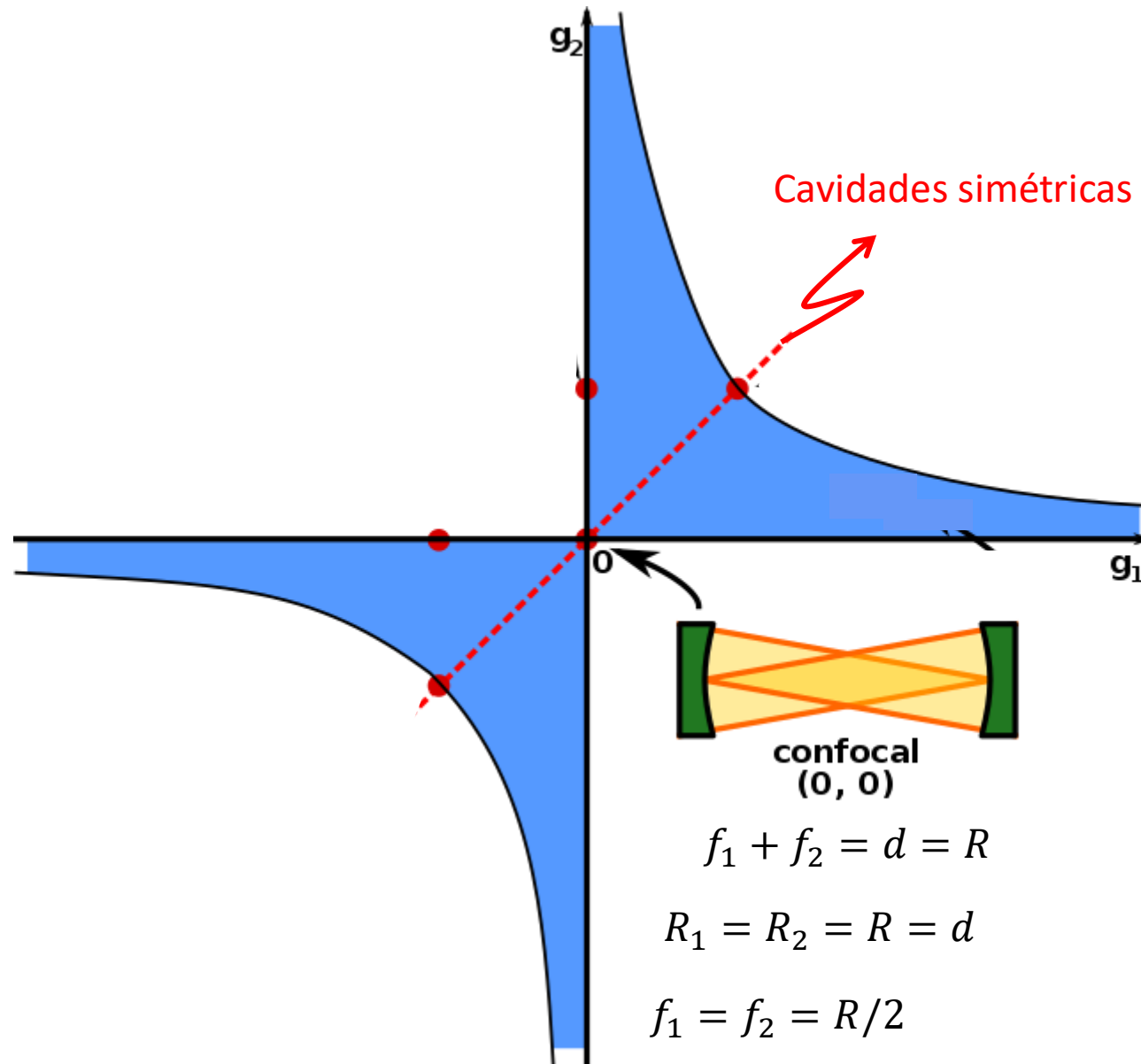
$$g_1 = g_2 = 1 - \frac{d}{R} = 0$$



Cavidad confocal

La que produce el mínimo tamaño medio del modo en la cavidad

Cavidades formadas por dos espejos



$$g_1 \equiv 1 - \frac{d}{R_1}$$
$$g_2 \equiv 1 - \frac{d}{R_2}$$

$$f_1 + f_2 = d = R$$

$$R_1 = R_2 = R = d$$

$$f_1 = f_2 = R/2$$

Cavidades formadas por dos espejos



Como es el tamaño del modo para cavidades simétricas no confocales $R \neq d$

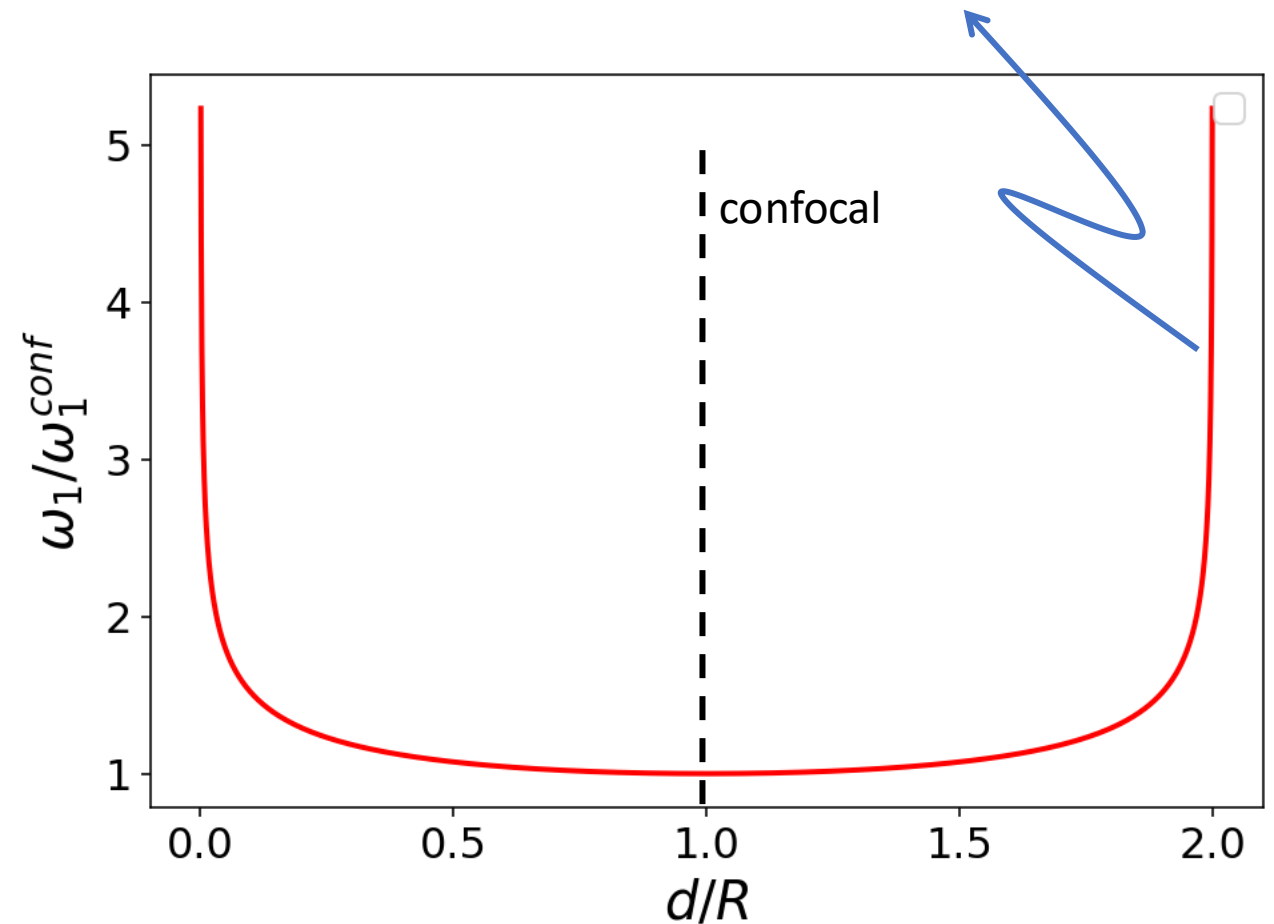
$$\omega_1 = \omega_2 = \left(\frac{\lambda d}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2R^2}{d \left(R - \frac{d}{2} \right)} \right)^{1/4}$$

$$\omega_1^{conf} = \left(\frac{d \lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \omega_o^{conf}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_1^{conf}} = \frac{\left(\frac{\lambda d}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{d \lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2R^2}{d \left(R - \frac{d}{2} \right)} \right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2R^2}{d \left(R - \frac{d}{2} \right)} \right)^{1/4}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_1^{conf}} = \left(\frac{1}{\left(\frac{d}{R} \right) \left(2 - \frac{d}{R} \right)} \right)^{1/4}$$

Pérdidas por difracción muy grandes (tamaño del haz mucho más grandes que los espejos)



Cavidades formadas por dos espejos



Cavidad simétrica concéntrica $d = 2R$

$$-R_1 = R_2 = R \qquad g_1 = g_2 = 1 - \frac{d}{R} = -1$$

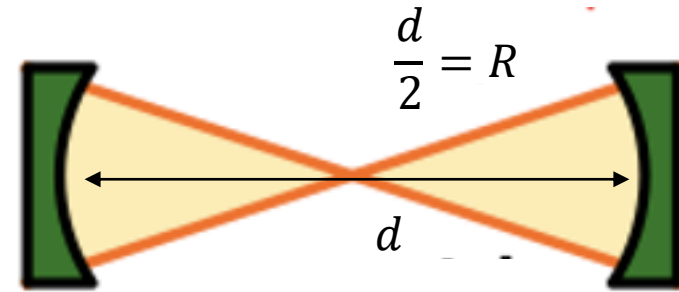
$$z_2 - z_1 = d$$

$$-z_1 = z_2 = \frac{d}{2} = R$$

$$\omega_1 = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{R}{z_R}\right)^2} = \omega_2$$

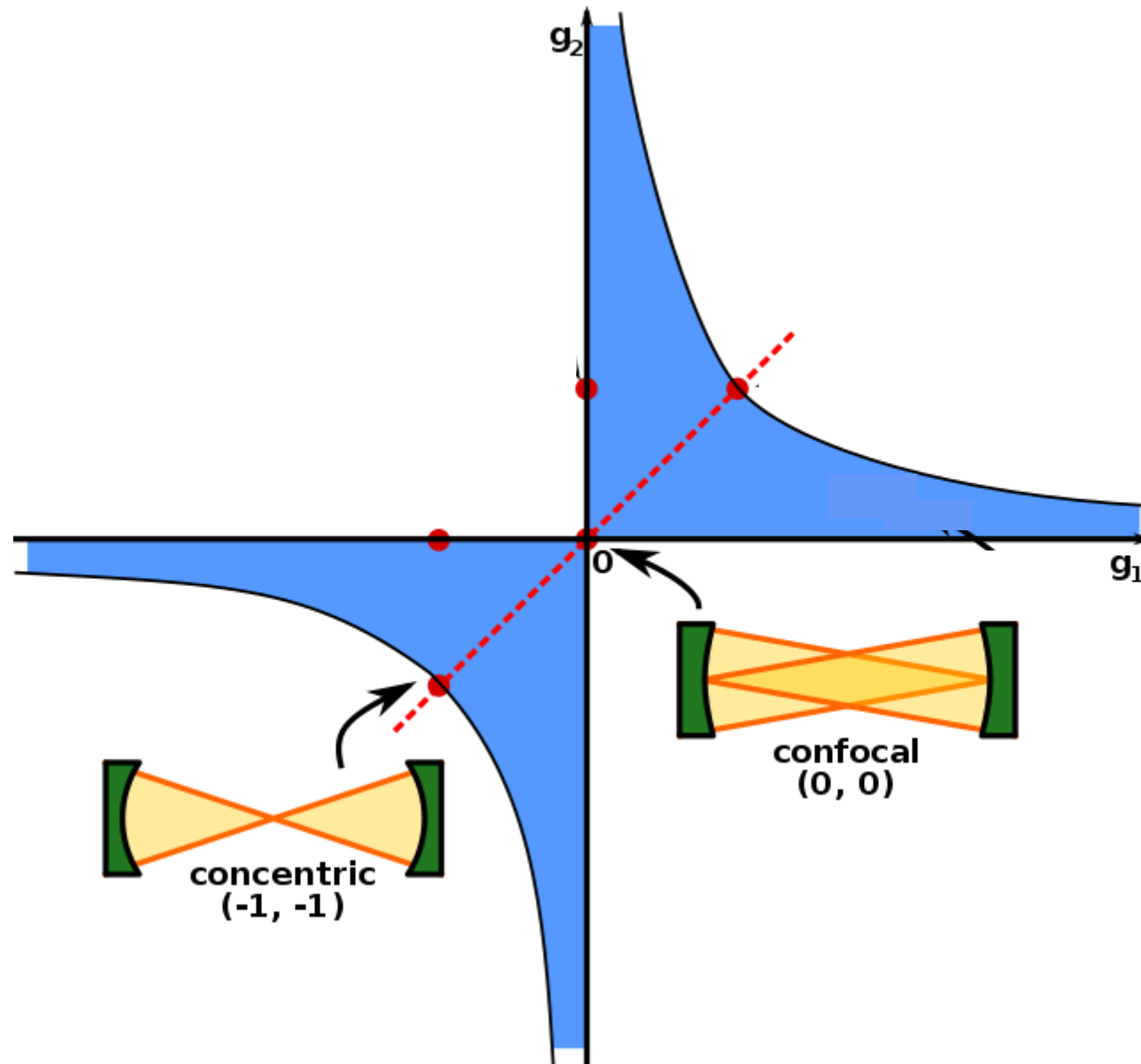
$$z_R^2 = \frac{1}{2} \left(R - \frac{d}{2}\right) d = 0$$

$$\omega_o = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/4} (R - d/2)^{1/4} = 0$$



La cintura es tan pequeña que no deja extraer energía de la cavidad

Cavidades formadas por dois espelhos

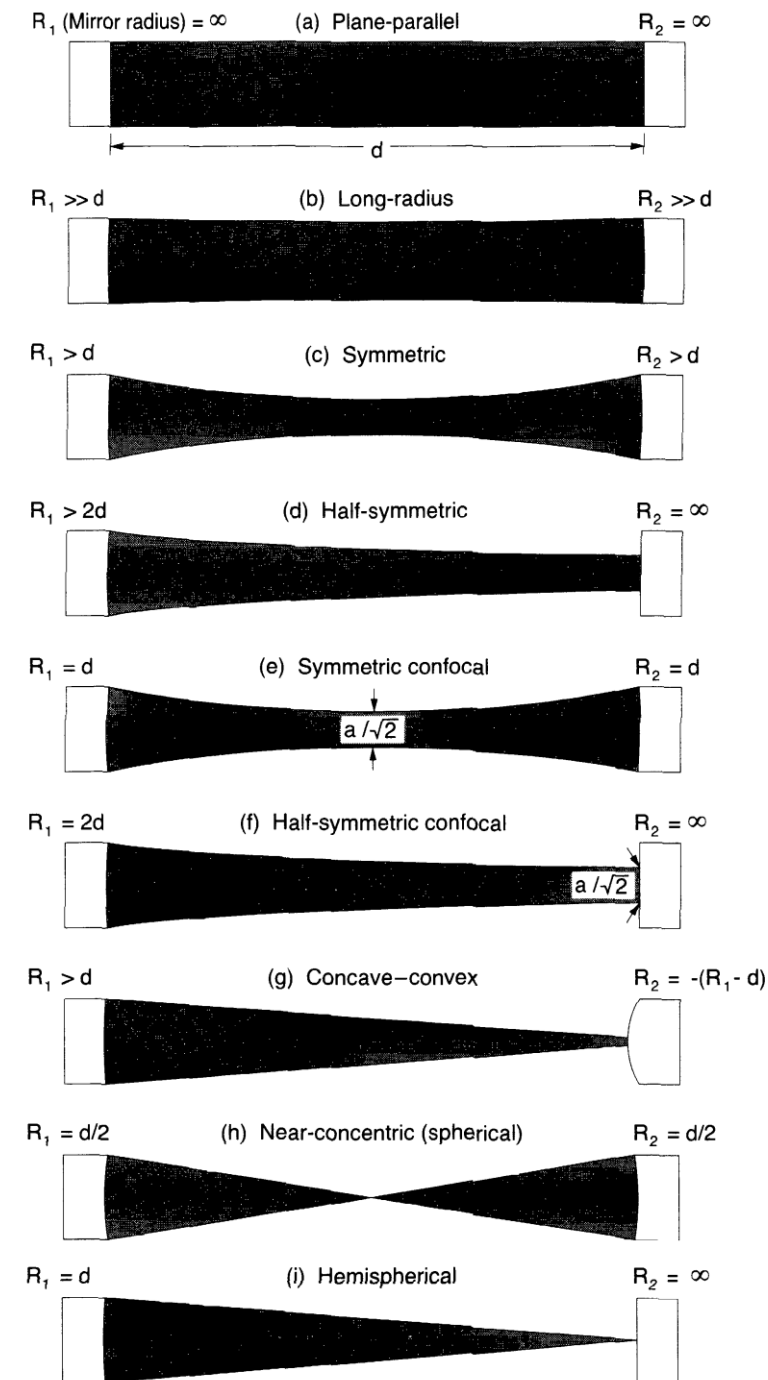
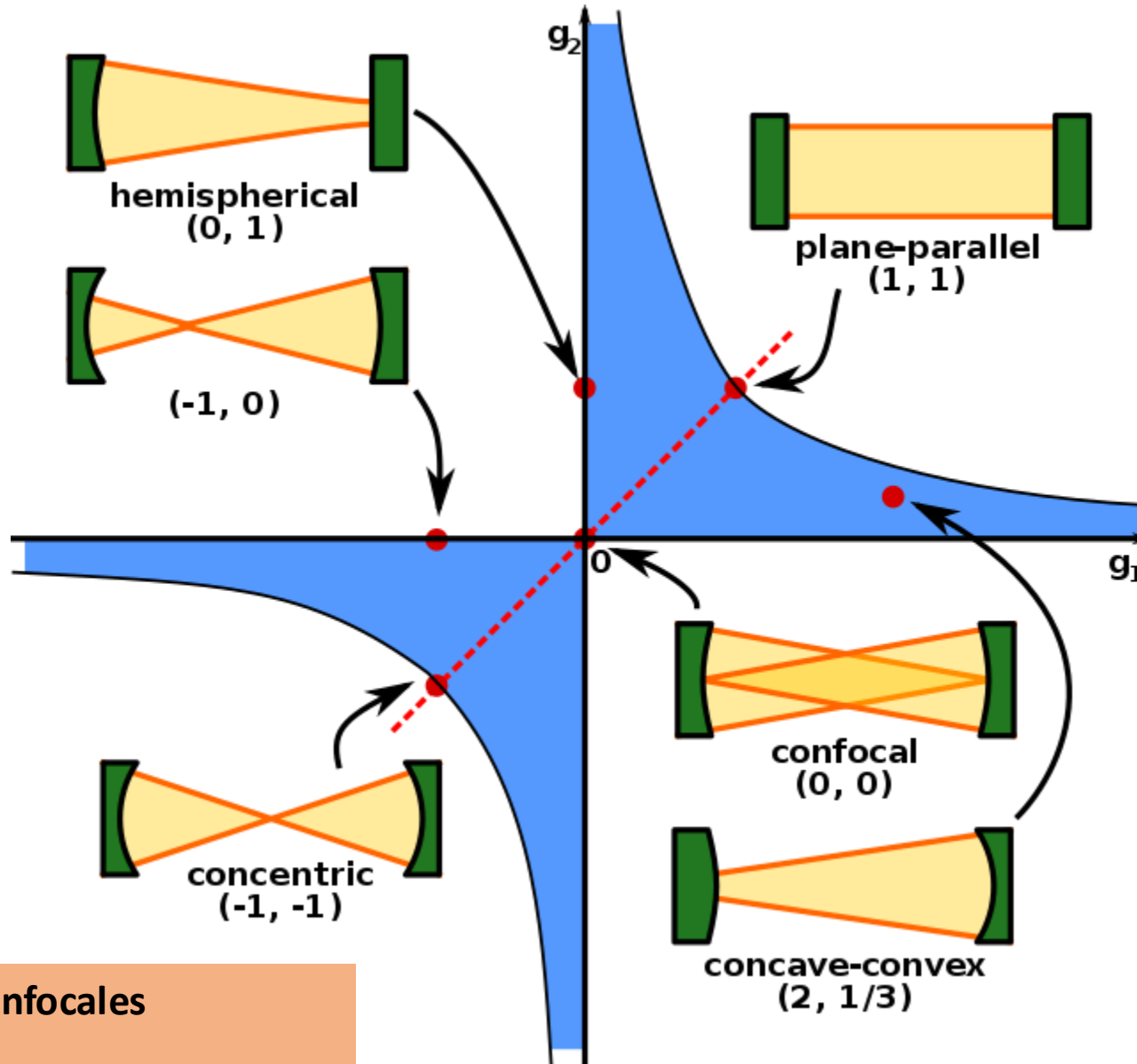


$$g_1 \equiv 1 - \frac{d}{R_1}$$
$$g_2 \equiv 1 - \frac{d}{R_2}$$

Cavidades formadas por dos espejos

$$g_1 \equiv 1 - \frac{d}{R_1}$$

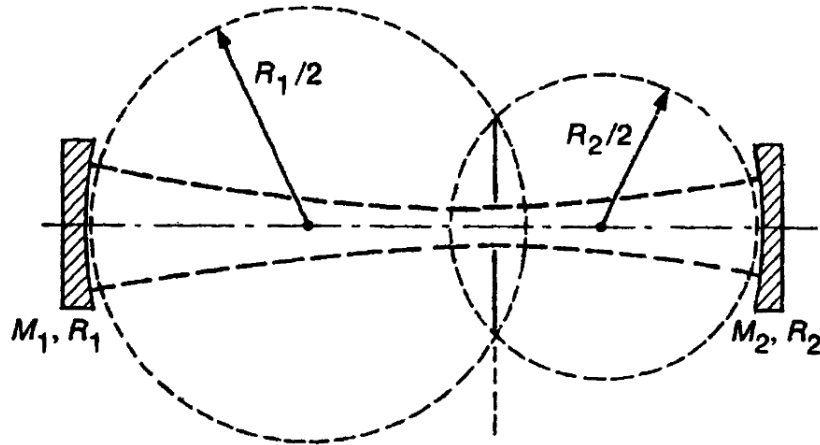
$$g_2 \equiv 1 - \frac{d}{R_2}$$



Qué pasa con las confocales
asimétricas? → TP

waist inside:

Truco para hallar posición de la cintura en una cavidad estable



waist outside:

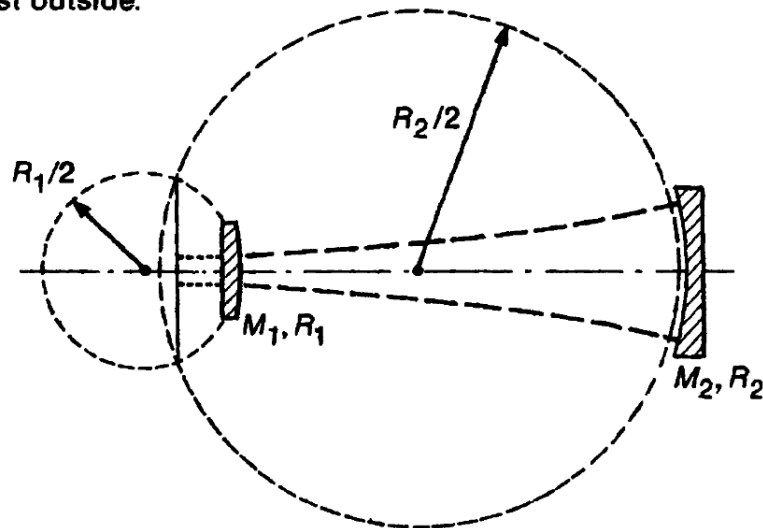


FIGURE 19.5
Circle diagrams for stable optical resonators.

Comentario sobre frecuencias modos superiores

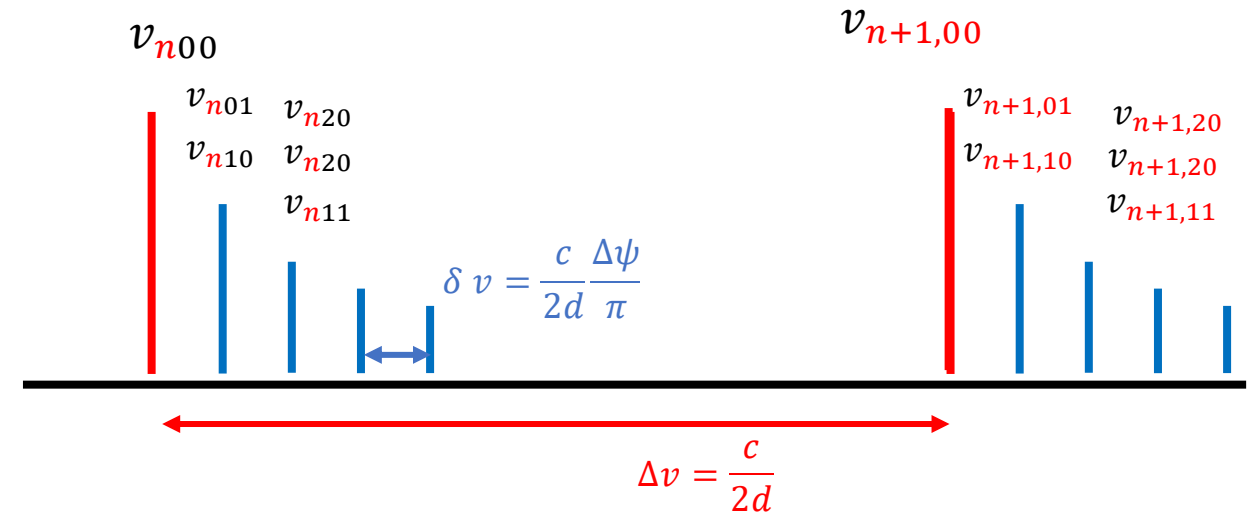


$$\nu_{qmn} = \left[q + \frac{\Delta\psi}{\pi} (m + n + 1) \right] \frac{c}{2d}$$

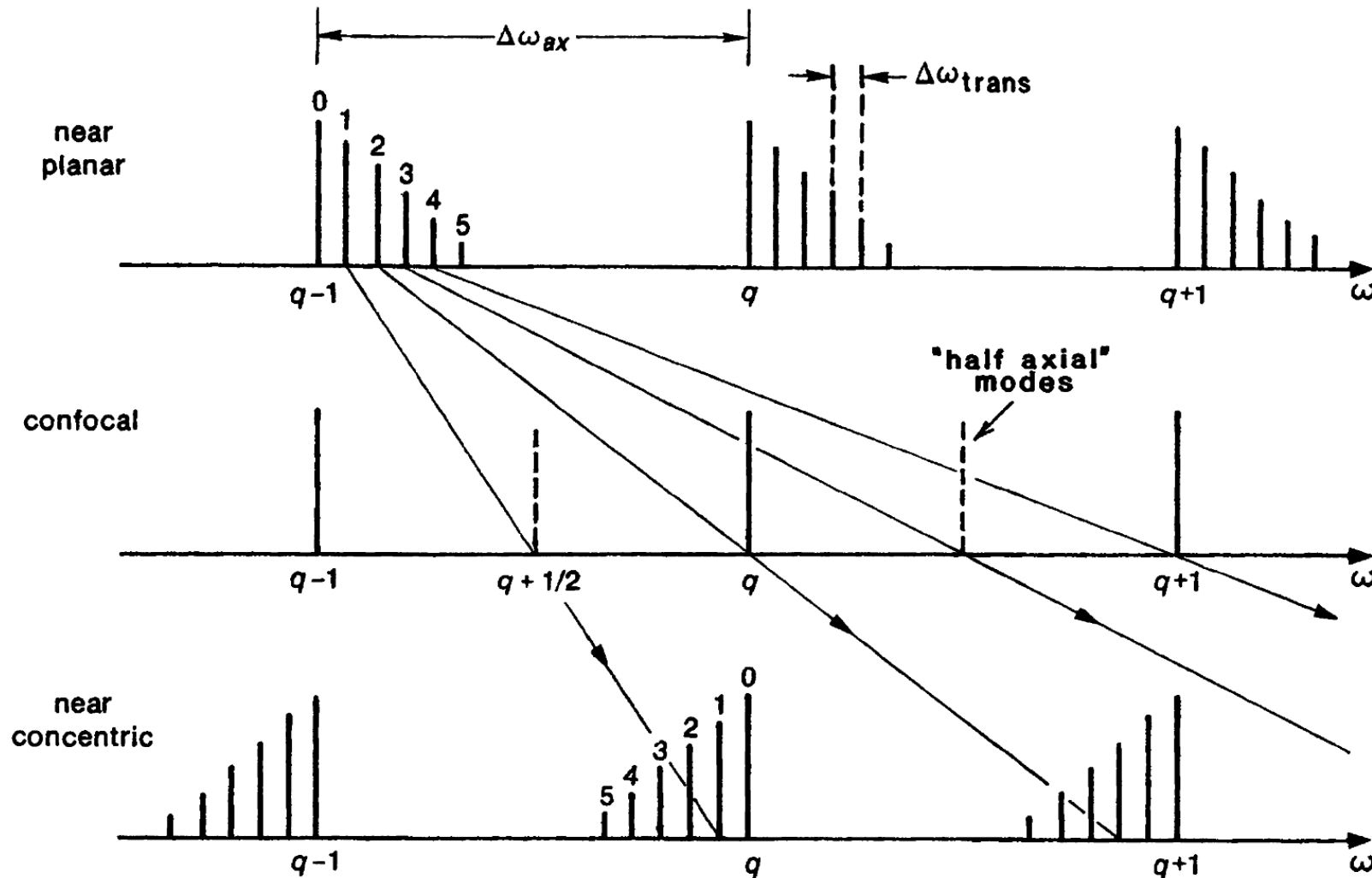
$$\psi(z_1) = \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) \quad \psi(z_2) = \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right)$$

$$\frac{\Delta\psi}{\pi} = \frac{\psi(z_2) - \psi(z_1)}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(\pm g_1 g_2)$$

- 0 cavidad plana o casi plana $g_1 g_2 \rightarrow 1$
- 1/2 cavidad confocal o casi confocal $g_1 g_2 \rightarrow 0$
- 1 Cavidad concéntrica o casi concéntrica $g_1 g_2 \rightarrow -1$



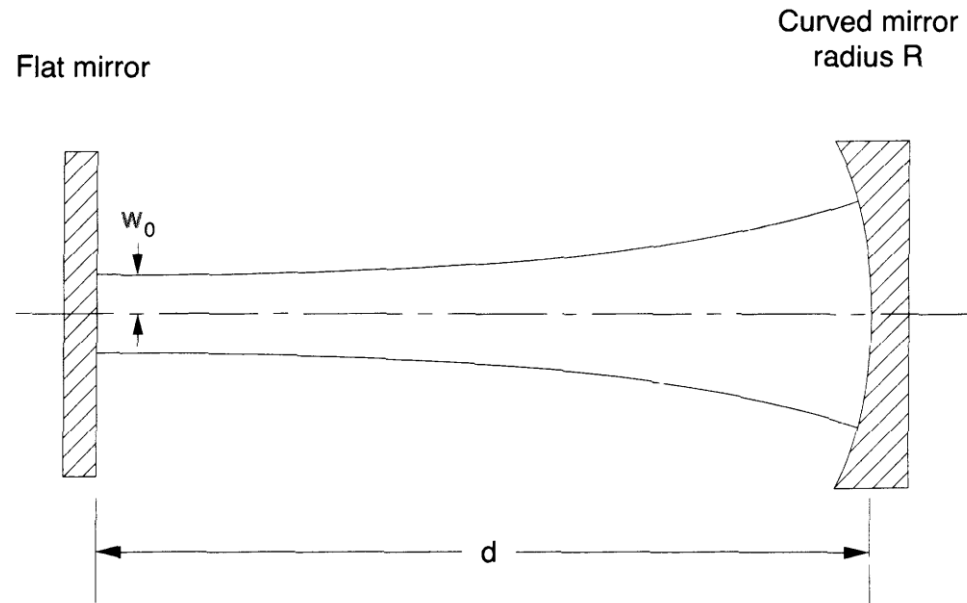
Comentario sobre frecuencias modos superiores



Volumen del modo dentro de la cavidad



Ejemplo Hermite Gaussian, cavidad semi- simétrica



Si conozco N_u (población por unidad de volumen), y asumo que todas las transiciones se convierten fotones del laser por emisión estimulada, puedo estimar la potencia radiada

$$P = N_u V A_{ul} h\nu_{ul}$$

¿Que volumen debo considerar?

VOLUMEN TOTAL

$$V$$

VOLUMEN DEL MODO

$$V_{\text{modo}} = \int_{\text{cavidad}} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{max}}} dV$$

VOLUMEN DEL MODO EN EL MEDIO ACTIVO

$$V_{\text{modo,act}} = \int_{\text{medio activo}} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{max}}} dV$$

Volumen del modo dentro de la cavidad



Volumen del modo: volumen efectivo ocupado por la energía del campo

1. Volumen del modo de la cavidad: para calcular, por ejemplo, la energía almacenada en la cavidad

$$V_{\text{modo}} = \int_{\text{cavidad}} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{max}}} dV$$

2. Volumen del modo dentro del medio activo: Para calcular potencia generada, ganancia o energía extraída del medio activo: Que parte del modo que se superpone con el material activo:

$$V_{\text{modo,act}} = \int_{\text{medio activo}} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{max}}} dV$$

Factor de solapamiento:

$$\Gamma = \frac{\int_{\text{medio activo}} I(\mathbf{r}) dV}{\int_{\text{cavidad}} I(\mathbf{r}) dV}$$

Entonces:

$$V_{\text{modo,act}} = \Gamma V_{\text{modo}}$$

Si el medio activo llena toda la cavidad, entonces:

$$\Gamma \simeq 1$$

En el caso de tener haces de Hermitte - Gauss

$$V_{modo} = \frac{1}{E_o^2} \int_0^d \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z) E^*(x, y, z) dx dy dz$$

$$E(x, y, z) = E_{pq} H_p \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_q \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} e^{-jkz} e^{j\psi(z)(p+q)}$$

$$V_{pq} = \frac{\pi \omega_o^2}{2} d(p! q! 2^{p+q})$$

El volumen crece con el número de modo

E_o valor máximo del campo en la cintura del haz

He-Cd (441.6 nm) , operando en TEM₀₀

$$d = 0.6 \text{ m}$$

$$R = 2 \text{ m}$$

$$g_1 = 1$$

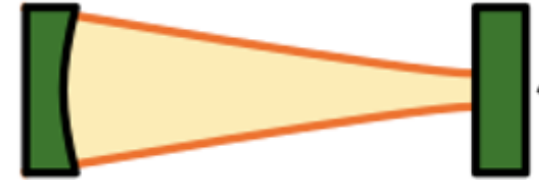
$$g_2 = 1 - \frac{d}{R} = 0.7$$

$$g_1 g_2 = 0.7 \rightarrow \text{estable}$$

$$z_R^2 = \frac{d^2 g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} = \frac{\omega_o^4 \pi^2}{\lambda^2}$$

$$\rightarrow \omega_o^2 = 1.38 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$\omega_o = 0.37 \text{ mm}$$



Volumen del modo TEM₀₀

$$V_{pq} = \frac{\pi \omega_o^2}{2} d (p! q! 2^{p+q})$$

$$V_{00} = \frac{\pi \omega_o^2}{2} d = 1.29 \times 10^{-7} \text{ m}^3 = 0.129 \text{ cm}^3$$

Si tomo de tablas

$$N_u \sim 4 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

$$N_l \sim 0 \text{ m}^{-3}$$

$$A_{ul} \sim 1.4 \times 10^6 / \text{s}$$

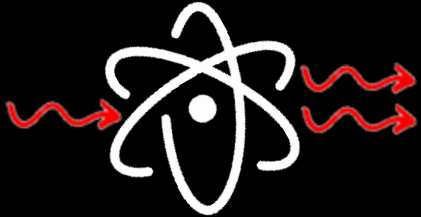
Además

$$h\nu_{ul} = \frac{hc}{\lambda_{ul}} = \frac{1240}{441.6} \text{ eV} \times \frac{(1.6022 \times 10^{-19}) \text{ J}}{\text{eV}}$$

$$= 4.5 \times 10^{19} \text{ J}$$

$$P = N_u V_{00} A_{ul} h\nu_{ul} \sim 3.25 \times 10^{-3} \text{ W} \sim 3 \text{ mW}$$

Láseres



Prof. María Gabriela Capeluto

Doctorado:

- Láseres: Conceptos avanzados, dispositivos y aplicaciones

Licenciatura

- Fundamentos sobre láseres e interacción de la luz con materiales

1^{do} cuatrimestre 2026

Más sobre cavidades

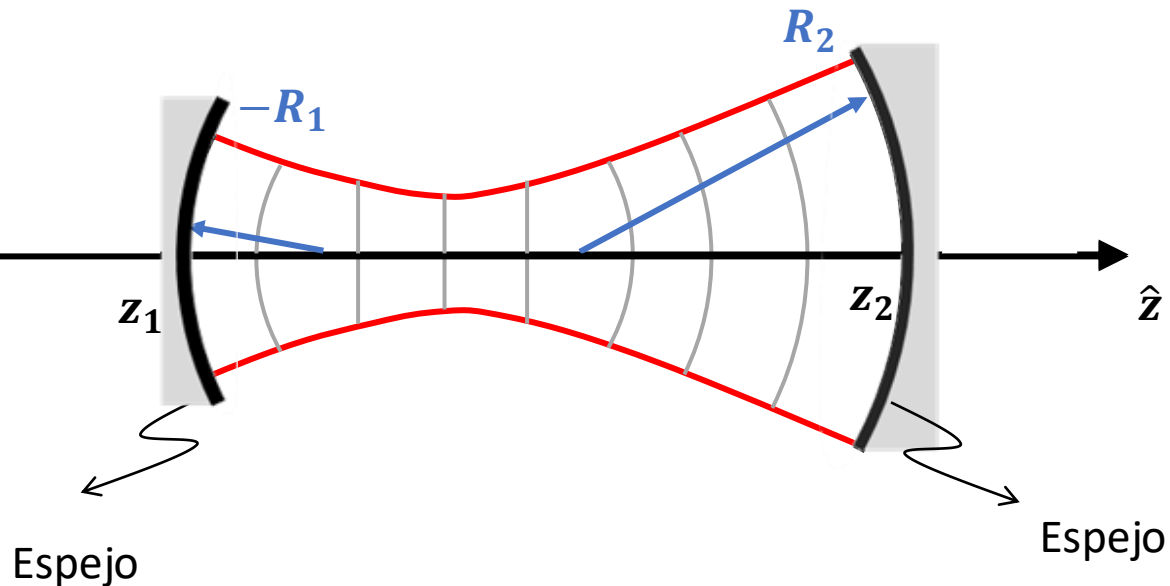


Vimos un criterio de estabilidad en el formalismo gaussiano

Criterio de estabilidad

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$
$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

Las cavidades estables son aquellas que el haz se copia a si mismo cuando viaja ida y Vuelta entre los espejos

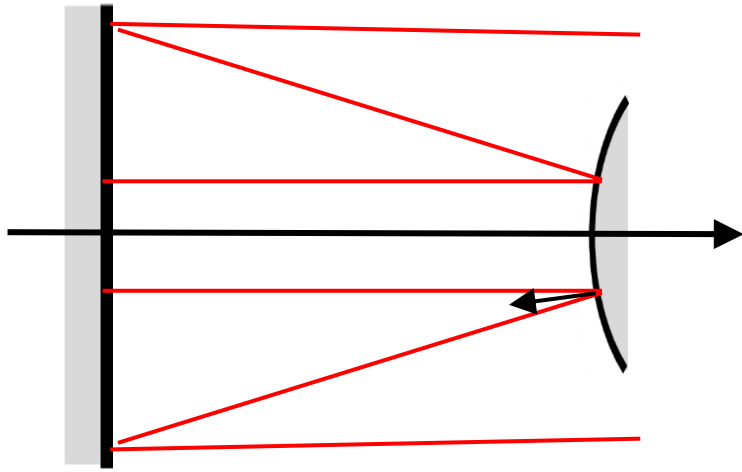


Si en z_1 y z_2 pongo espejos de radio R_1 y R_2 (iguales al radio de curvatura del haz), el haz se refleja entre ambos espejos copiando exactamente la forma del haz

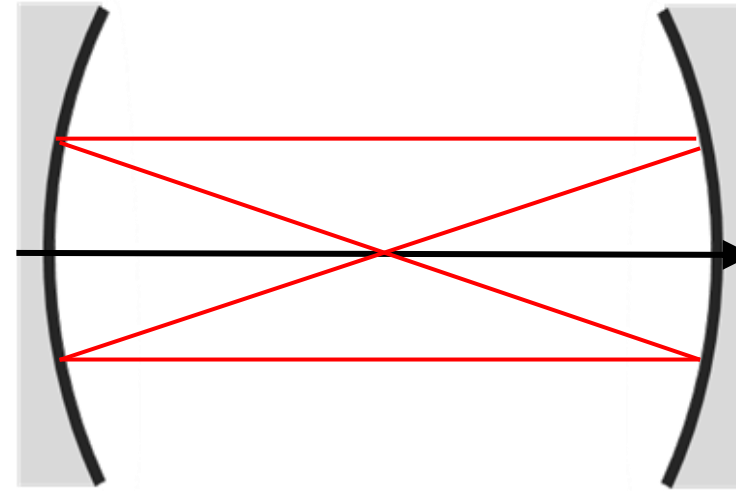
Haz estable
Cavidad estable

Además se pueden encontrar una gran variedad de radios de espejos que da cavidades estables

Cavidades inestables- cavidades estables



Inestable (pérdidas por difracción)



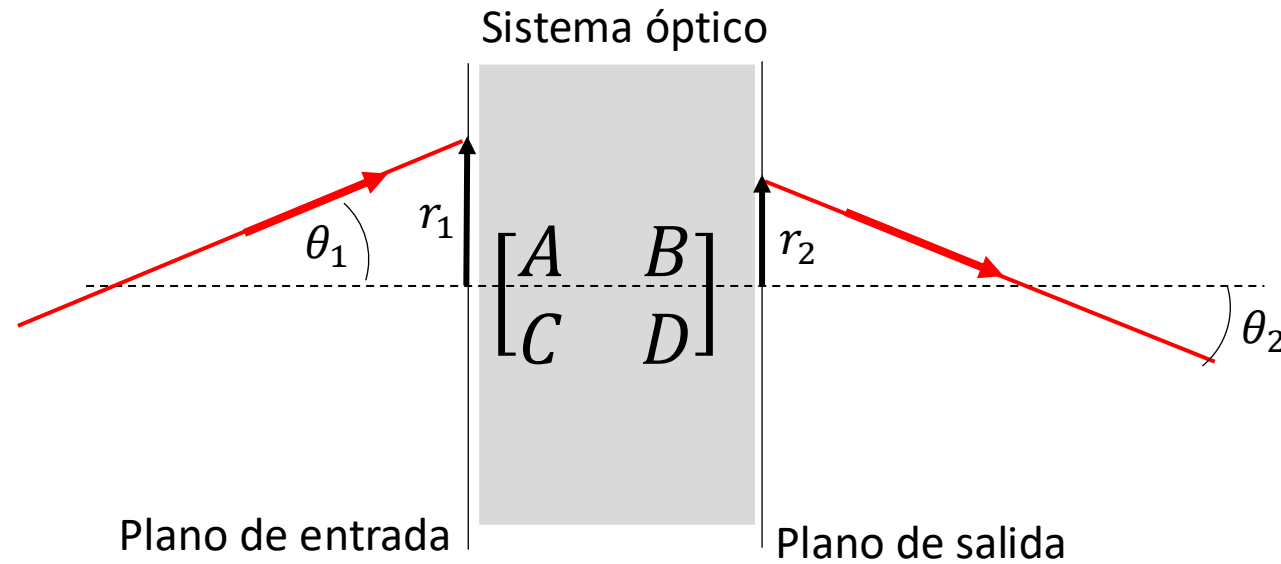
Estable

Cuales son las condiciones para las cuales el haz se mantiene dentro de la cavidad?

<https://phydemo.app/ray-optics/simulator/>

Espejo curvo de 60 cm de radio y espejo plano. Cual es el rango de distancias en el cual la cavidad es estable?

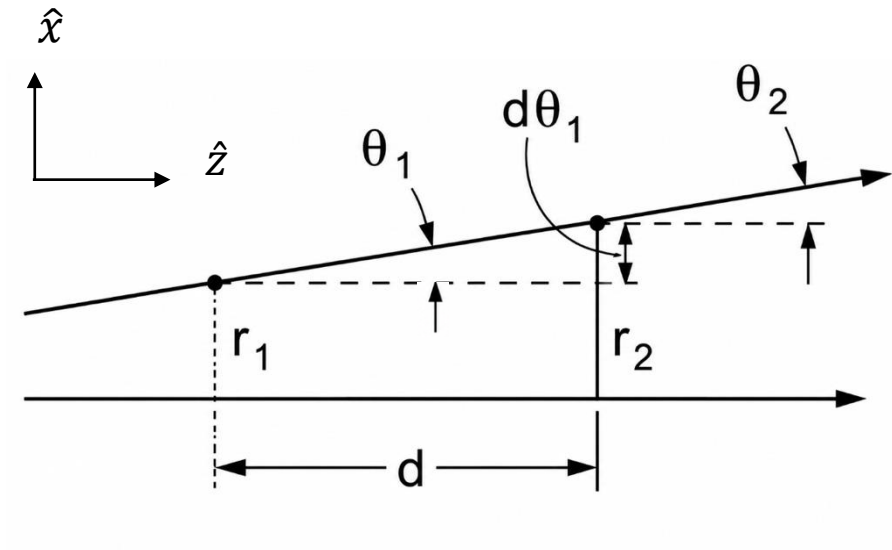
Matrices $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (o matrices de transferencia)



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

- Método algebraico de propagación de haces en la aproximación paraxial
- Como son matrices, para propagar a través de varios elementos ópticos, multiplico varias matrices

Propagación libre en una distancia d



$$r_2 = r_1 + d \sin(\theta_1) \sim r_1 + d\theta_1$$

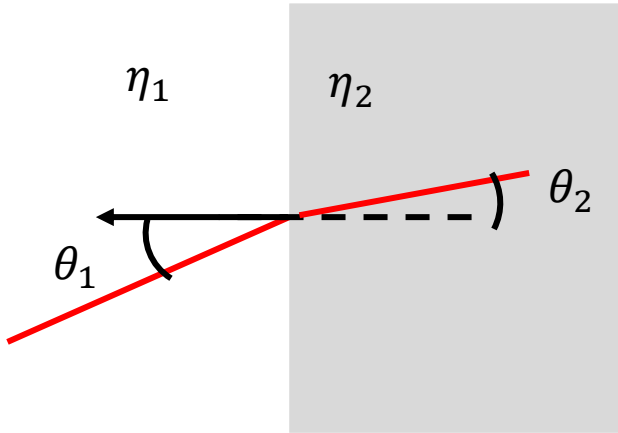
$$\begin{cases} r_2 = r_1 + d\theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz para propagación libre

Interfaz plana cambio de índice de refracción



$$r_1 = r_2$$

$$\eta_1 \sin(\theta_1) = \eta_2 \sin(\theta_2)$$

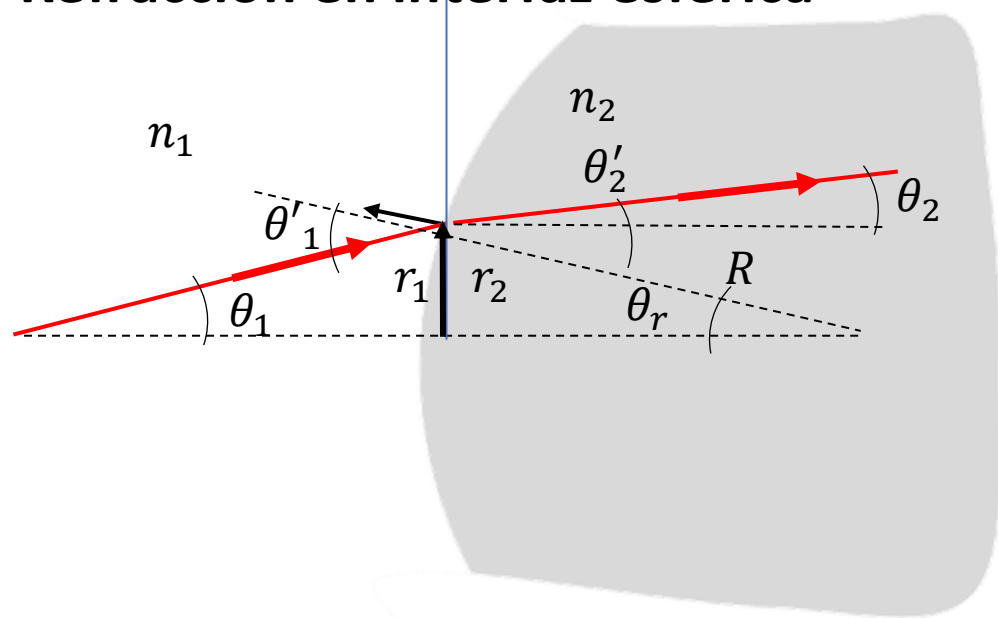
$$\eta_1 \theta_1 = \eta_2 \theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{\eta_2 \theta_2}{\eta_1}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_1}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

Matriz para refracción en superficie plana

Refracción en interfaz esférica



$$r_1 = r_2$$

$$\eta_1 \sin(\theta'_1) = \eta_2 \sin(\theta'_2)$$

$$\eta_1 \theta'_1 = \eta_2 \theta'_2$$

Ángulos internos del triángulo

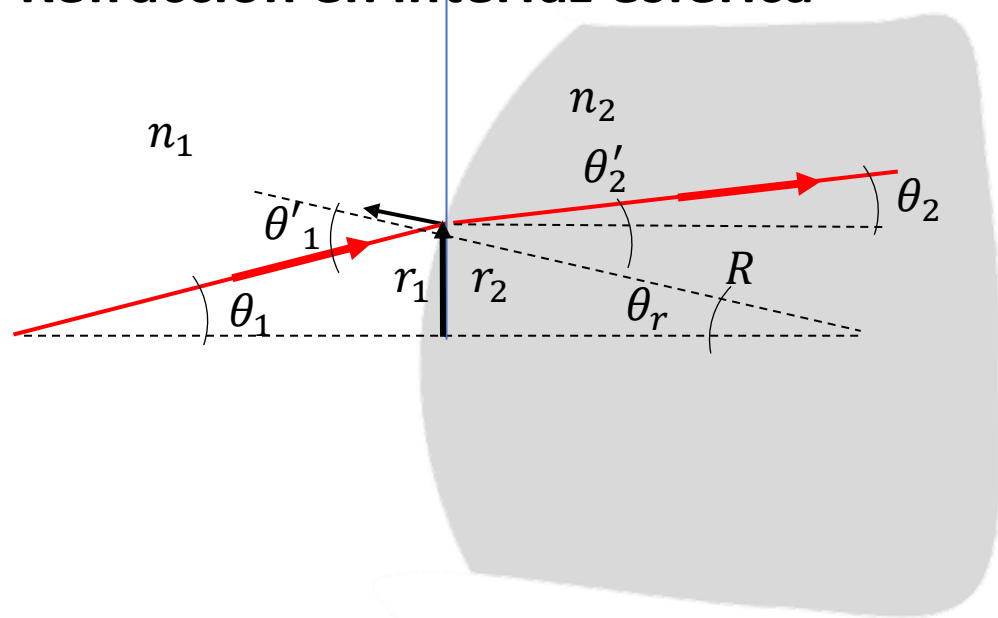
$$(\pi - \theta'_1) + \theta_r + \theta_1 = \pi$$

$$\theta'_1 = \theta_r + \theta_1$$

Paralelas cortadas por una transversal

$$\theta'_2 = \theta_2 + \theta_r$$

Refracción en interfaz esférica



Ángulos internos del triángulo

$$(\pi - \theta'_1) + \theta_r + \theta_1 = \pi$$

$$\theta'_1 = \theta_r + \theta_1$$

Paralelas cortadas por una transversal

$$\theta'_2 = \theta_2 + \theta_r$$

$$r_1 = r_2$$

Snell

$$n_2 \sin(\theta'_2) = n_1 \sin(\theta'_1)$$

Ángulos pequeños

$$n_2 \theta'_2 = n_1 \theta'_1$$

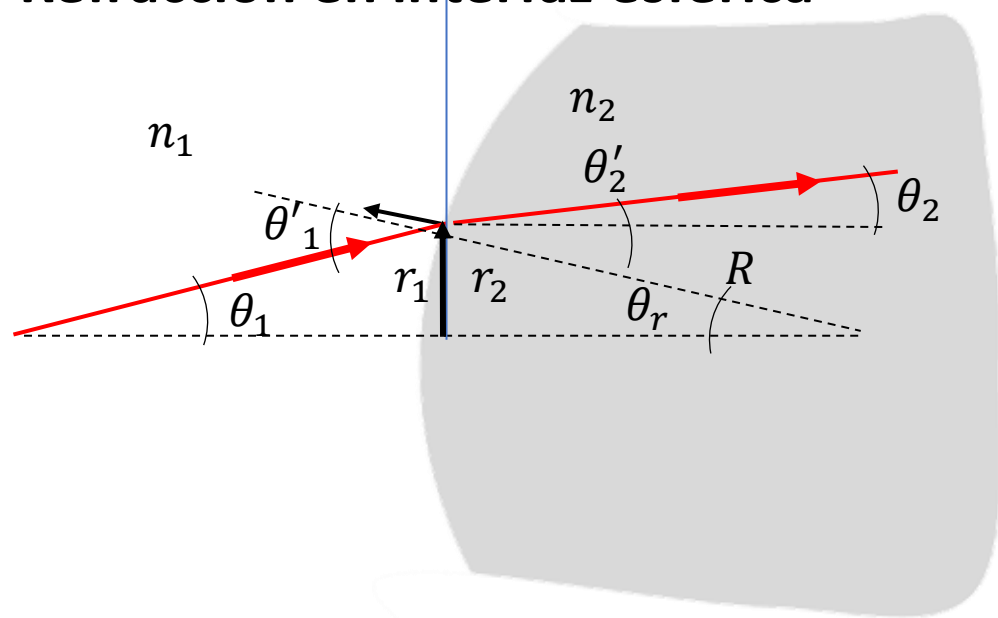
$$n_2 (\theta_2 + \theta_r) = n_1 (\theta_r + \theta_1)$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \theta_r$$

$$\sin(\theta_r) \sim \theta_r \sim \frac{r_2}{R} = \frac{r_1}{R}$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) r_2}{R}$$

Refracción en interfaz esférica



Ángulos internos del triángulo

$$(\pi - \theta'_1) + \theta_r + \theta_1 = \pi$$

$$\theta'_1 = \theta_r + \theta_1$$

Paralelas cortadas por una transversal

$$\theta'_2 = \theta_2 + \theta_r$$

$$r_1 = r_2$$

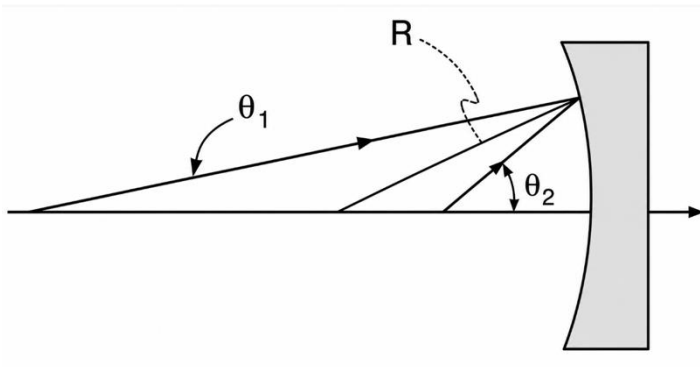
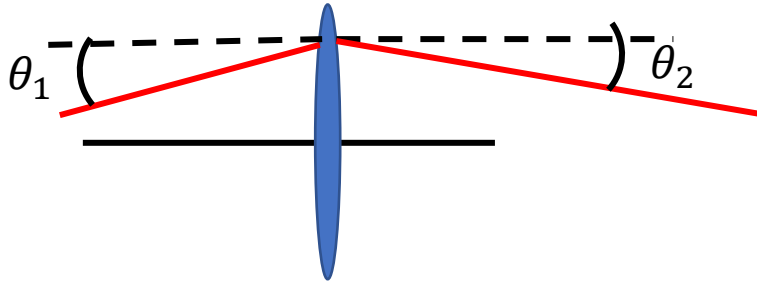
$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) r_1}{R}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)}{R} & \frac{\eta_1}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

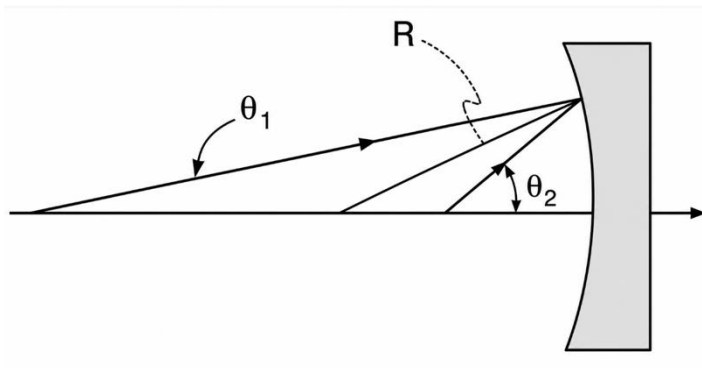
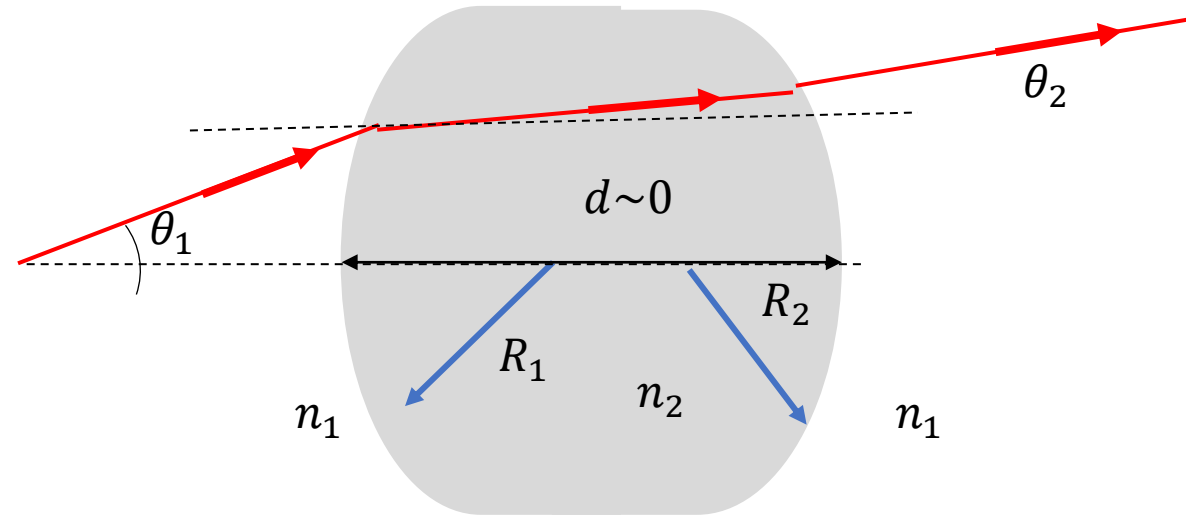
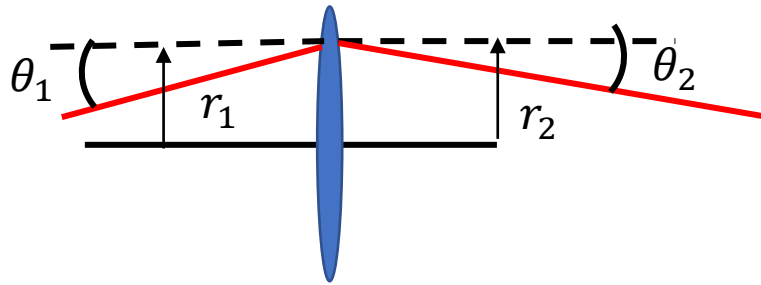
$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R} & \frac{\eta_1}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

Matriz para superficie esférica

Lente delgada o espejo curvo



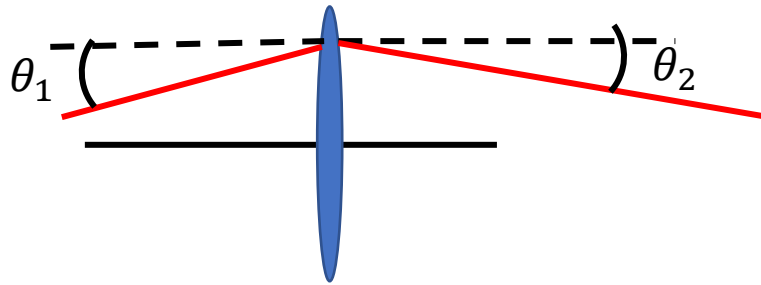
Lente delgada o espejo curvo



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 R_1} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

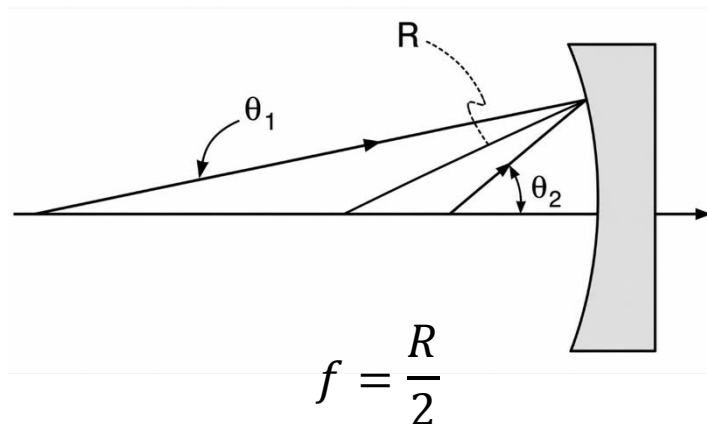
Segunda superficie
 $n_2 \rightarrow n_1$
Primer superficie
 $n_1 \rightarrow n_2$

Lente delgada o espejo curvo



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 R_1} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 R_1} + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R_2} \right) & \frac{n_1 n_2}{n_2 n_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$= -\frac{1}{f}$ "lens maker equation"

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

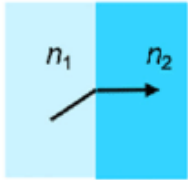
Matriz para lente o espejo

Matrices $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$



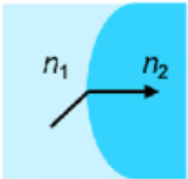
$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Free-Space Propagation with an Arbitrary Distance of d



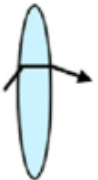
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Refraction at a Planar Boundary n_1 and n_2



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Refraction at a Spherical Boundary n_1 and n_2 , with $R > 0$ for a Convex Boundary



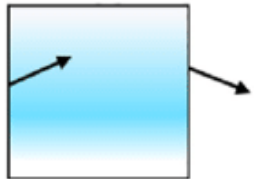
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

Transmission through a Thin Lens with Focal Length $f > 0$ for convex



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Reflection from a Spherical Mirror with Radius R , $R > 0$ for concave



$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha L) & \alpha^{-1} \sin(\alpha L) \\ \alpha \sin(\alpha L) & \cos(\alpha L) \end{bmatrix}$$

Propagation through a GRIN Lens of Distance L
 $n(y) = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$

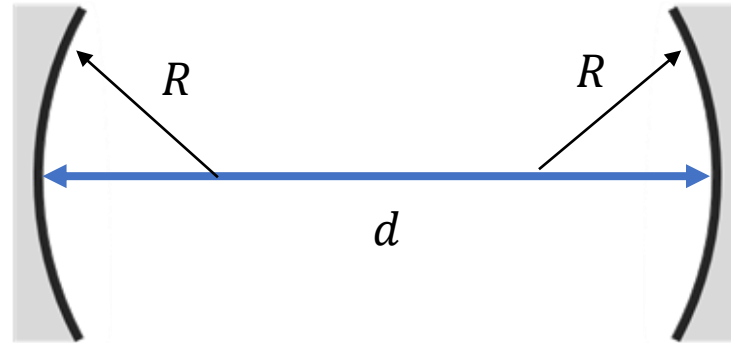
Cavidades y criterio de estabilidad



Ejemplo: Cavity simétrica

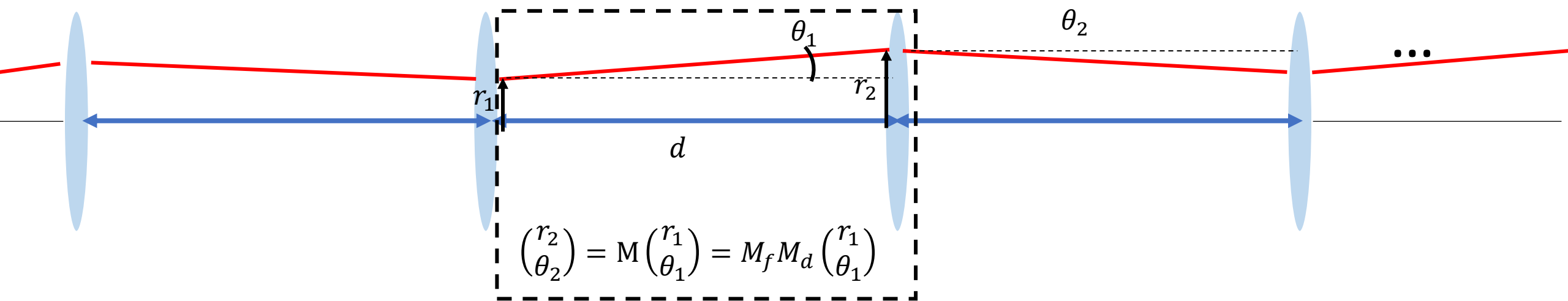
$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$f = \frac{R}{2}$$

$$M = M_f M_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}$$

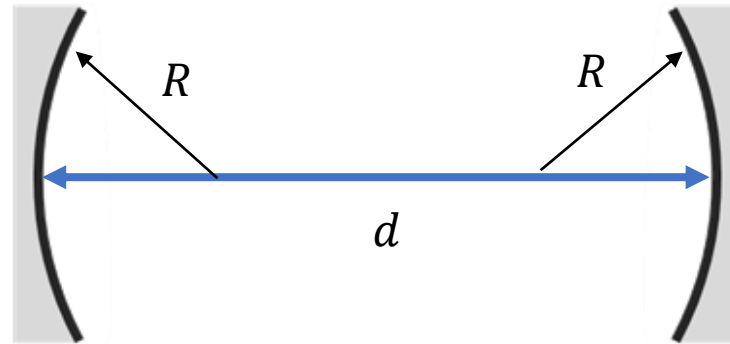


$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M_f M_d \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

N pasajes....

$$\begin{pmatrix} r_N \\ \theta_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_{N-1} \\ \theta_{N-1} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} r_{N-2} \\ \theta_{N-2} \end{pmatrix} = \dots = M^N \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

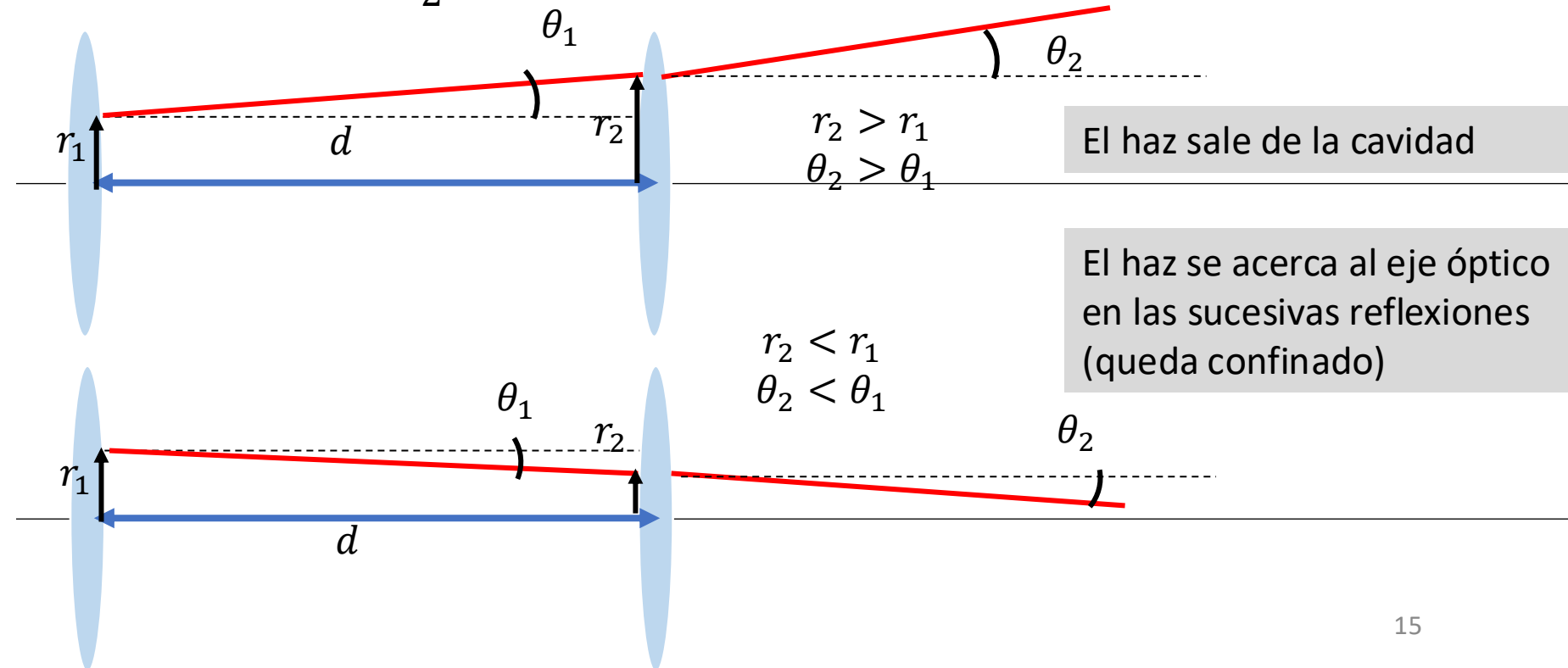
Cavidades y criterio de estabilidad



$$f = \frac{R}{2}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$\lambda < 1$ el haz converge
(cavidad estable)



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_N \\ \theta_N \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \lambda^N \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$[M - \lambda I] \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$[M^N - \lambda^N I] \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

Ecuación de autovalores y autovectores

$$\det[M - \lambda I] = 0 \rightarrow \lambda_+, \lambda_-$$

Criterio de estabilidad

Buscamos una condición para que los rayos paraxiales permanezcan confinados cerca del eje óptico

Si alguno de los autovalores de M tiene módulo mayor que 1, luego de N pasajes esa componente crece como λ^N (el haz se va de la cavidad)

$$[M - \lambda I] \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \left(\begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Auxiliar

$$\det(M) = (A - \lambda)(D - \lambda) - CB$$

$$= \lambda^2 - (A + D)\lambda + AD - CB$$

$$= \lambda^2 - \text{Tr}(M)\lambda + \det(M)$$

Cavidad simétrica:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(M) = 2 - \frac{d}{f}$$

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - \frac{d}{2f} \right) \lambda + 1 = 0$$

$$g = \left(1 - \frac{d}{2f} \right) = \left(1 - \frac{d}{R} \right)$$

$$\lambda_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}$$

Pasa siempre que luego de la propagación el haz termine en el mismo medio

$$\det(M) = -\frac{d}{f} + 1 + \frac{d}{f} = 1$$

El parámetro de estabilidad que ya conocíamos!

$$\begin{aligned} |g| < 1 &\rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{R} \\ |g| > 1 &\rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$g = \left(1 - \frac{d}{R}\right) \quad \lambda_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}$$

autovectores (autorayos!)

$$|g| < 1 \Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{C}, |\lambda_{\pm}| = 1$$

$$\lambda_{\pm} = g \pm j\sqrt{1 - g^2} = \sqrt{g^2 + (1 - g^2)}e^{\pm j\phi} = e^{\pm j\phi}$$

$$\begin{aligned} \lambda_+^N = e^{+j\phi N} &\rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} r_u \\ \theta_u \end{pmatrix} \\ \lambda_-^N = e^{-j\phi N} &\rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} r_v \\ \theta_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La trayectoria general de un haz es

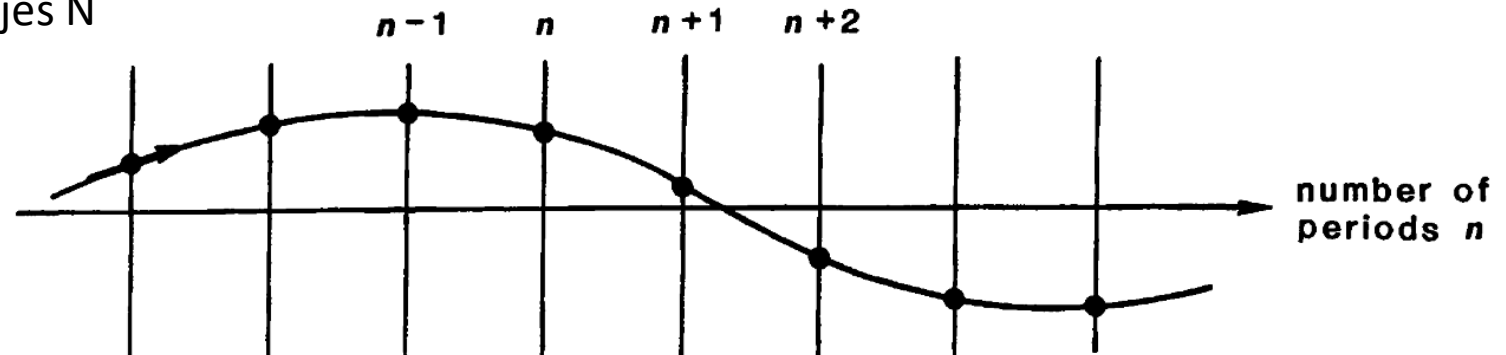
$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} r_N \\ \theta_N \end{pmatrix} = c_u \mathbf{u} e^{+j\phi N} + c_v \mathbf{v} e^{-j\phi N} = (c_u \mathbf{u} + c_v \mathbf{v}) \cos(\phi N) + j(c_u \mathbf{u} - c_v \mathbf{v}) \sin(\phi N) = \mathbf{A} \cos(\phi N) + \mathbf{B} \sin(\phi N)$$

r_N y θ_N funciones periódicas en el numero de pasajes N

$$r_N = a \sin(\phi N + \alpha)$$

Período $2\pi/\phi$

a, α determinados por condiciones iniciales



Cavidades y criterio de estabilidad



$$g = \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$\lambda_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}$$

- $|g| > 1, \lambda \in \mathbb{R}$
- $g > 1$ o $g < -1$

Rama positiva

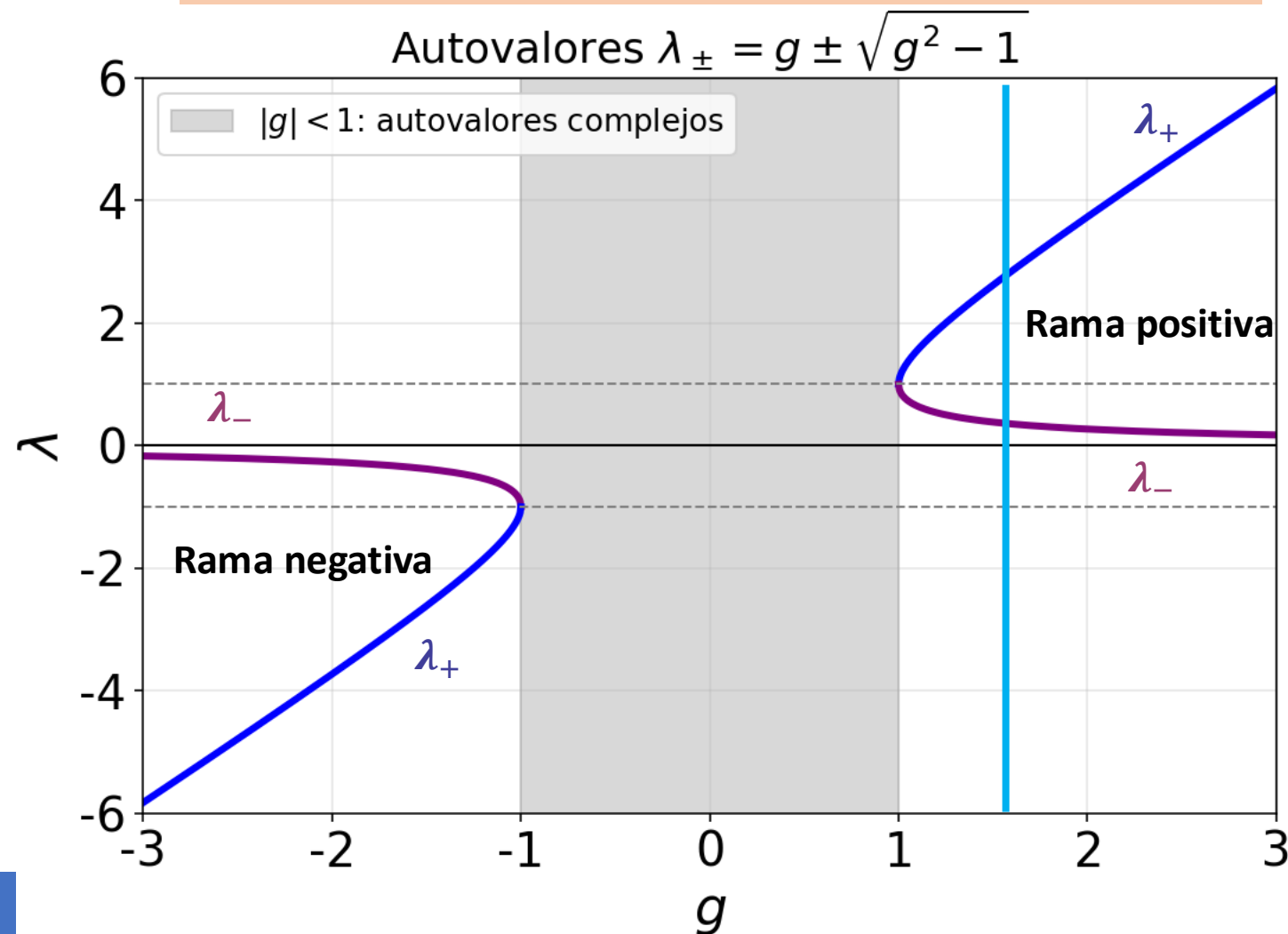
Si $g > 1, \lambda_+ > 1$ y $0 < \lambda_- < 1$

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} r_N \\ \theta_N \end{pmatrix} = c_u \mathbf{u} \lambda_+^N + c_v \mathbf{v} \lambda_-^N$$

Crece muy rápido!

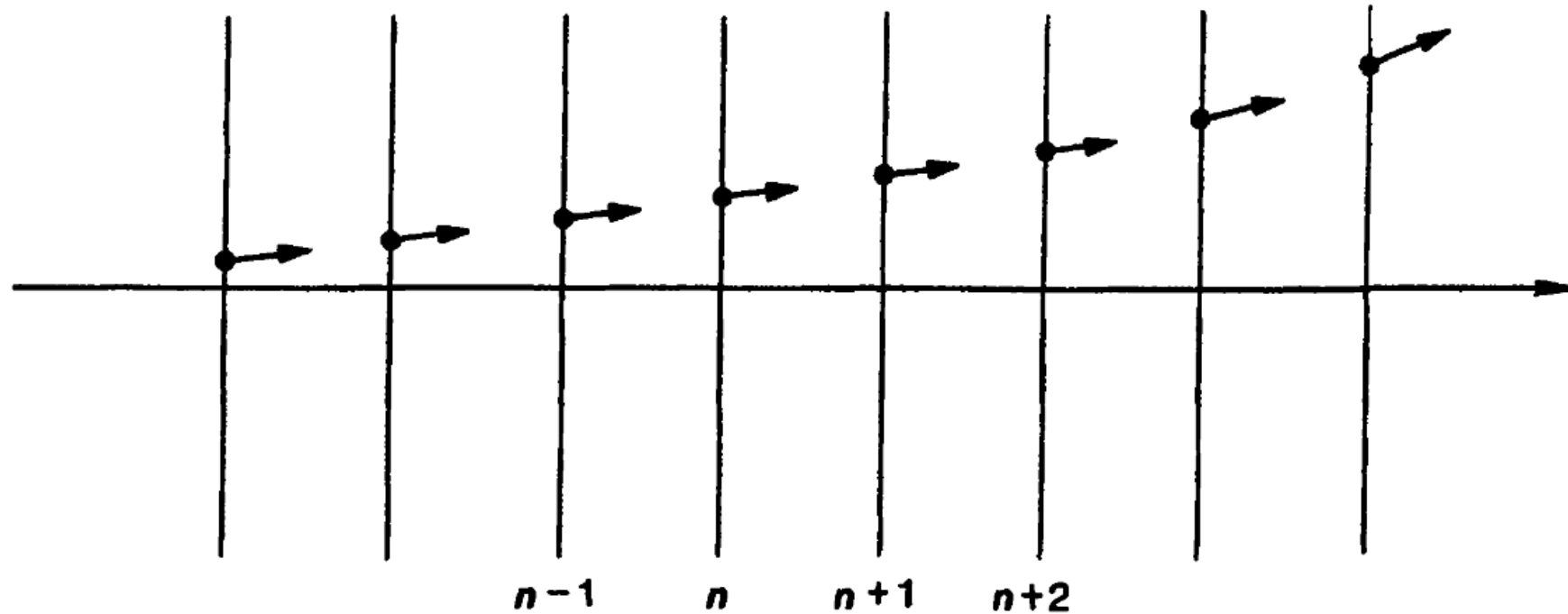
Tiende a cero

En cada rama hay un autovalor con modulo mayor a uno



positive branch

$M > 1$



Cuantos pasajes hace el haz hasta irse de la cavidad? $\rightarrow$ cuando $r_N > R_E$ (*radio del espejo*)?

Cavidades y criterio de estabilidad



$$g = \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$\lambda_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}$$

- $|g| > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Rama negativa

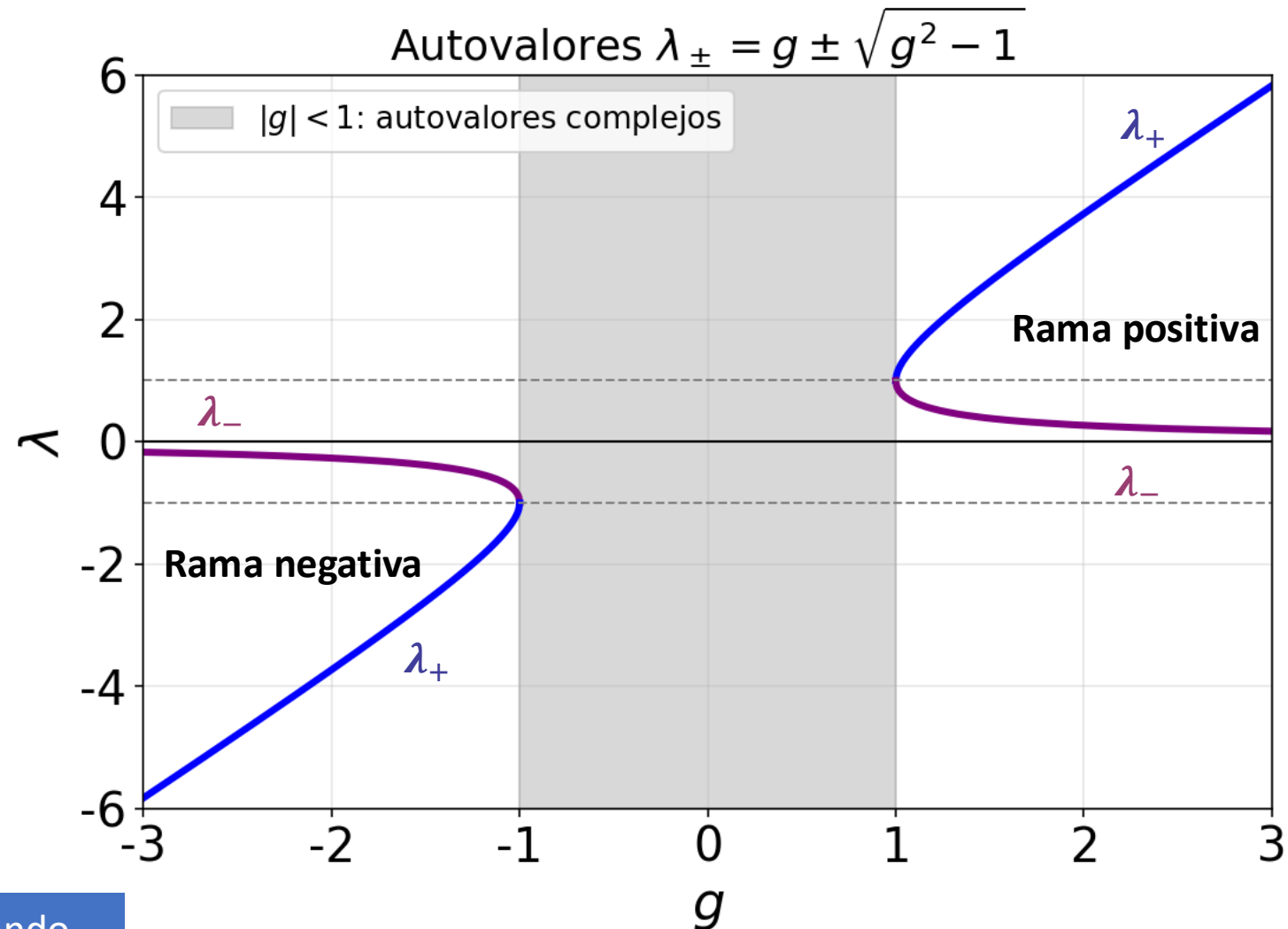
Si $g < -1$, $\lambda_- < -1$ y $-1 < \lambda_+ < 0$

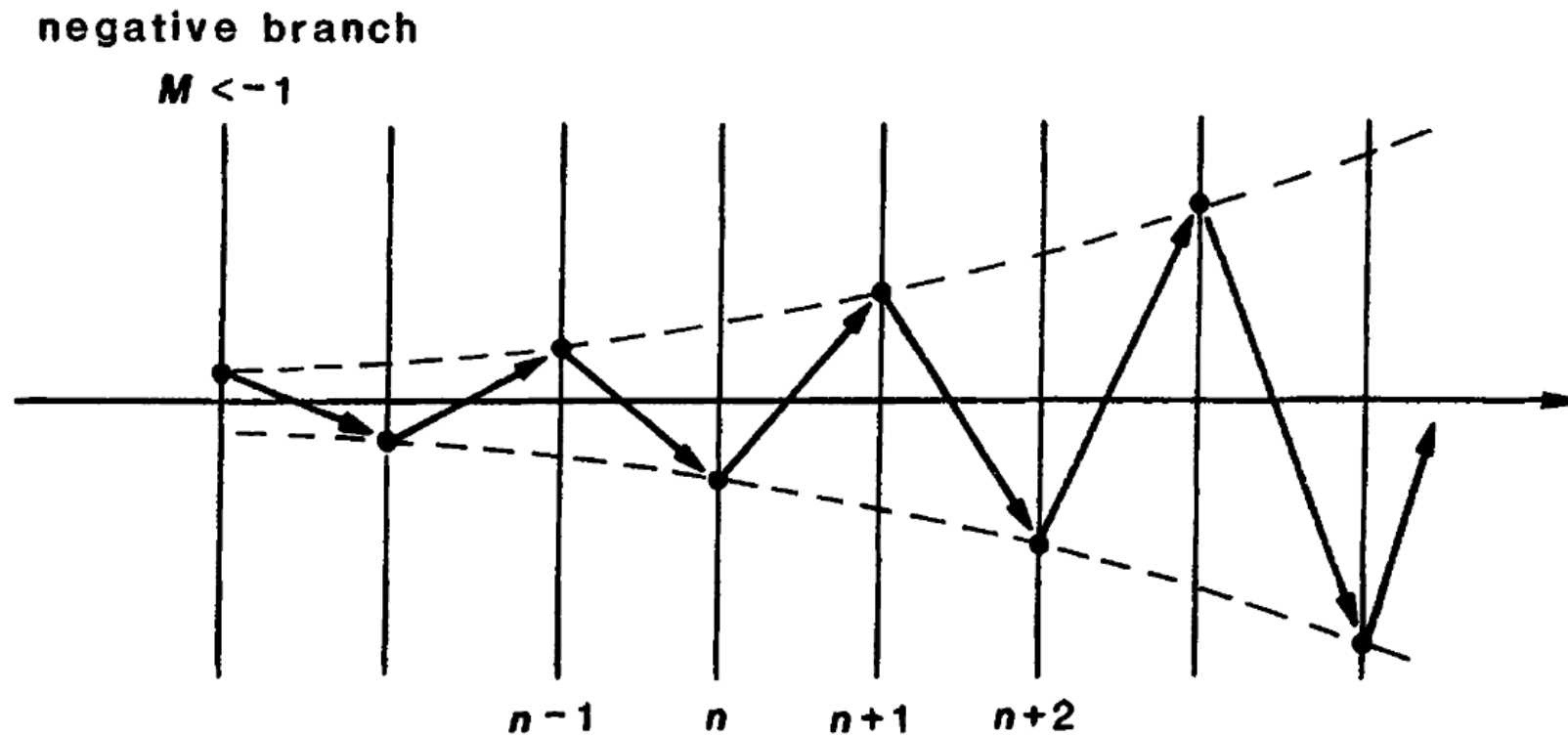
$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} r_N \\ \theta_N \end{pmatrix} = c_u \mathbf{u} (-|\lambda_+|)^N + c_v \mathbf{v} (-\lambda_-)^N$$

Tiende a cero zigzagueando

Crece rápido zigzagueando

En cada rama hay un autovalor con modulo mayor a uno





Cuántos pasajes hace el haz hasta irse de la cavidad? $\rightarrow$ cuando $r_N > R_E$ (*radio del espejo*)?

Cavidad Simétrica

Si $R_1 = R_2 = R$

$$g = \left(1 - \frac{d}{R}\right) \quad \lambda_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - 1}$$

La cavidad es estable si $|g| < 1$

$$-1 < \left(1 - \frac{d}{R}\right) < 1$$

$$0 < d < 2R$$

Tarea: Mostrar usando formalismo ABCD que Si $R_1 \neq R_2$

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1$$

Ayuda:

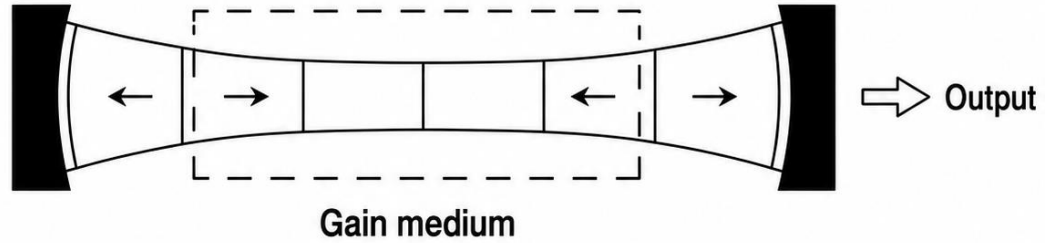
$$\begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \text{Tr}(M) \lambda + \text{Det}(M) = 0$$

$\text{Det}(M) = AD - BC = 1$ (siempre cuando el haz empiece y termine en el mismo medio, sin importar que atraviesa.)

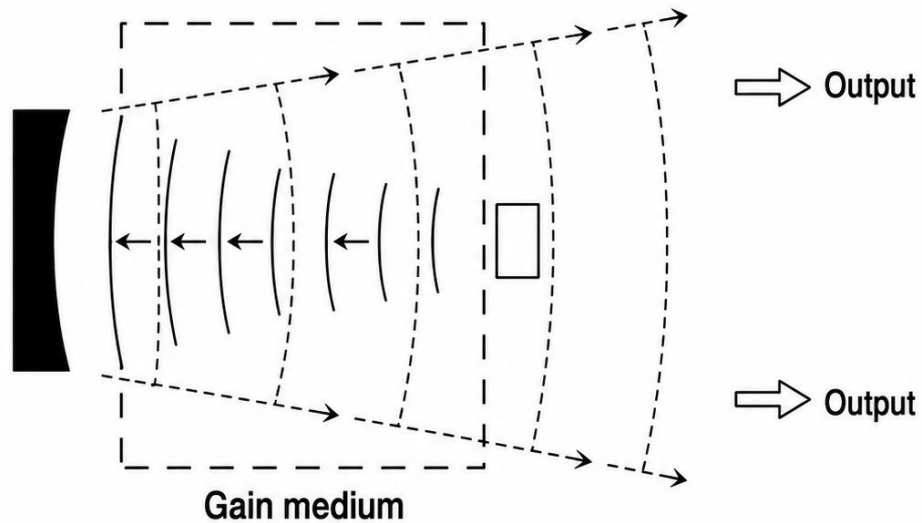
$$\text{Tr}(M) = A + D$$

Resonadores estables e inestables



Stable resonator

- Modo de tamaño más pequeño, no cubre todo el volumen del medio de ganancia



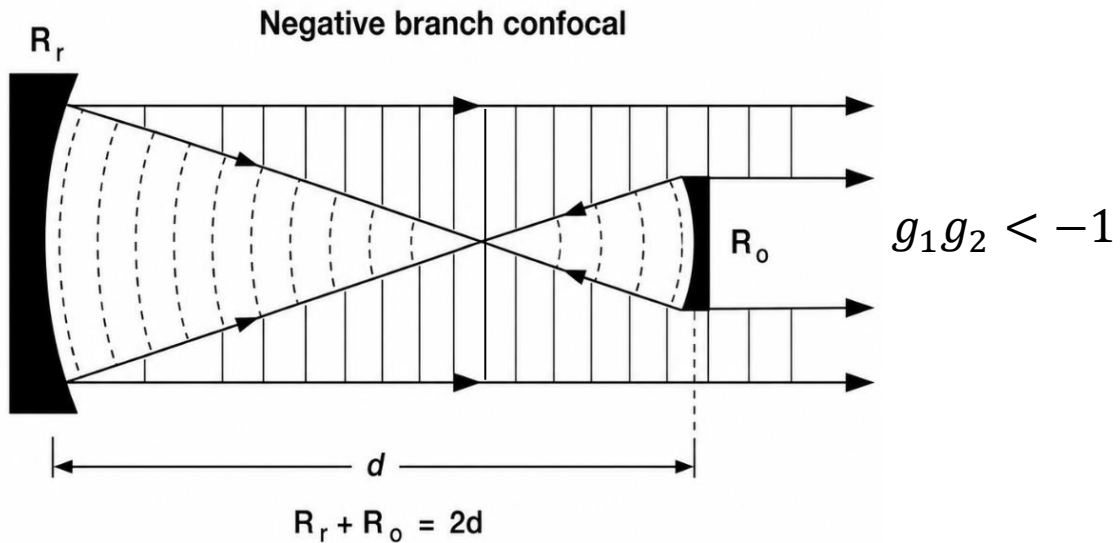
Unstable resonator

- Modo de tamaño más grande, ocupa mayor proporción del medio de ganancia
- Puede extraer más energía del medio activo porque se superpone con un volumen mayor de ganancia
- Permite obtener haces de alta potencia mediante acoplamiento de salida geométrico, frecuentemente con buena colimación.

Resonadores estables e inestables



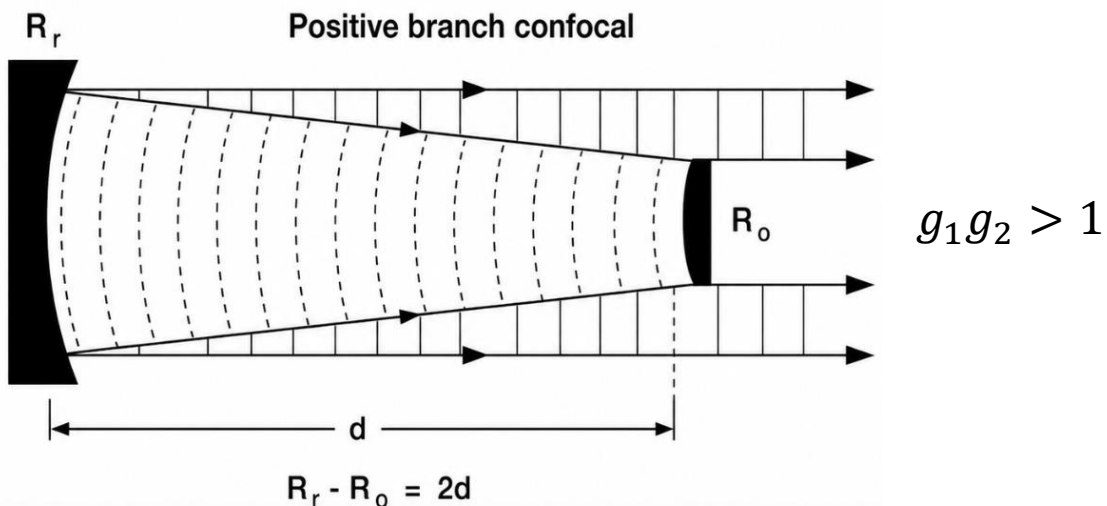
Resonadores confocales inestables, producen haces colimados



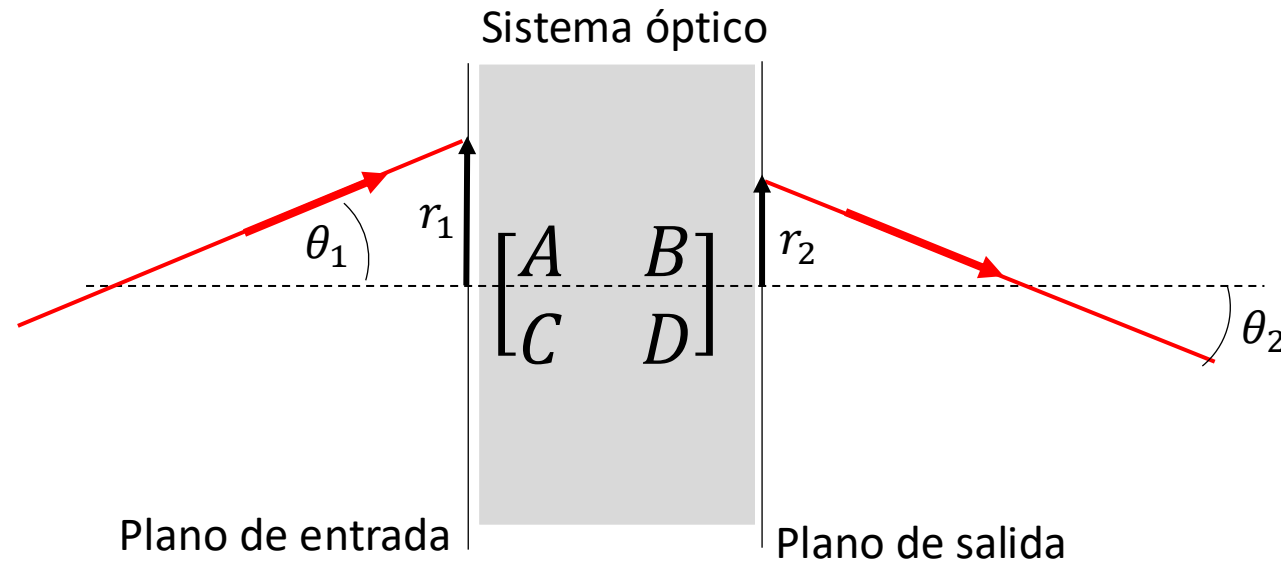
fractional output coupling

$$M_{us} = \frac{R_r}{R_o}$$

M_{us} grande para tener un lóbulo central en el campo lejano



Propagación de láseres a través de sistemas ópticos



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{q_1(z)} = \frac{1}{R_1(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_1^2(z)}$$

$$q_2(z) = \frac{Aq_1(z) + B}{Cq_1(z) + D}$$

$$\frac{1}{q_2(z)} = \frac{C + D(1/q_1(z))}{A + B(1/q_1(z))} = \frac{1}{R_2(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_2^2(z)}$$

Ejemplo 1: Propagación en espacio libre

Haz gaussiano 1: cintura en $z_1 = 0$, se propaga z desde z_1

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega^2(z)} \quad M_d = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: Propagación en espacio libre

Haz gaussiano 1: cintura en $z_1 = 0$, se propaga z desde z_1

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega^2(z)}$$

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_1(z_1) &= \infty \\ \omega_1(z_1) &= \omega_o \\ \frac{1}{q_1(z_1)} &= 0 - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_o^2} = -j\frac{1}{z_R} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{q_2(z)} = \frac{C + D(1/q_1(z))}{A + B(1/q_1(z))} = \frac{0 + 1\left(-j\frac{1}{z_R}\right)}{1 + z\left(-j\frac{1}{z_R}\right)} = \frac{(-j)}{(z_R - jz)} \frac{(z_R + jz)}{(z_R + jz)} = \frac{(-j z_R + z)}{z_R^2 + z^2} = \frac{1}{R_2(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_2^2(z)}$$

$$R_2(z) = \frac{z_R^2 + z^2}{z} = z\left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)$$

$$\omega_2^2(z) = \frac{z_R^2 + z^2}{z_R} \left(\frac{\eta\pi}{\lambda}\right) = \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right) z_R \left(\frac{\lambda}{\eta\pi}\right) = \omega_o^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)$$

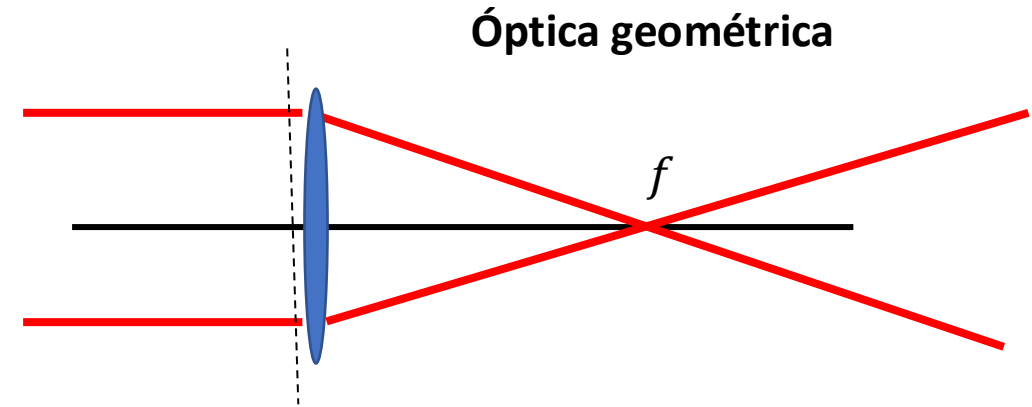
Ejemplo 2: Haz gaussiano con frente de ondas plano se enfoca con una lente delgada de distancia focal $1/f$

Haz gaussiano 1: cintura en $z_1 = 0$, se propaga z desde z_1

$$R_1(z_1) = \infty$$

$$\frac{1}{q_1(z_1)} = 0 - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_o^2} = -j\frac{1}{z_{1R}}$$

$$\omega_1(z_1) = \omega_{o1}$$



Que pasa con un haz geométrico?

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{f} & z \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = r_1 - z\frac{r_1}{f} = r_1 \left(1 - \frac{z}{f}\right)$$
$$\theta_2 = -\frac{r_1}{f}$$

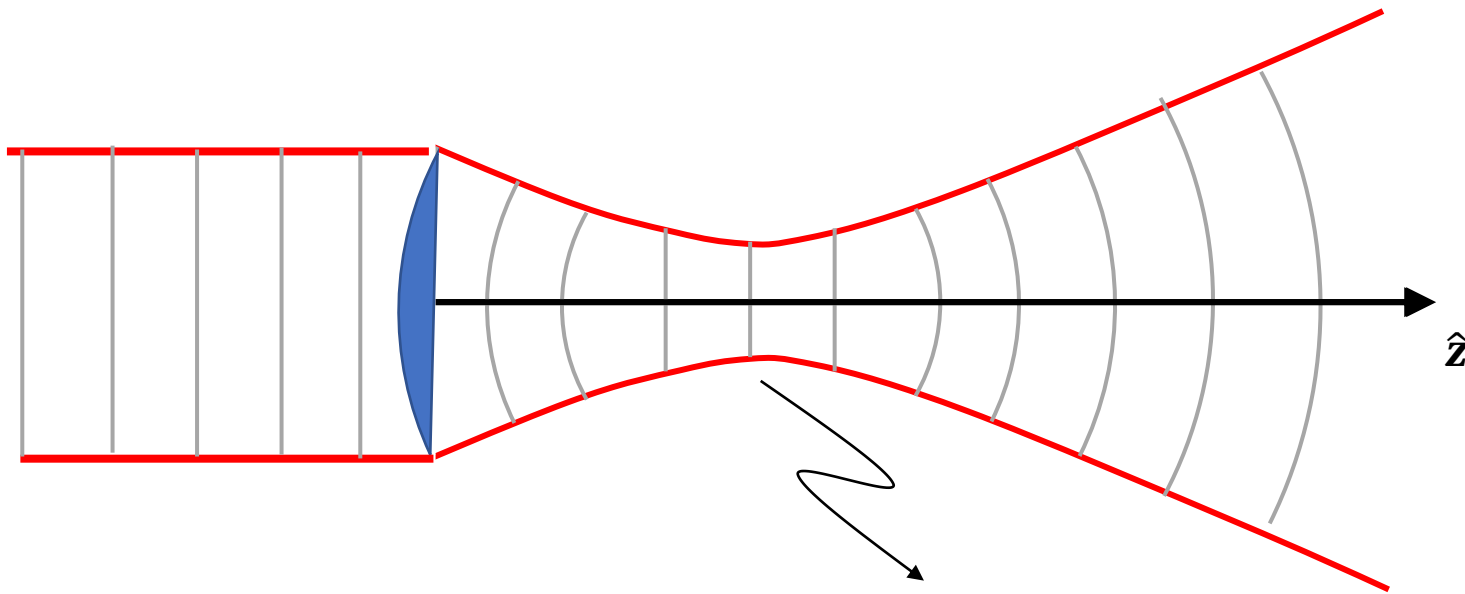
Todos los haces r_1 convergen en un mismo punto ($r_2 = 0$) si $z = f$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{f} & z \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{q_2(z)} = \frac{C + D(1/q_1(z))}{A + B(1/q_1(z))} = \frac{-\frac{1}{f} + 1\left(-j\frac{1}{z_{R1}}\right)}{1 - \frac{z}{f} + z\left(-j\frac{1}{z_{R1}}\right)} = \frac{-\frac{1}{f} + 1\left(-j\frac{1}{z_{R1}}\right)}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2} \left(1 - \frac{z}{f} + z\left(j\frac{1}{z_{R1}}\right)\right) = \frac{1}{R_2(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega_2^2(z)}$$

$$\frac{1}{R_2(z)} = \frac{-\frac{1}{f} \left(1 - \frac{z}{f}\right) + 1\left(\frac{z}{z_{R1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{f} + z\left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_{R1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2}$$

$$\frac{\lambda}{\eta\pi\omega_2^2(z)} = \frac{\frac{1}{z_{R1}} \left(1 - \frac{z}{f} + \frac{z}{f}\right)}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{z_{R1}}}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2}$$



Frente de ondas plano

$$R_2(z_f) = \infty \quad \left(\frac{1}{R_2(z_f)} = 0 \right)$$

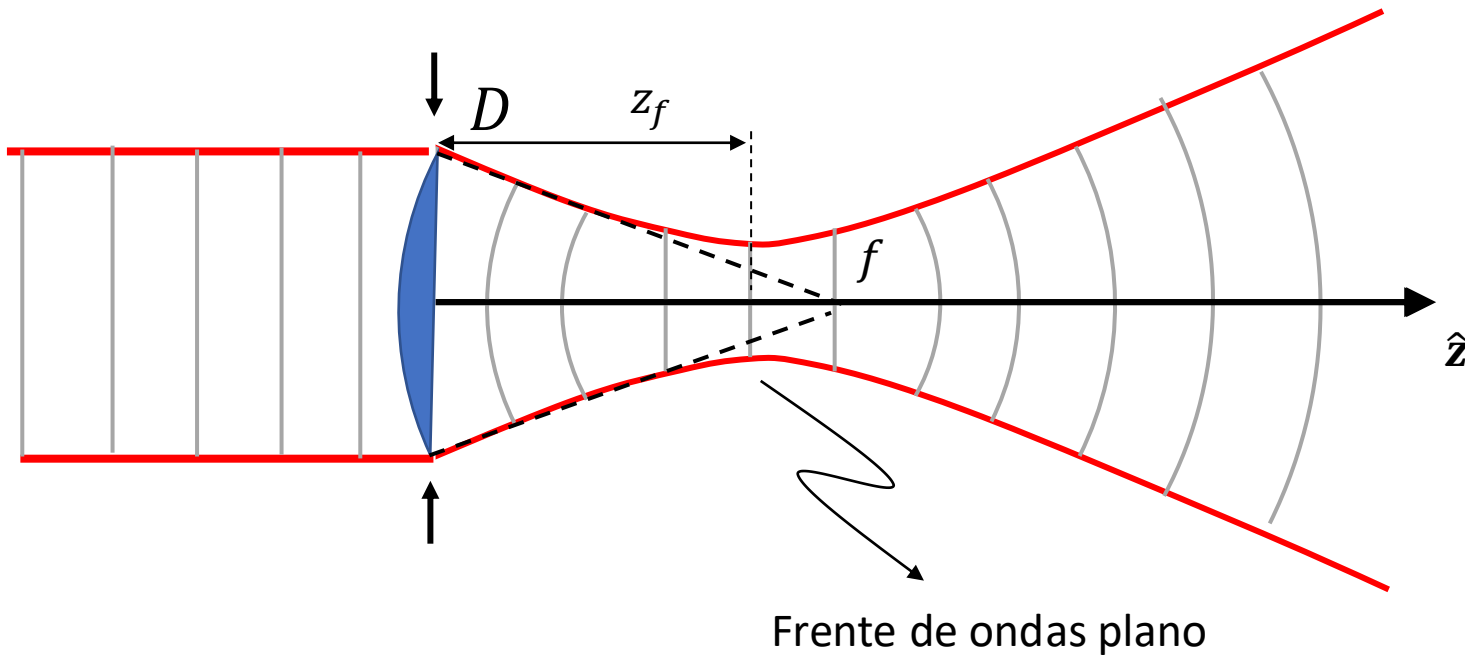
$\omega(z)$ tiene un mínimo en z_f

$$\frac{1}{R_2(z)} = \frac{-\frac{1}{f} + z \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_{R1}^2} \right)}{\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}} \right)^2}$$

$$-\frac{1}{f} + z \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_{R1}^2} \right) = 0$$

$$z_f = \frac{\frac{1}{f}}{\left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_{R1}^2} \right)}$$

$$z_f = \frac{f}{\left(1 + \left(\frac{f}{z_{R1}} \right)^2 \right)}$$



$$R_2(z_f) = \infty \quad \left(\frac{1}{R_2(z_f)} = 0 \right)$$

$\omega(z)$ tiene un mínimo en z_f

$$z_f = \frac{f}{\left(1 + \left(\frac{f}{z_{R1}} \right)^2 \right)}$$

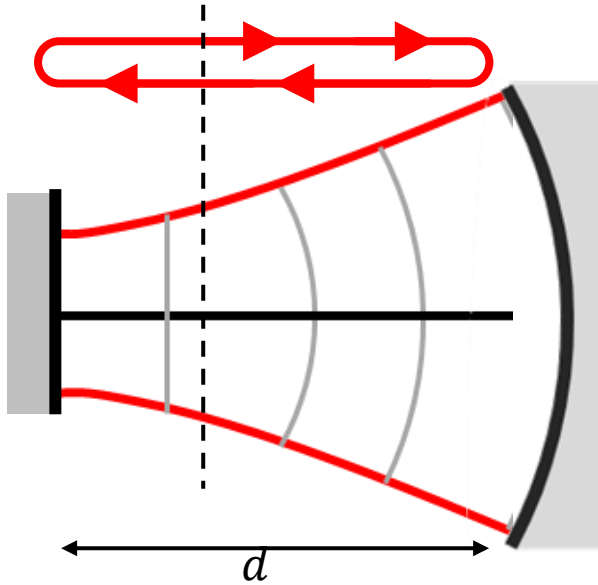
$$z_{R1} \gg f \rightarrow z_f \approx f$$

$$\frac{\lambda}{\eta \pi \omega_2^2(z)} = \frac{\frac{1}{z_{R1}}}{\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}} \right)^2}$$

$$\omega_2(z_f) \approx \frac{\lambda f}{\pi \omega_o} = \frac{2\lambda}{\pi} (f\#) = \frac{\lambda}{\pi NA}$$

$$NA = \frac{1}{2(f\#)} = \frac{f}{D} = \frac{f}{2\omega_o}$$

Ejemplo 3: haz gaussiano en cavidad óptica



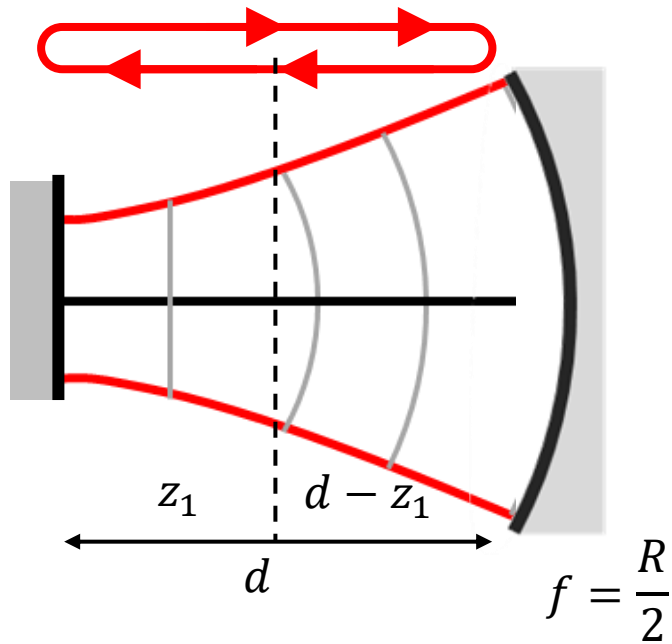
- La distribución transversal del modo en la cavidad debe ser igual luego de un round trip
- Las cavidades estables ocurren cuando los espejos tienen el mismo radio de curvatura que el haz gaussiano en posición la posición del espejo

$$q(z_1) = q(z_1 + 2d)$$

Si $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es la matriz que caracteriza un round trip,

$$q(z_1) = q(z_1 + 2d) = \frac{Aq(z_1) + B}{Cq(z_1) + D}$$

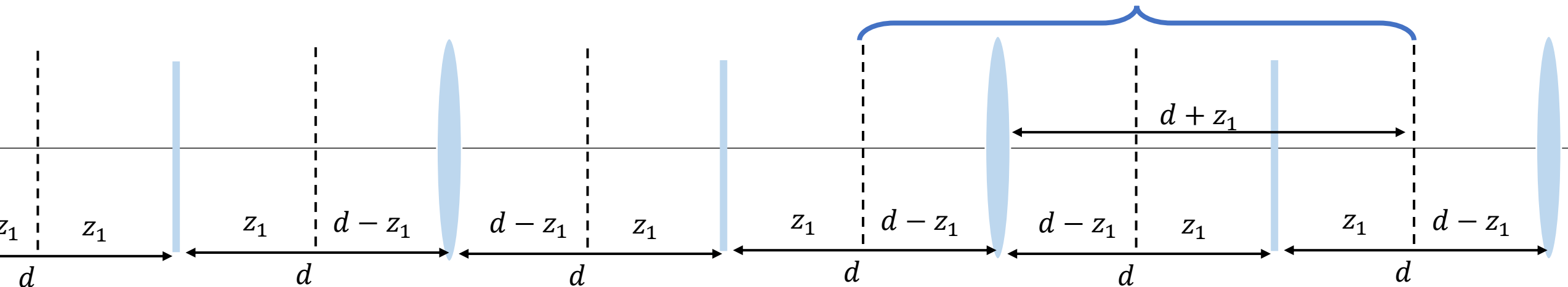
Propagación de láseres a través de sistemas ópticos



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d + z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d - z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d + z_1}{f} & 2d + (d^2 - z_1^2)(-\frac{1}{f}) \\ -\frac{1}{f} & -\frac{1}{f}(d - z_1) + 1 \end{bmatrix}$$

Round trip



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d+z_1}{f} & 2d + (d^2 - z_1^2)(-\frac{1}{f}) \\ -\frac{1}{f} & -\frac{1}{f}(d - z_1) + 1 \end{bmatrix}$$

$$q(z_1) = q(z_1 + 2d) = \frac{Aq(z_1) + B}{Cq(z_1) + D}$$

$$q(z_1) = z_1 \pm \sqrt{d(d - 2f)} = z_1 \pm j \sqrt{d(2f - d)}$$

$$d < 2f = R_2$$

$$\frac{1}{q(z_1)} = \frac{1}{R(z_1)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega^2(z_1)} = \frac{1}{z_1 \pm j \sqrt{2df - d^2}} = \frac{z_1 \mp j \sqrt{2df - d^2}}{z_1^2 - d^2 + 2df}$$

$$R(z_1) = z_1 \left(1 - \left(\frac{d}{z_1} \right)^2 + \frac{2df}{z_1^2} \right)$$

$$\omega^2(z_1) = \frac{\frac{\lambda}{\eta\pi} (z_1^2 - d^2 + 2df)}{\sqrt{d(2f - d)}}$$

Criterio de estabilidad

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1} \right) \left(1 - \frac{d}{R_2} \right) \leq 1$$

$$R_1 = \infty$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_2} \right) \leq 1$$

$$0 < d < R_2 = 2f$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\eta\pi\omega^2(z)} = \frac{1}{z \pm j\sqrt{2df - d^2}} = \frac{z \mp j\sqrt{2df - d^2}}{z^2 - d^2 + 2df}$$

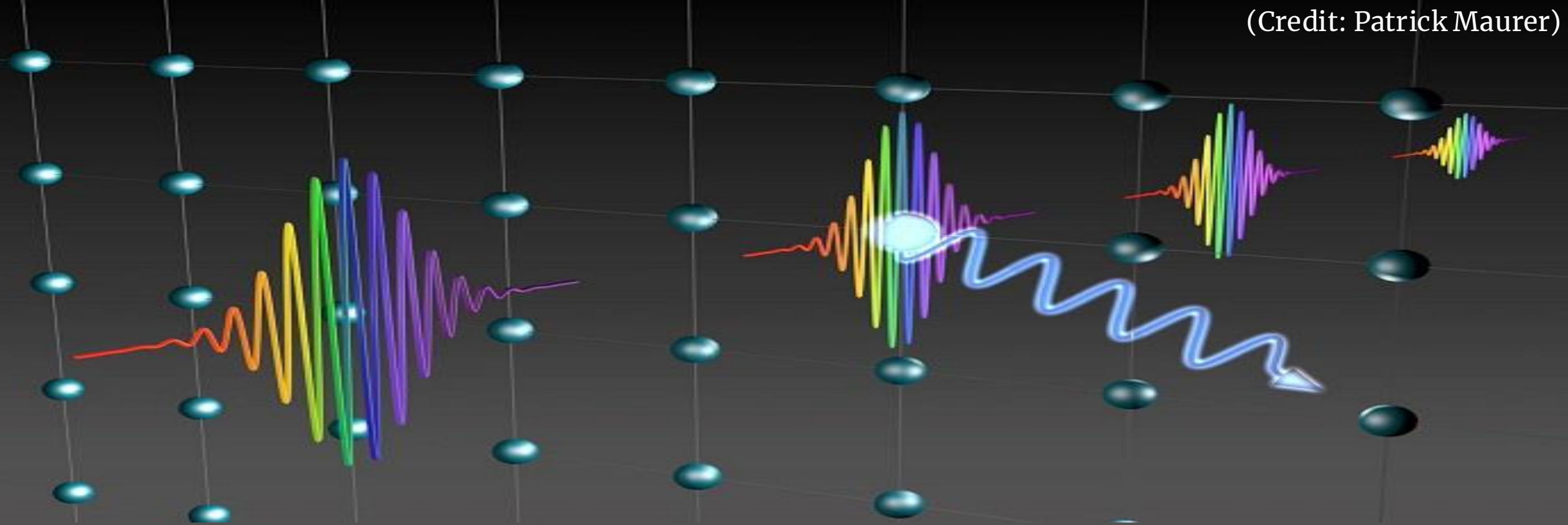
$z = 0$ sobre el espejo $\omega^2(z=0) = \omega_o^2$

$$\frac{-j\lambda}{\eta\pi\omega_o^2} = \frac{\mp j\sqrt{2df - d^2}}{-d^2 + 2df} = \frac{j}{\sqrt{2df - d^2}}$$


$$d^2 < 2fd$$

Tomo el signo (-) porque la solución tiene que ser real

$$\omega_o^2 = \frac{\lambda}{\eta\pi} \sqrt{2df - d^2}$$



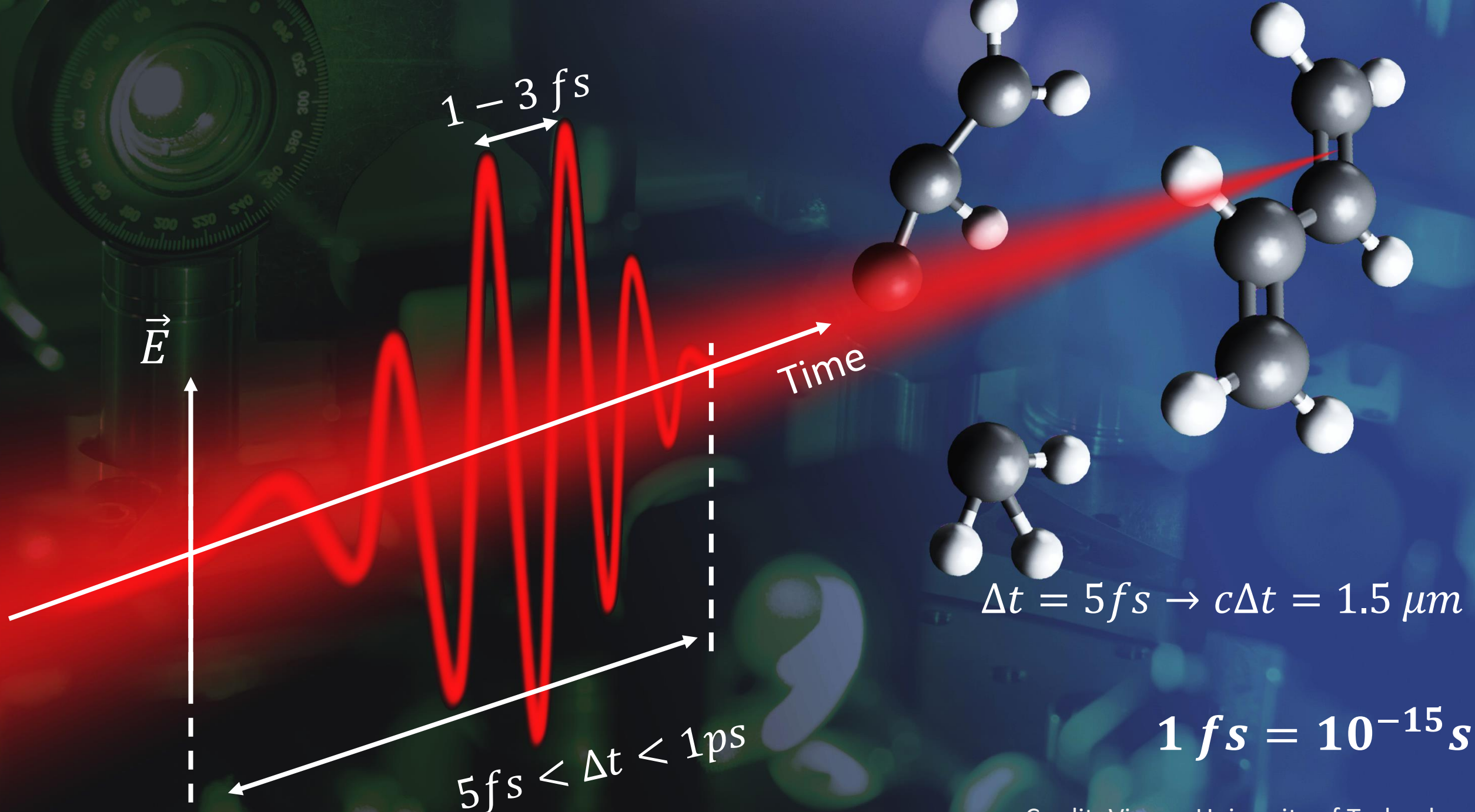
Ultrafast light matter interactions: linear and nonlinear effects

Maria Gabriela Capeluto

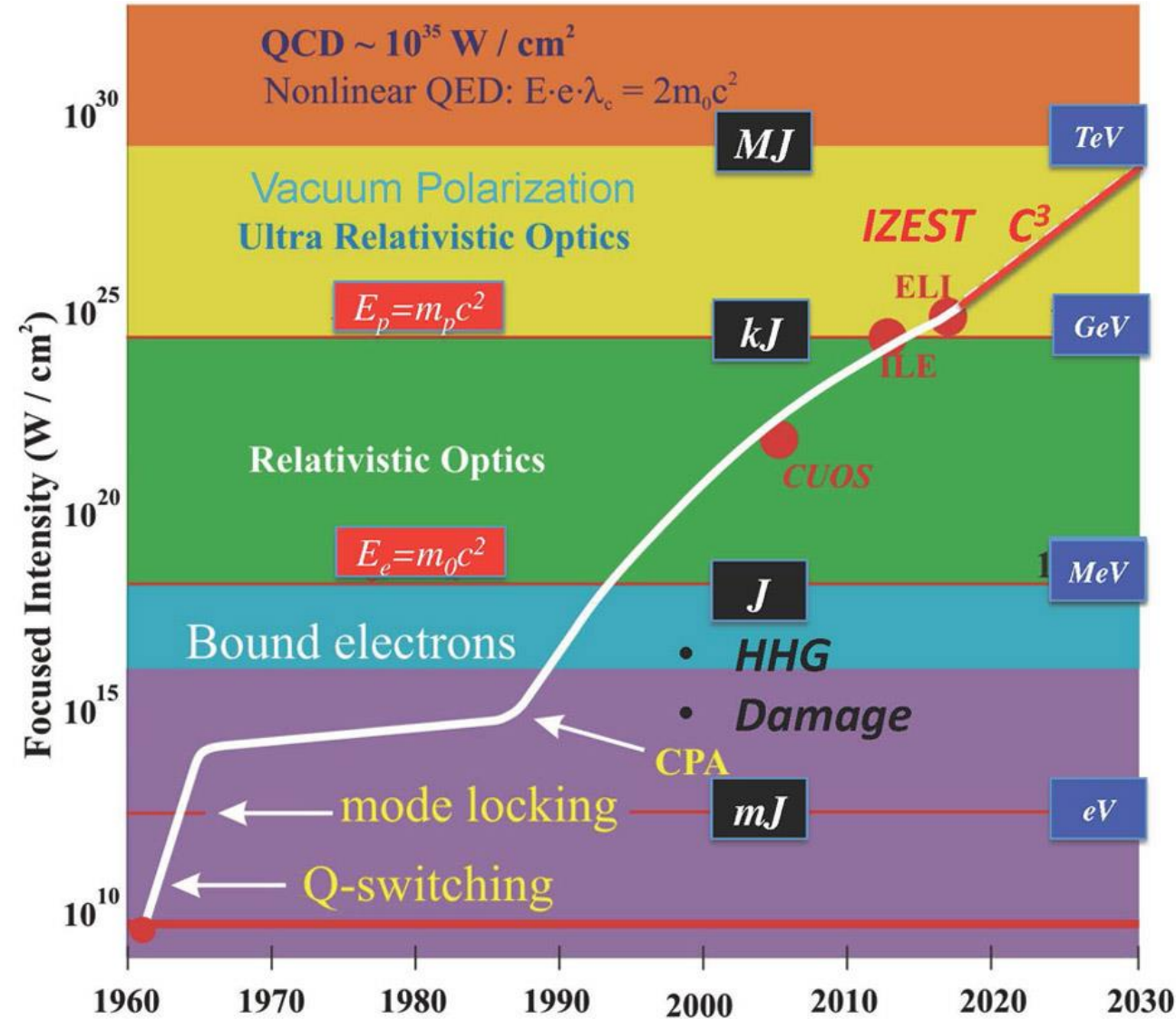
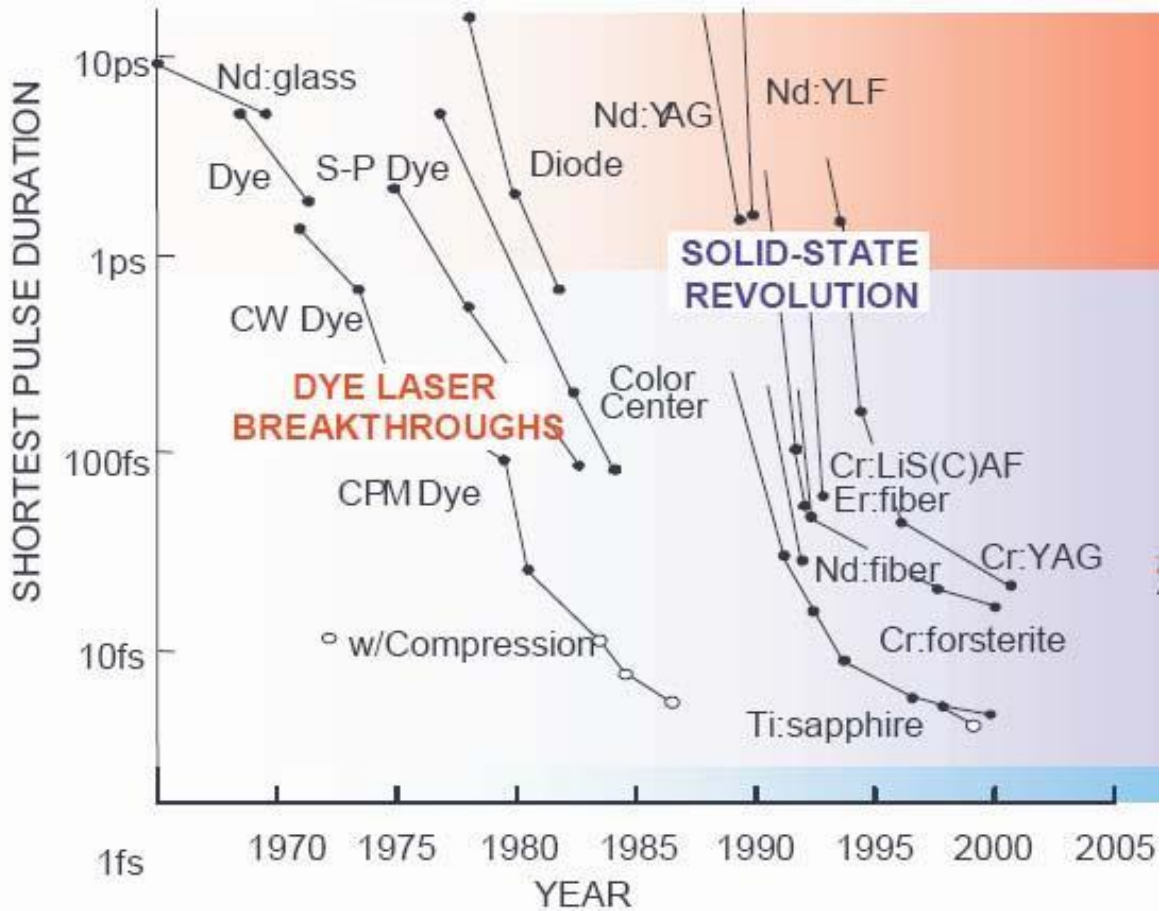
Laboratorio de Óptica y Fotónica
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Prof. MG Capeluto





Ultrashort and ultra powerful lasers

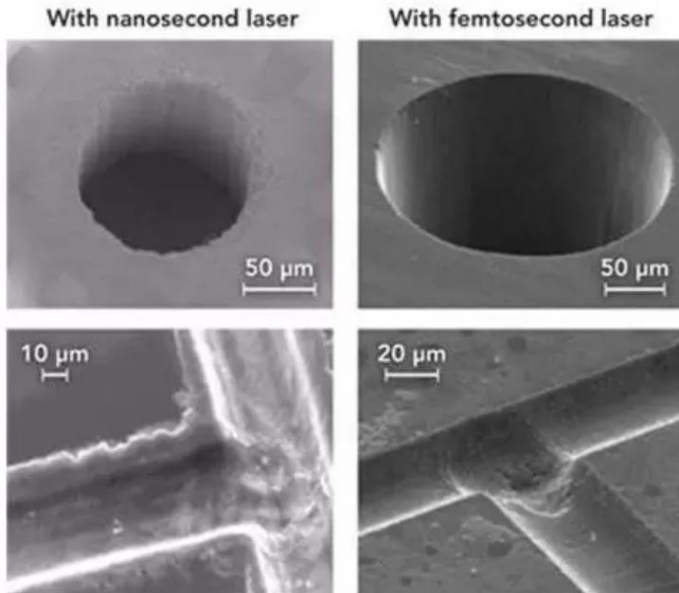


Few of many applications



Materials processing

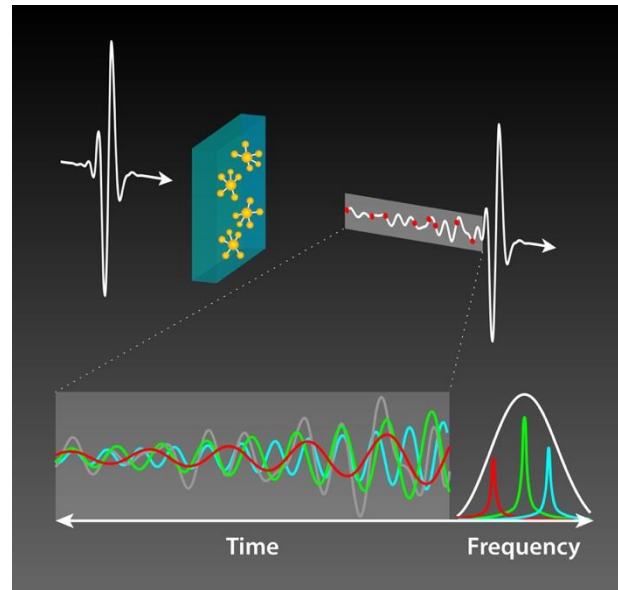
Cutting with no burning



Ultrafast Science 2021

Ultrafast spectroscopy

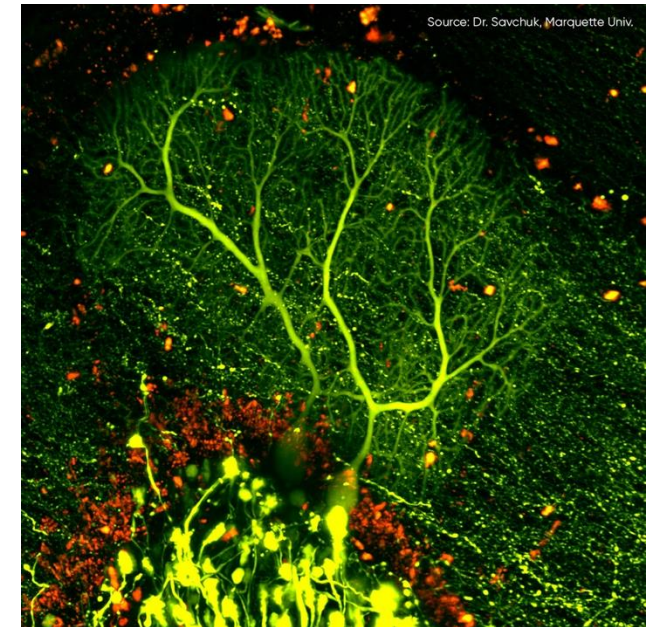
Dynamics of atoms and molecules
on fs to ps time scales



J.-M. Ménard, University of Ottawa

Multiphoton microscopy

High-resolution live cell images



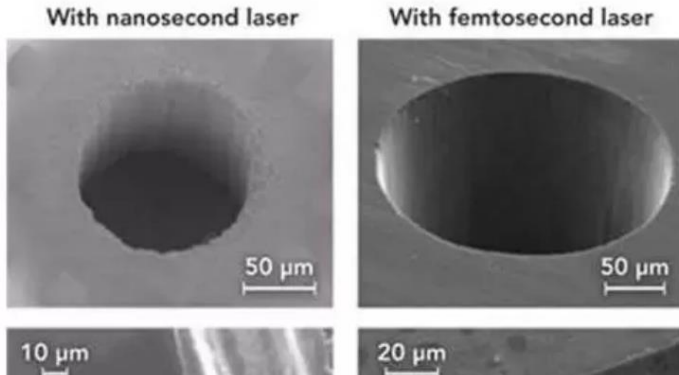
Dr. Savchuk, Marquette Univ.

Few of many applications

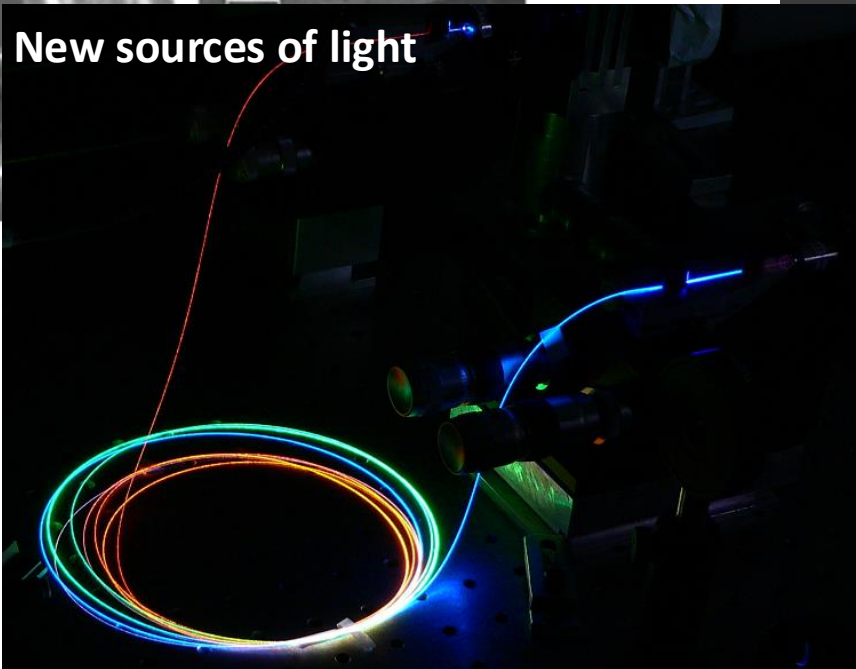


Materials processing

Cut without burning

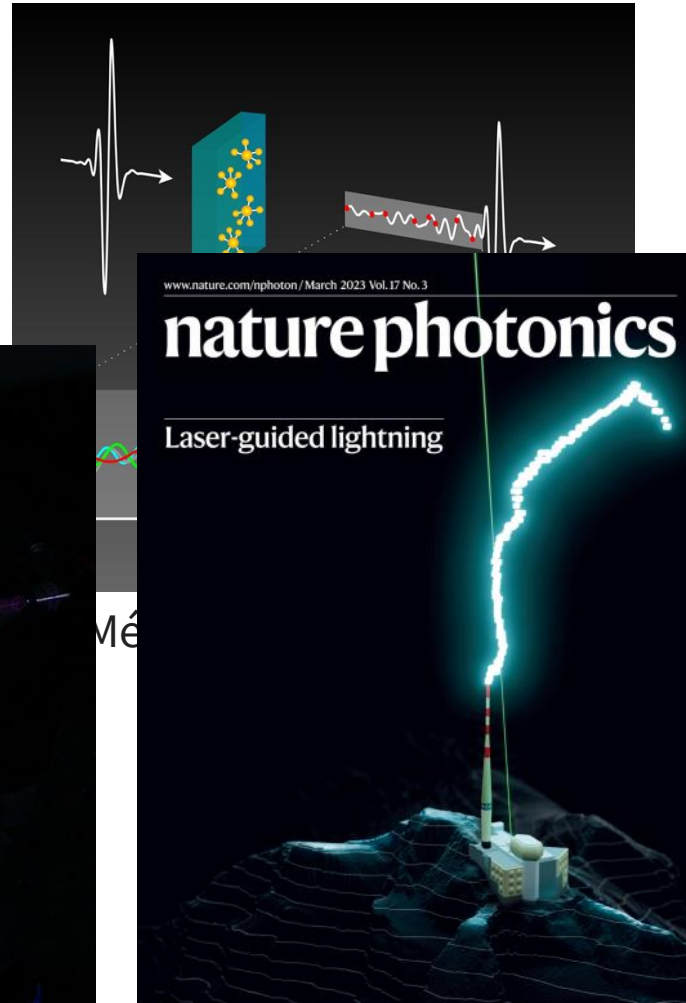


New sources of light



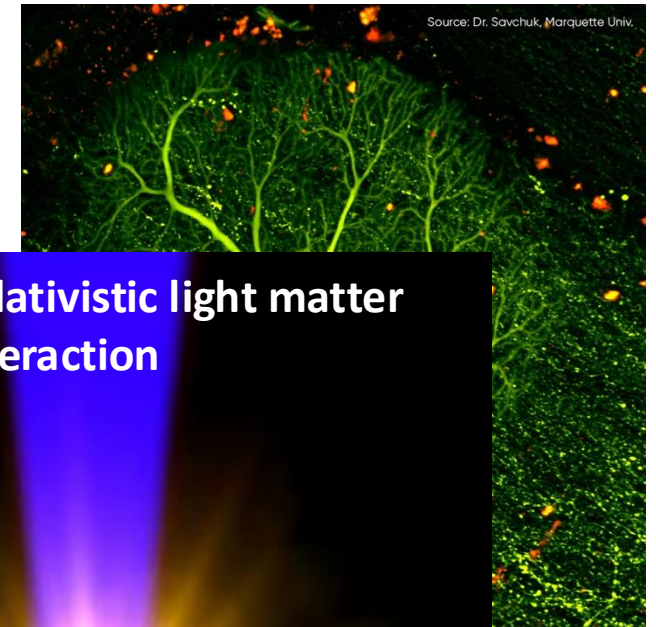
Ultrafast spectroscopy.

Dynamics of atoms and molecules
on fs to ps time scales

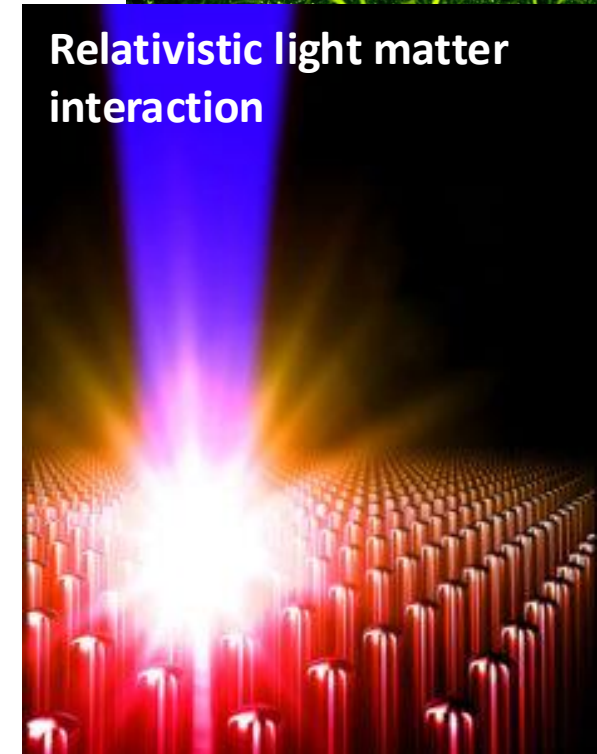


Multiphoton microscopy.

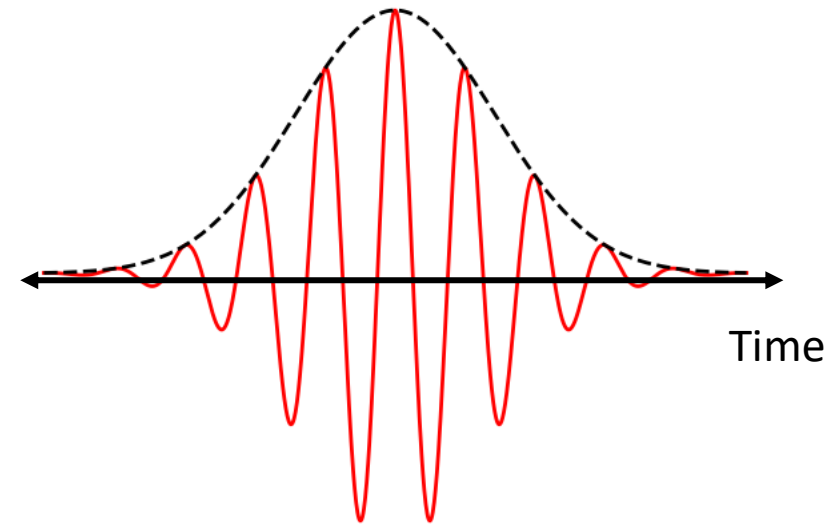
High resolution live cell images



Relativistic light matter interaction



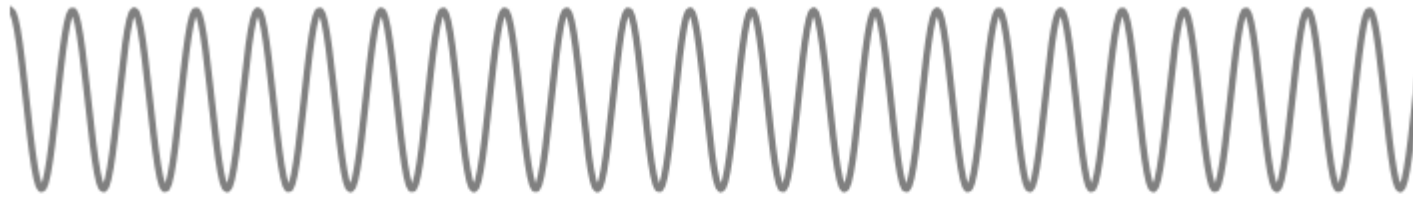
Let's build the pulse



Wave packet, phase and group velocity



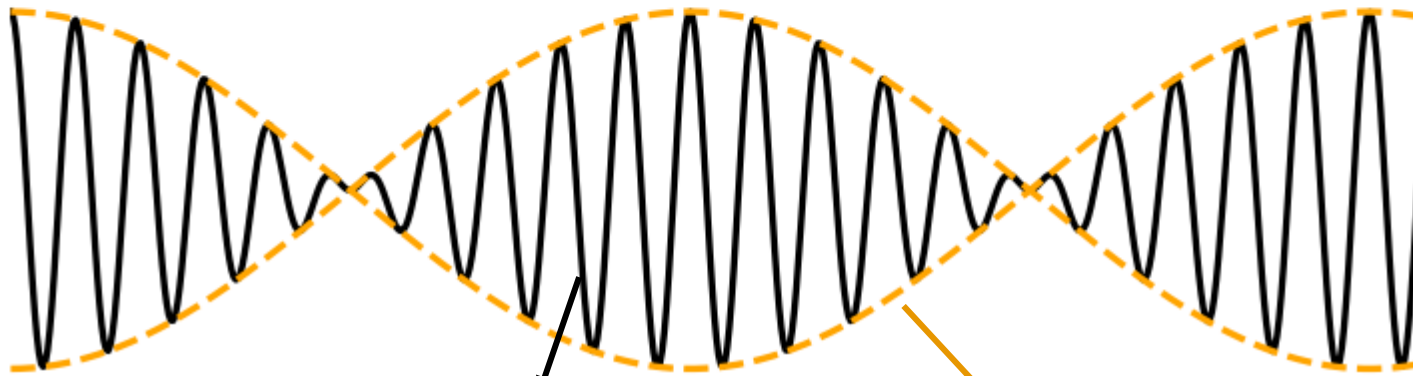
$$E_1 = A_o \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \omega_1 = \frac{c}{\eta(\omega_1)} k_1$$



$$E_2 = A_o \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad \omega_2 = \frac{c}{\eta(\omega_2)} k_2$$



$E_1 + E_2$



$$2A_o \cos(\omega_M t - k_M x) \cos(\omega_o t - k_o x)$$

$$2A_o \cos(\omega_M t - k_M x)$$

Phase velocity $v_p = \frac{c}{\eta(\omega)}$

Carrier wave

$$\omega_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$k_o = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Envelope

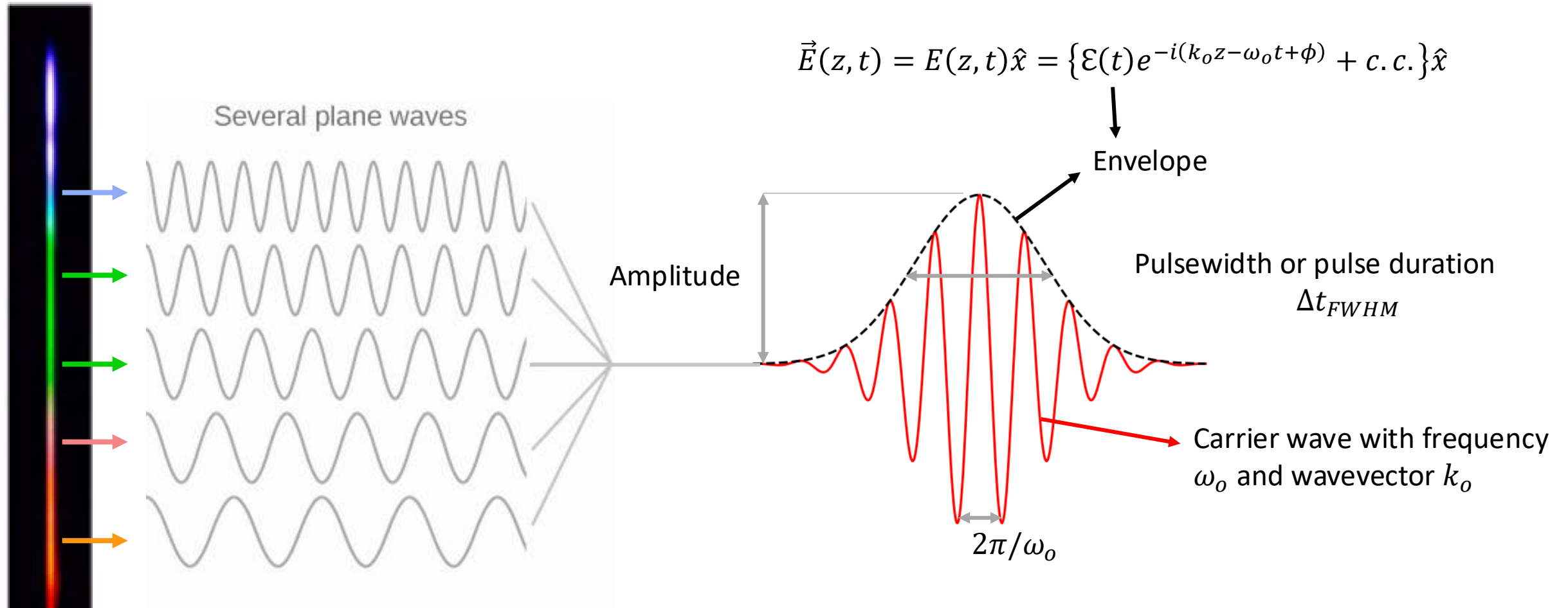
$$\omega_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

$$k_M = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

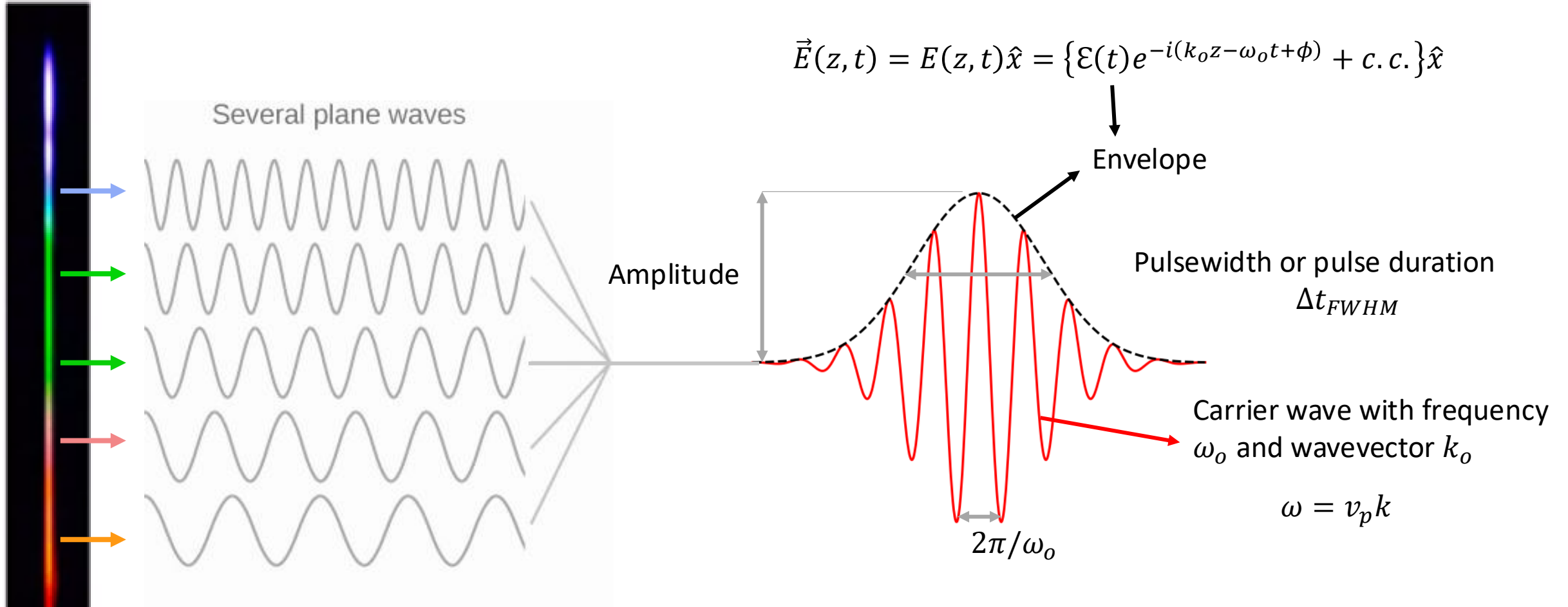
Envelope propagation velocity
(group velocity)

$$\frac{\omega_M}{k_M} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

A pulse of light: superposition of waves at different frequencies



A pulse of light: superposition of waves at different frequencies



$$\vec{E}(z, t) = E(z, t)\hat{x} = \{\mathcal{E}(t)e^{-i(k_0 z - \omega_0 t + \phi)} + c. c.\}\hat{x}$$

$$\omega = v_p k$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

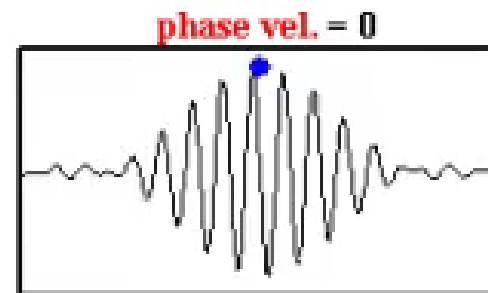
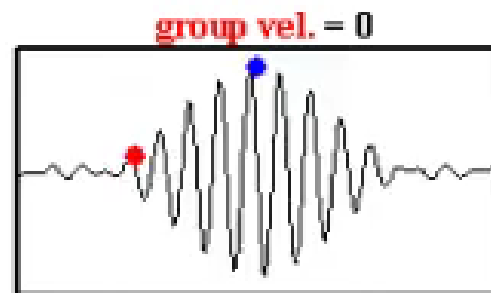
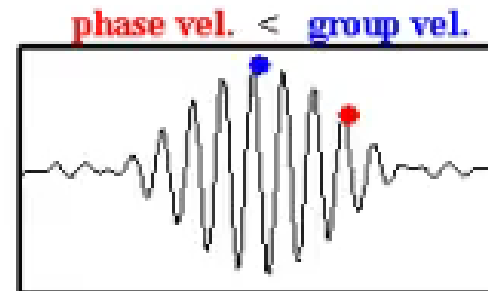
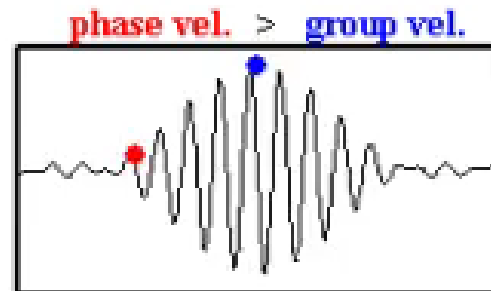
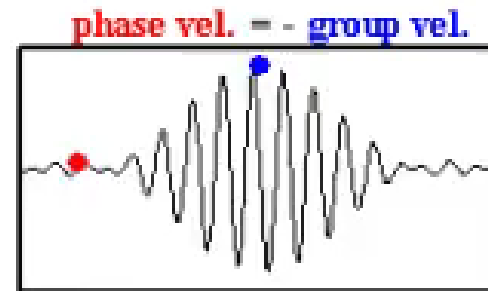
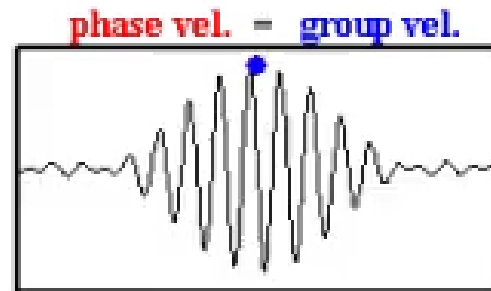
Dispersive term
= 0 in vacuum ($v_p = c$)

Non-dispersive media

≠ 0 in a material $v_p = \frac{c}{\eta(\lambda)}$

Dispersive media

A pulse of light: phase velocity and group velocity



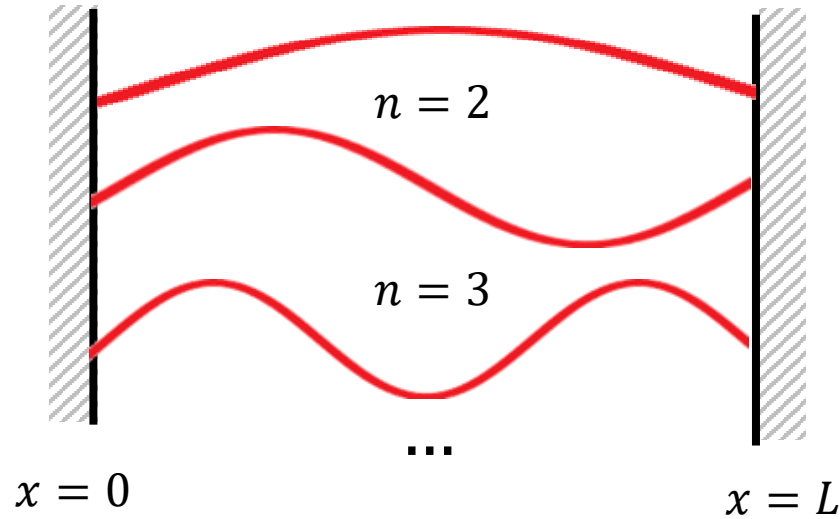
isvr

http://resource.isvr.soton.ac.uk/spcg/tutorial/tutorial/Tutorial_files/littlewavepackets.gif

Modes in an optical cavity with a gain laser medium



Longitudinal modes



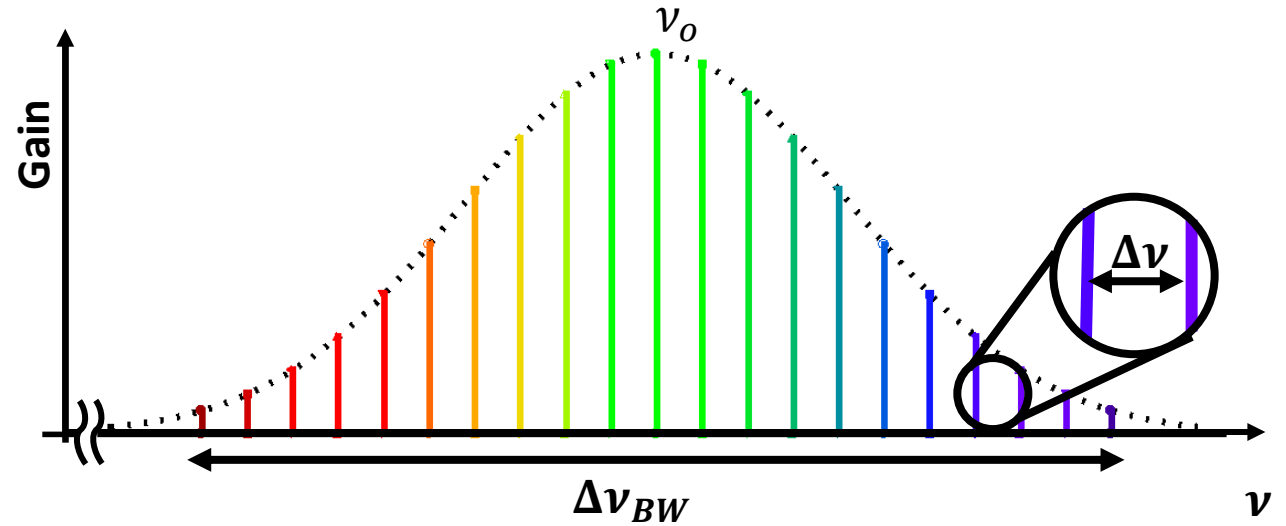
$$\Delta\nu = \frac{c}{2d\eta} = \frac{1}{\tau_{RT}}$$

Más general:

$$\tau_{RT} = (2n_c(d - L) + 2\eta d)/c$$

Número de modos

$$N = \frac{\text{ancho de línea}}{\text{separación}} = \frac{\Delta\nu_{BW}}{\Delta\nu}$$



Laser Ti:Za

$$\Delta\nu_{BW} = 128 \text{ THz},$$

largo de cavidad $d = 30 \text{ cm}$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d\eta} = 0.5 \text{ GHz}$$

$$N = \frac{\Delta\nu_{BW}}{\Delta\nu} = 256000$$

$$\lambda_o = 800 \text{ nm}$$

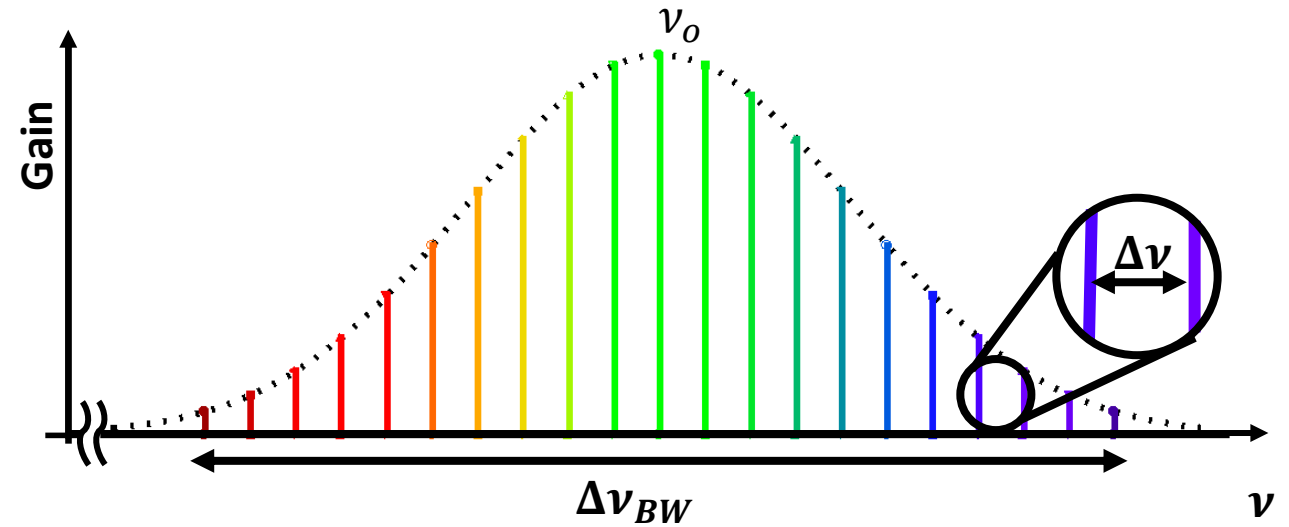
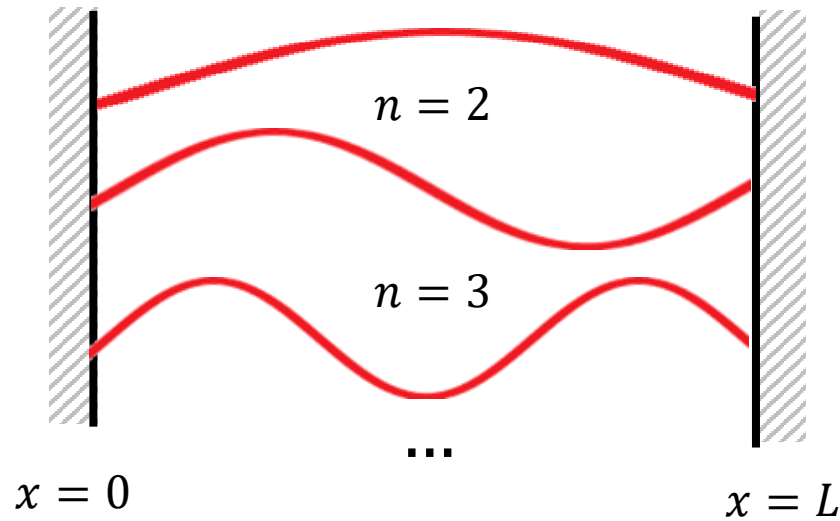
$$\nu_o = \frac{c}{\lambda} = 375 \text{ THz}$$

$$\frac{\Delta\nu_{BW}}{\nu_o} = \frac{\Delta\lambda_{BW}}{\lambda_o} \rightarrow \Delta\lambda_{BW} \sim 270 \text{ nm}$$

Modes in an optical cavity with a gain laser medium



Longitudinal modes



These phases are important for pulsed lasers

$$E_n(x, t) = E_o \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{and} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\omega_n = v_p k_n$$

Total electric field in the cavity

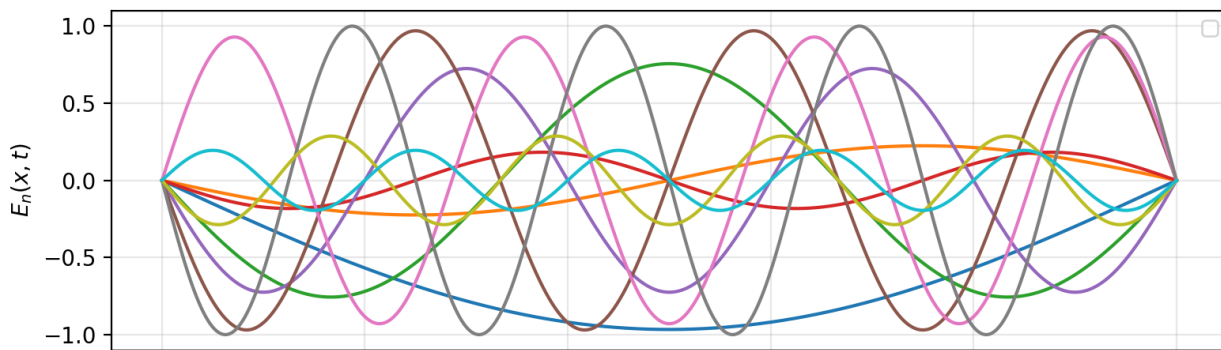
$$E(x, t) = \sum_{n_{min}}^{n_{max}} E_n(x, t)$$

$$I(x, t) \propto |E(x, t)|^2$$

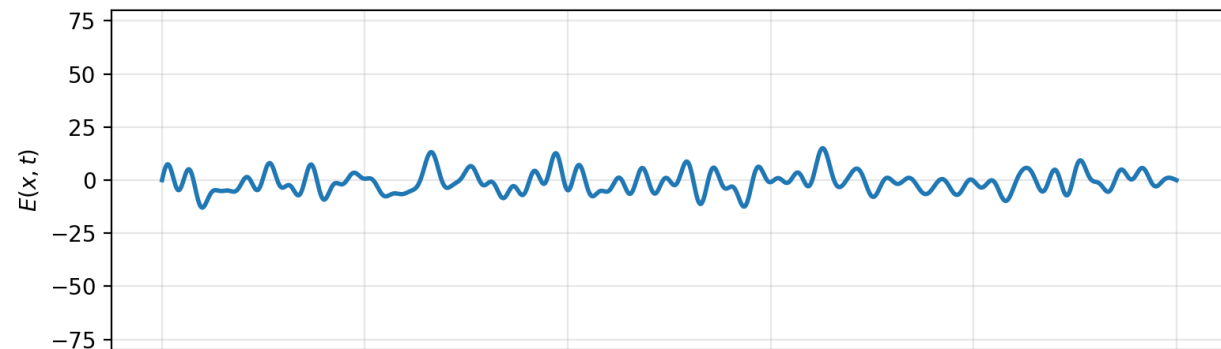
Ejemplo N=100 modos con fases aleatorias



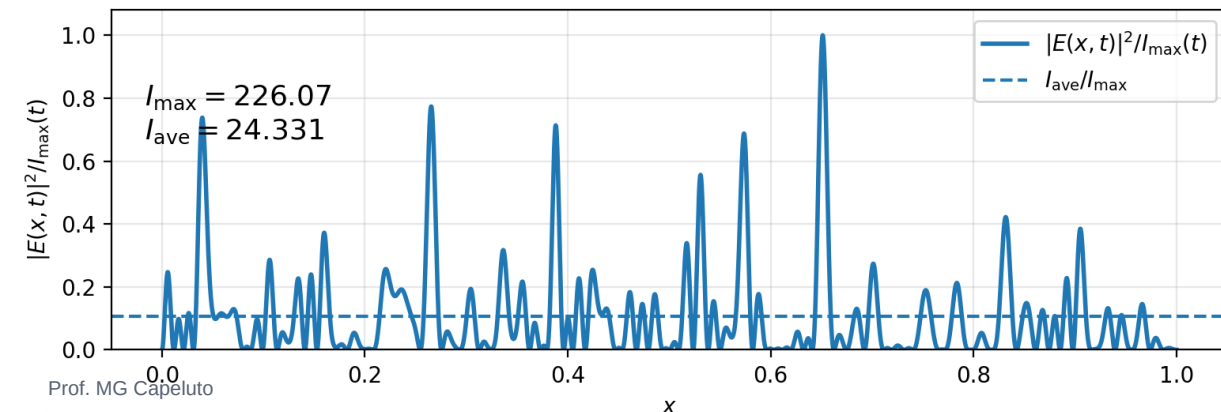
Modos individuales en $t = 0.5$



Suma de modos en $t = 0.5$



Intensidad normalizada en $t = 0.5$



$$E_n(x, t) = E_o \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

ϕ_n número aleatorios en $[0, 2\pi]$

$$E(x, t) = \sum_n E_n(x, t) \rightarrow I_T(x, t) \sim \langle E(x, t)^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(x, t')^2 dt'$$

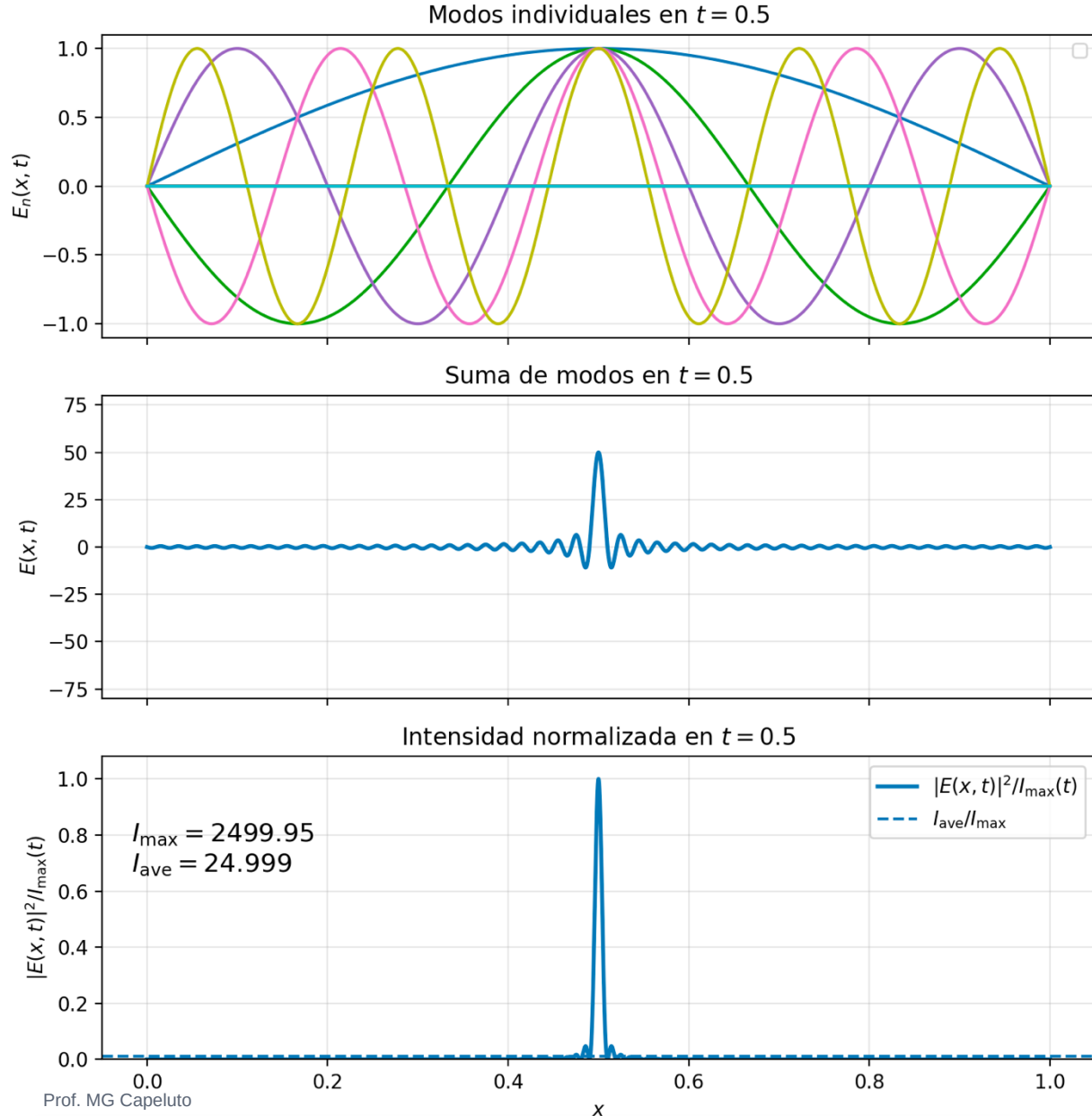
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \ll T \rightarrow \text{promedio en el tiempo de detección}$$

Como las fases no están correlacionadas

$$I(x, t) \propto \sum_n \langle |E_n(x, t)|^2 \rangle \sim N I_o$$

- Luego de sumar un número grande de modos, la intensidad media (instantánea promediada en el tiempo de respuesta del detector) resulta constante (laser CW)
- Usamos la aproximación ergódica para el cálculo de la intensidad en la simulación

Ejemplo N=100 modos con fases fijas



$$E_n(x, t) = E_o \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

$\phi_n = 0$ (o una función de n) Fases correlacionadas $\rightarrow$ interferencia

$$E(x, t) = \sum_n E_n(x, t)$$

Intensidad pico

$$E_{\text{pico}} = NE_o \rightarrow I_{\text{pico}} = N^2 I_o$$

Intensidad media

$$I_{\text{media}} = \frac{1}{T_{\text{rep}}} \int_0^{T_{\text{rep}}} I(t) dt \sim N I_o$$

$$I_{\text{pico}} = N I_{\text{media}}$$

El mode locking no crea energía adicional: redistribuye temporalmente la energía, concentrándola en pulsos cortos de alta intensidad pico.

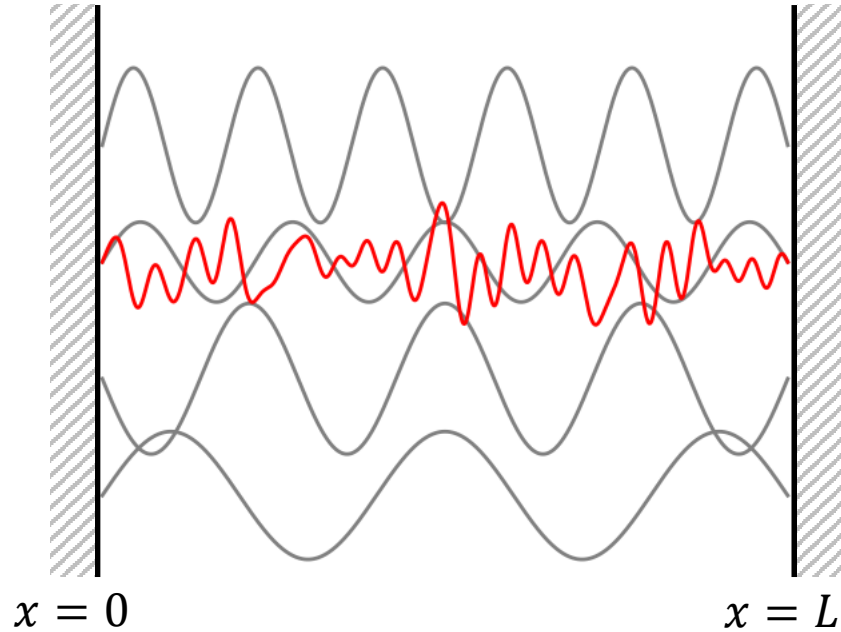
Energía por período:

$$I_{\text{pico}} \Delta t_{\text{pulso}} \approx I_{\text{media}} T_{\text{rep}}$$

Addition of modes with random phase differences



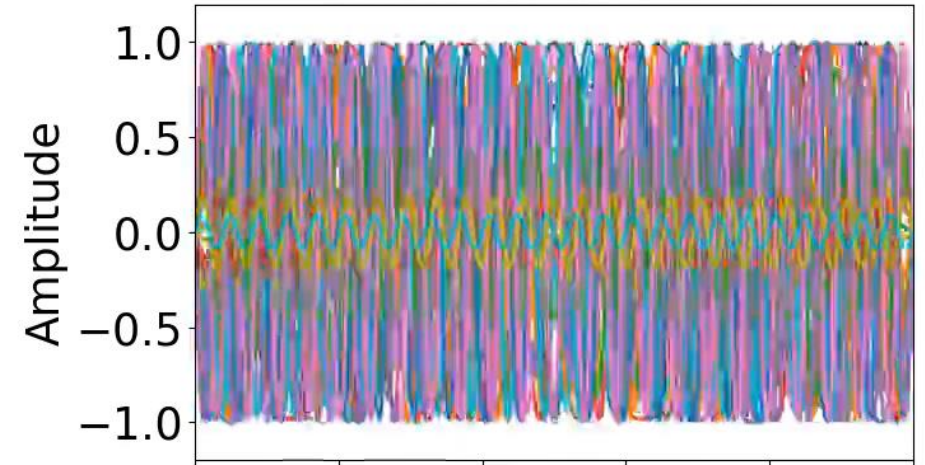
Incoherent addition of waves



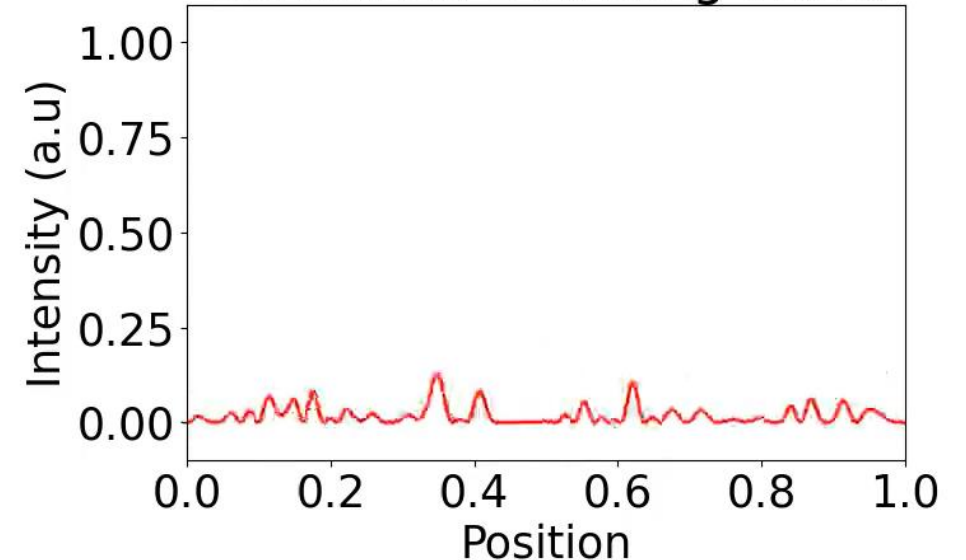
Destructive interference in all points inside the cavity

$$E_n(x, t) = E_o \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Individual Modes



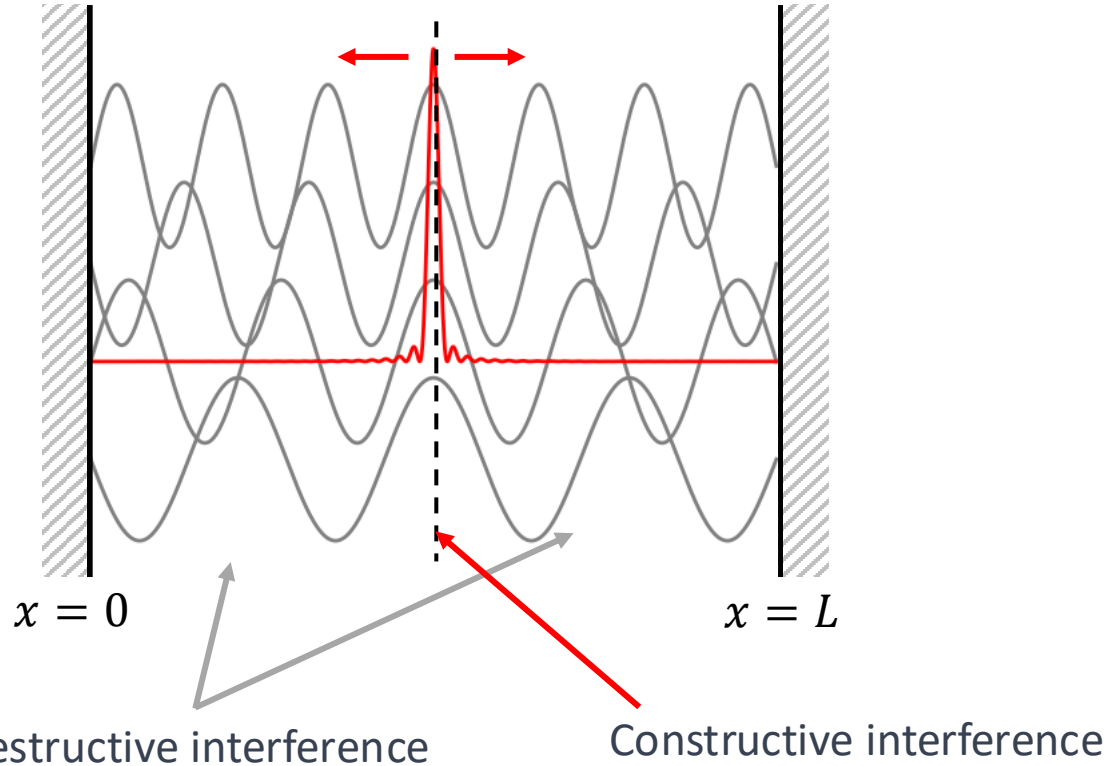
Combined Standing Wave



Addition of modes with constant phase differences



Coherent addition of waves

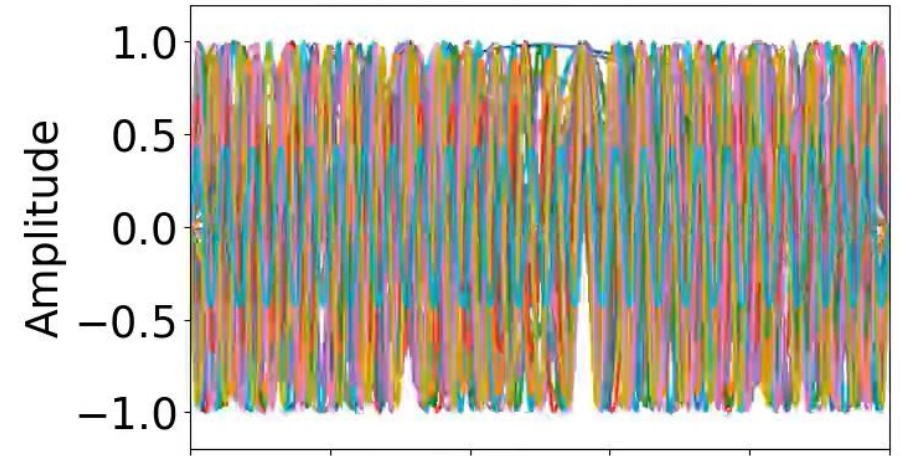


Localization of the wave packet through interference

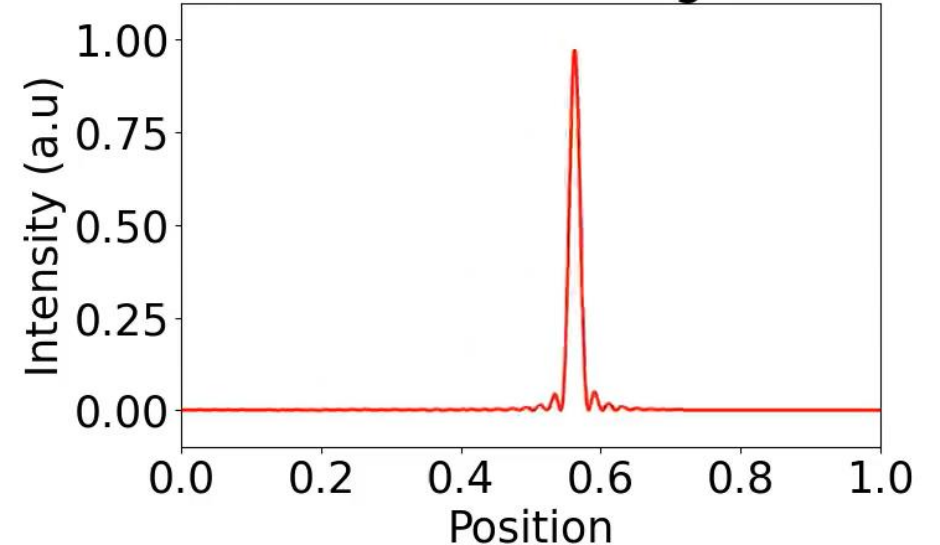
$$E_n(x, t) = E_o \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Tarea sugerida: ¿Cómo se escucha el Mode locking? ¿Cómo se escucha según cantidad de modos? ¿Cómo se escucha según fase?

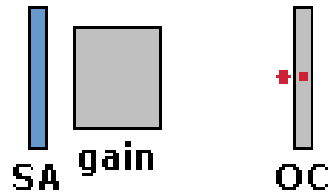
Individual Modes



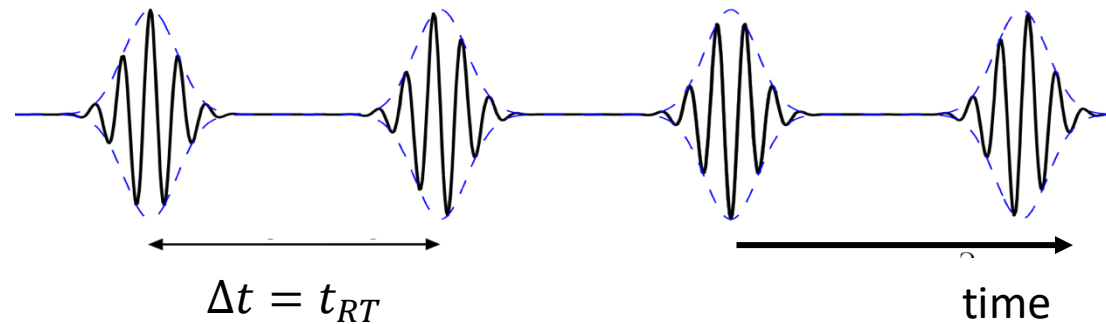
Combined Standing Wave



Addition of modes with constant phase differences

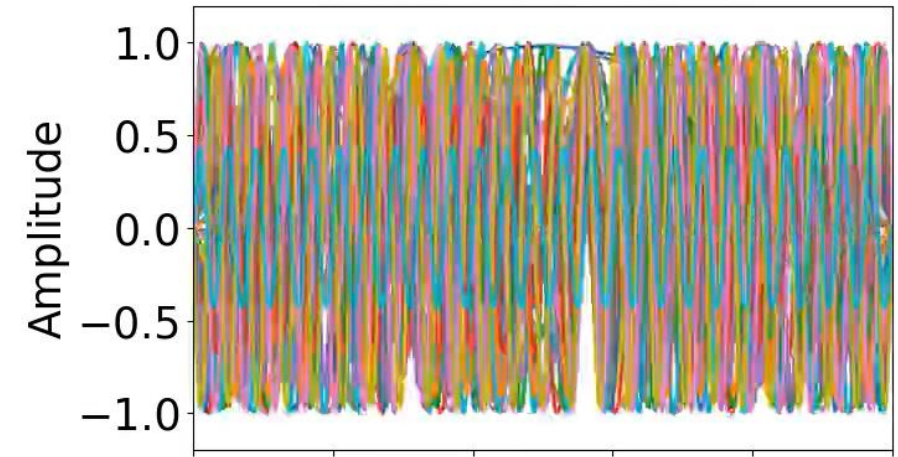


https://www.rp-photonics.com/mode_locking.html

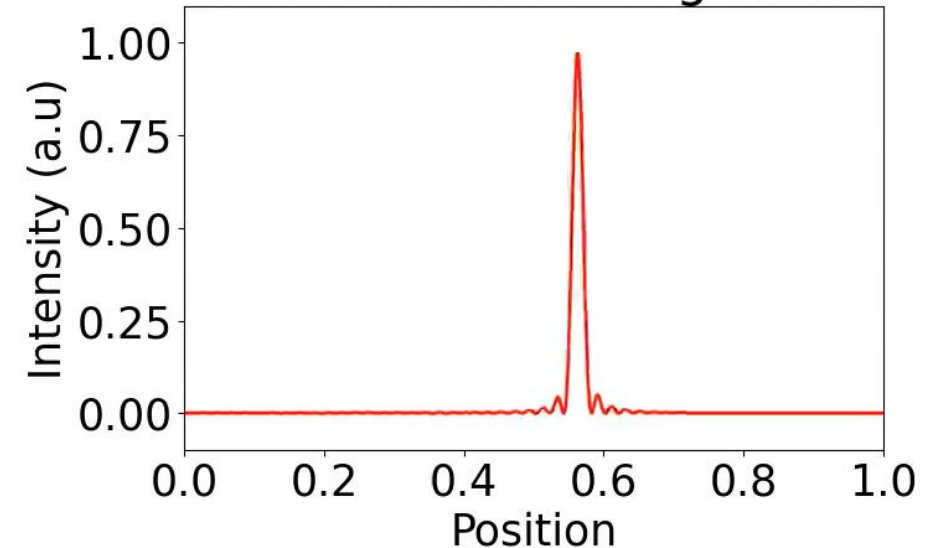


- De la cavidad sale un único pulso por round trip
- El ancho del pulso disminuye a medida que aumento el número de modos
- La intensidad del pulso aumenta a medida que aumento el número de modos

Individual Modes



Combined Standing Wave



Dependencia temporal del campo total



$$\phi_n = \phi_o$$

$$v_n = \Delta v n = n \frac{c}{2\eta d}$$

$$E(t) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_n e^{i2\pi(v_o + n\Delta v)t + i\phi_o} = E_o e^{i(2\pi v_o t + \phi_o)} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{i2\pi n\Delta v t}$$



Similar a la interferencia de N fuentes separadas por una distancia Δv

$$k = n + (N-1)/2$$

$$E(t) = E_o e^{i(2\pi v_o t + \phi_o)} \sum_{k=0}^{(N-1)} e^{i2\pi (k - (N-1)/2) \Delta v t} = E_o e^{i(2\pi v_o t + \phi_o)} e^{-i2\pi ((N-1)/2) \Delta v t} \sum_{k=0}^{(N-1)} e^{i2\pi k \Delta v t}$$

$$q = e^{i2\pi \Delta v t}$$

$$E(t) = E_o e^{i(2\pi v_o t + \phi_o)} e^{-i2\pi ((N-1)/2) \Delta v t} \frac{[1 - e^{i2\pi N \Delta v t}]}{1 - e^{i2\pi \Delta v t}}$$

Dependencia temporal del campo total



$$E(t) = E_o e^{i(2\pi\nu_o t + \phi_o)} e^{-i2\pi((N-1)/2)\Delta\nu t} \frac{[1 - e^{i2\pi N\Delta\nu t}]}{1 - e^{i2\pi \Delta\nu t}}$$

$$\text{Aux:} \quad \frac{1 - e^{i2\pi N\Delta\nu t}}{1 - e^{i2\pi \Delta\nu t}} = \frac{e^{i\pi N\Delta\nu t}}{e^{i\pi \Delta\nu t}} \frac{e^{-i\pi N\Delta\nu t} - e^{i\pi N\Delta\nu t}}{e^{-i\pi \Delta\nu t} - e^{i\pi \Delta\nu t}} = \frac{e^{i\pi N\Delta\nu t}}{e^{i\pi \Delta\nu t}} \frac{\sin(\pi N\Delta\nu t)}{\sin(\pi \Delta\nu t)}$$

$$E(t) = E_o e^{i(2\pi\nu_o t + \phi_o)} e^{-i2\pi((N-1)/2)\Delta\nu t} \frac{e^{i\pi N\Delta\nu t}}{e^{i\pi \Delta\nu t}} \frac{\sin(\pi N\Delta\nu t)}{\sin(\pi \Delta\nu t)} \Rightarrow$$

$$I(t) = |E_o|^2 \frac{\sin^2(\pi N\Delta\nu t)}{\sin^2(\pi \Delta\nu t)}$$



Resultado análogo a la interferencia de N fuentes separadas por una distancia $1/\Delta\nu$

Características de los pulsos



$$I(t) = I_o \frac{\sin^2(\pi N \Delta \nu t)}{\sin^2(\pi \Delta \nu t)}$$

$$\text{Máximos: } \pi \Delta \nu t = q\pi$$

$$t_q = \frac{q}{\Delta \nu}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta \nu} = \tau_{RT}$$

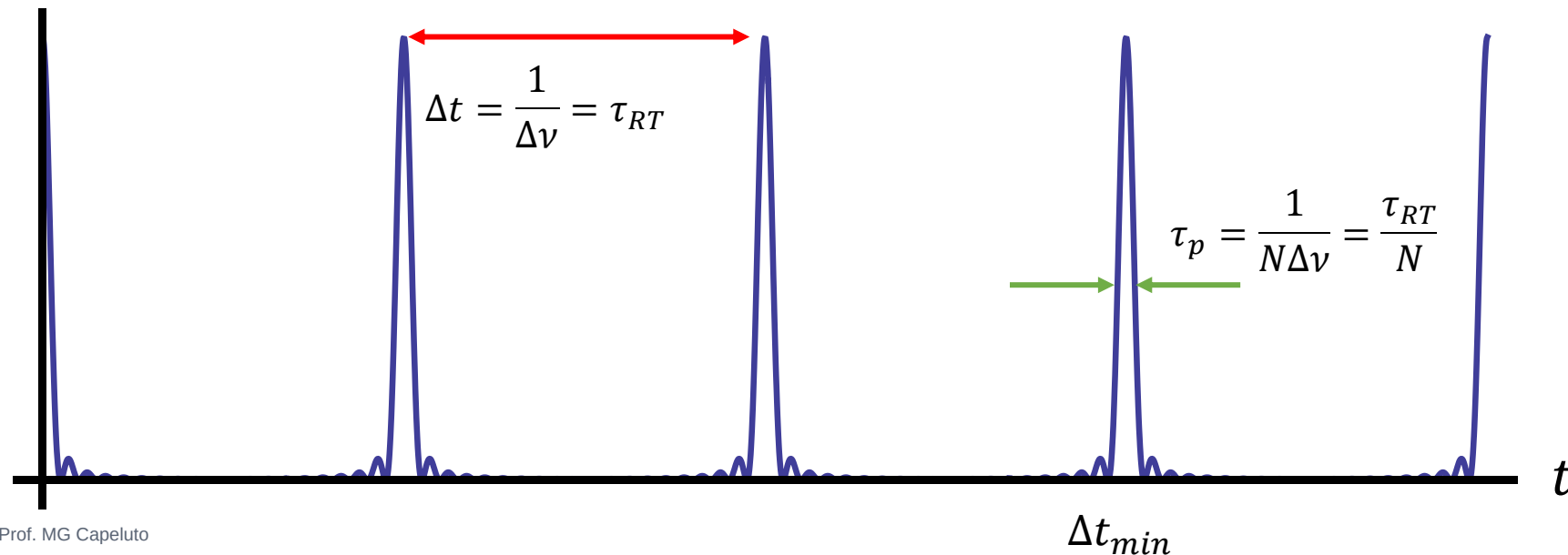
$$I_{max} = I_o N^2$$

$$\text{Mínimos: } \pi N \Delta \nu t = q\pi$$

$$t_q = \frac{q}{N \Delta \nu}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

$$q = \pm 1$$

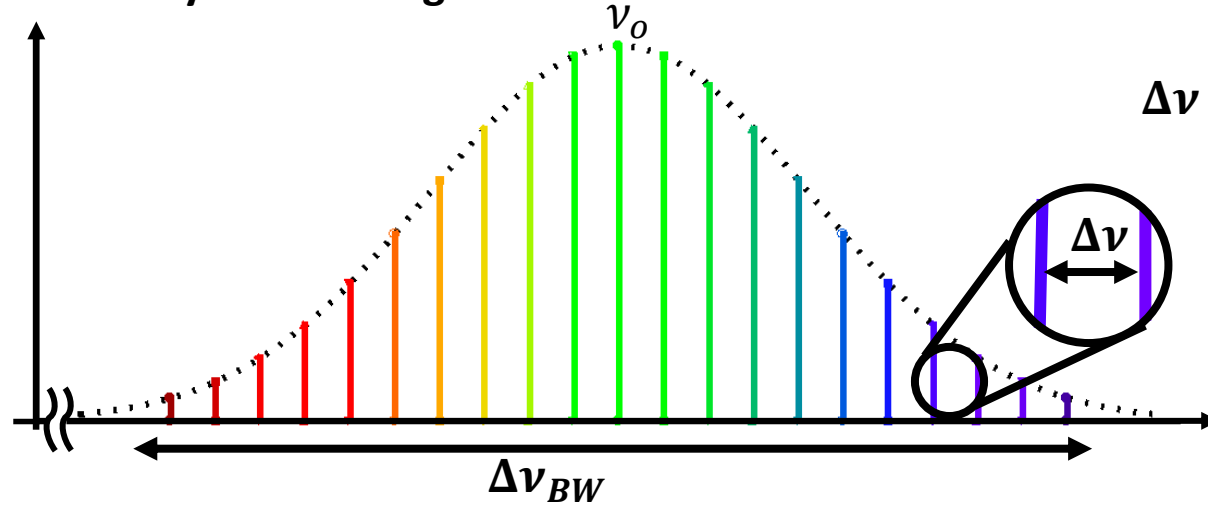
$$\Delta t_{min} = \frac{2}{N \Delta \nu} = \frac{2 \tau_{RT}}{N} \Rightarrow \tau_p \sim \frac{\tau_{RT}}{N}$$



Ancho de línea + modos y pulsos



Ganancia y modos longitudinales



$$\Delta\nu = \frac{c}{2d\eta} = \frac{1}{\tau_{RT}}$$

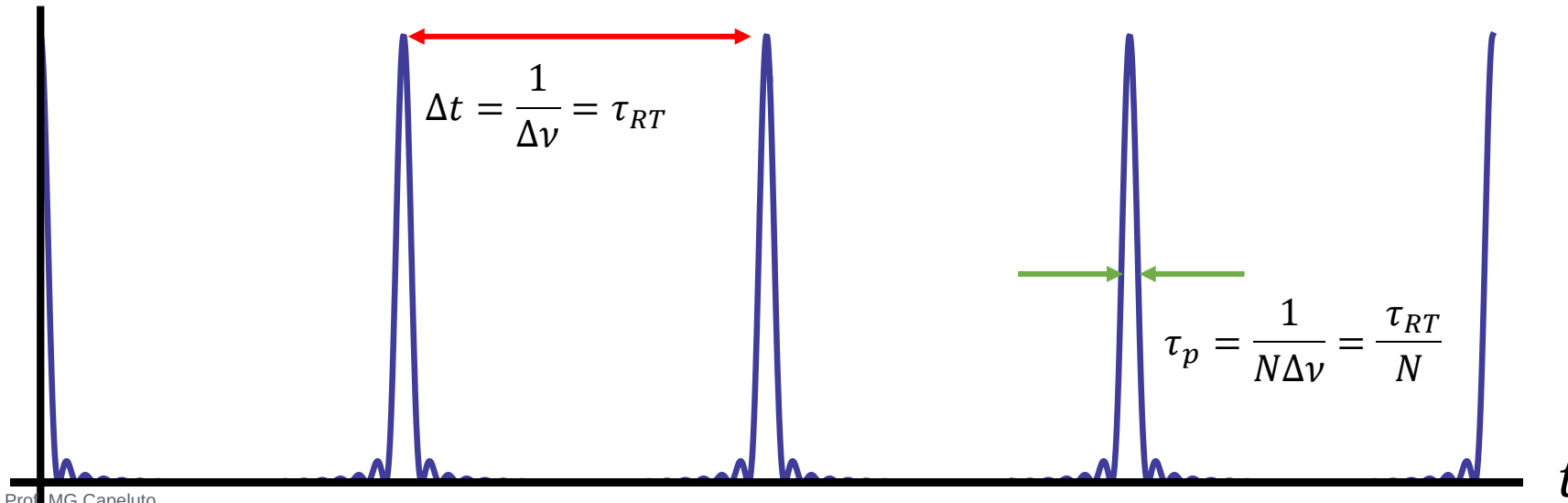
Número de modos

$$N = \frac{\text{ancho de línea}}{\text{separación}} = \frac{\Delta\nu_{BW}}{\Delta\nu}$$

$$\Delta\nu_{BW} = N\Delta\nu = \frac{N}{\tau_{RT}} \sim \frac{1}{\tau_p}$$

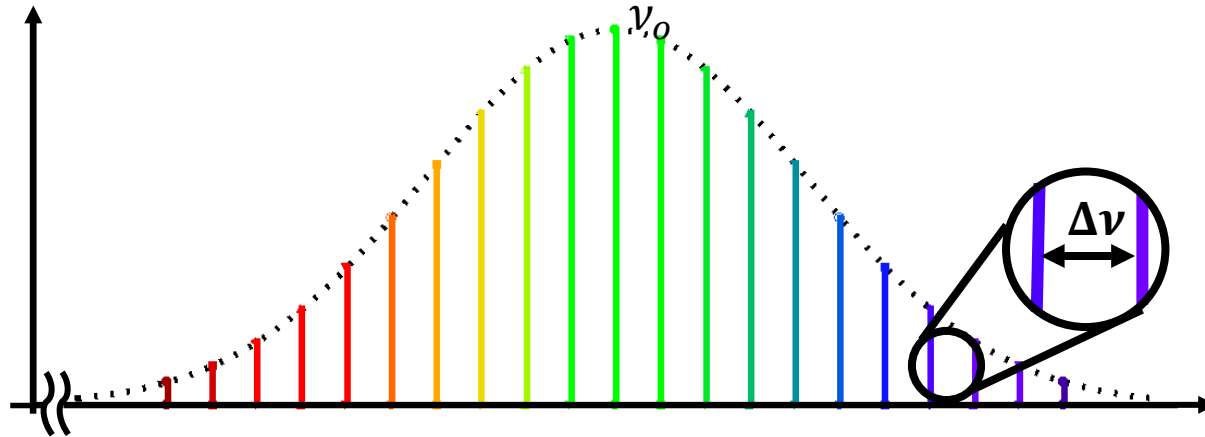
$\Delta\nu_{BW}\tau_p \sim 1$ pulsos limitados por transformada

Intensidad en función del tiempo



$$\begin{aligned} P_m \tau_{RT} &= P_{pico} \tau_p \\ P_{pico} &= N P_m \end{aligned}$$

Perfil de línea de emisión y forma del pulso



*Supongamos ancho de línea gaussiano
(ejemplo ensanchamiento Doppler)*

$$I_n(\nu) = I_o e^{-4 \ln(2) \left(\frac{n \Delta \nu}{\delta \nu} \right)^2}$$

$$E_n(\nu) = E_o e^{-2 \ln(2) \left(\frac{n \Delta \nu}{\delta \nu} \right)^2}$$

N modos de frecuencia $\nu_n = \nu_o + n\Delta\nu$

$$E(t) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_o e^{-2 \ln(2) \left(\frac{n \Delta \nu}{\delta \nu} \right)^2} e^{i2\pi(\nu_o + n\Delta\nu)t} = e^{i2\pi\nu_o t} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_o e^{-2 \ln(2) \left(\frac{n \Delta \nu}{\delta \nu} \right)^2} e^{i2\pi n \Delta \nu t}$$

Si N es muy grande ($N \rightarrow \infty$)

$$\nu = n \Delta \nu$$

$$d\nu = dn \Delta \nu$$

$$\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\Delta \nu}$$

$$E(t) = E_o e^{i2\pi\nu_o t} \frac{1}{\Delta\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2 \ln(2) \left(\frac{\nu}{\delta\nu}\right)^2} e^{i2\pi \nu t} d\nu$$

$$E(t) = E_o e^{i2\pi\nu_o t} \frac{1}{\Delta\nu} \mathcal{F} \left\{ e^{-2 \ln(2) \left(\frac{\nu}{\delta\nu}\right)^2} \right\}$$

$$E(t) = E_o e^{i2\pi\nu_o t} \left\{ \left(\frac{\pi}{2 \ln(2)} \right)^{1/2} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \delta\nu t}{\sqrt{\ln(2)}} \right)^2} \right\}$$

$$\frac{P(t)}{P_o} = \frac{\pi}{2 \ln(2)} \left(\frac{\delta\nu}{\Delta\nu} \right)^2 e^{-\left(\frac{\pi \delta\nu t}{\sqrt{\ln(2)}} \right)^2}$$

$$\tau_p = \frac{2 \ln(2)}{\pi \delta\nu} \sim \frac{0.44}{\delta\nu}$$

- La envolvente del pulso es la transformada del perfil de línea de emisión
- La fase espectral en este caso es constante, por lo tanto, obtenemos el pulso más angosto posible

Dado que la fase espectral es constante, el pulso es **limitado por transformada**. En ese caso se obtiene el mínimo producto ancho temporal por ancho espectral para esa forma de pulso.

$$\tau_p \delta\nu = 0.44$$

para un pulso gaussiano, donde τ_p es el FWHM temporal de la intensidad/potencia y $\delta\nu$ es el FWHM espectral.

The shorter the pulse, the broader the spectrum



Evolution in time

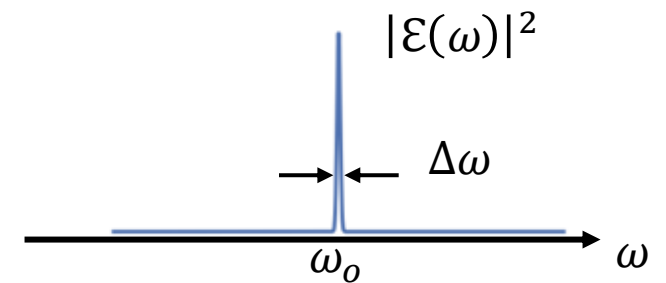
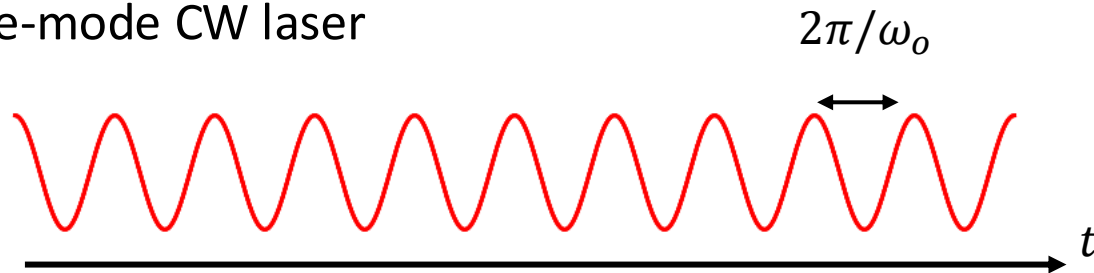
$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$\mathcal{F}$

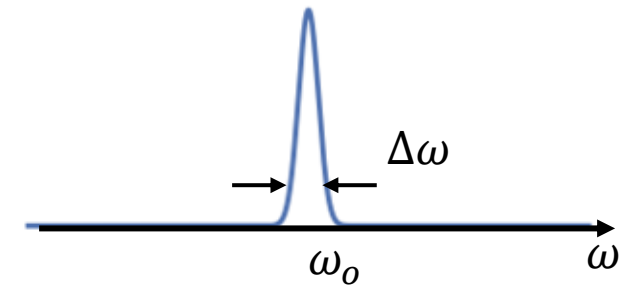
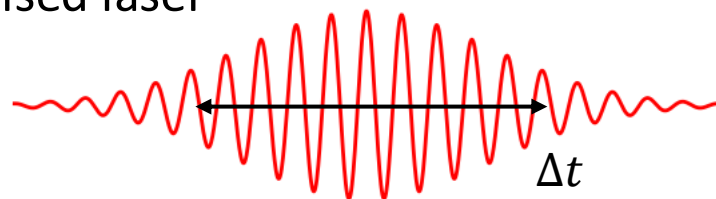
Spectrum

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int E(z, t) e^{-i\omega t} dt$$

Single-mode CW laser



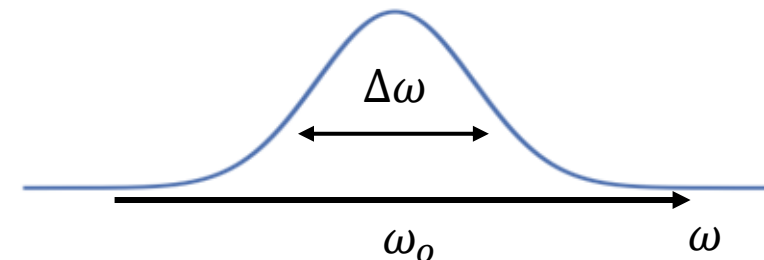
Long-pulsed laser



$$\Delta\omega\Delta t = TB$$

Time-bandwidth product

Short-pulsed laser

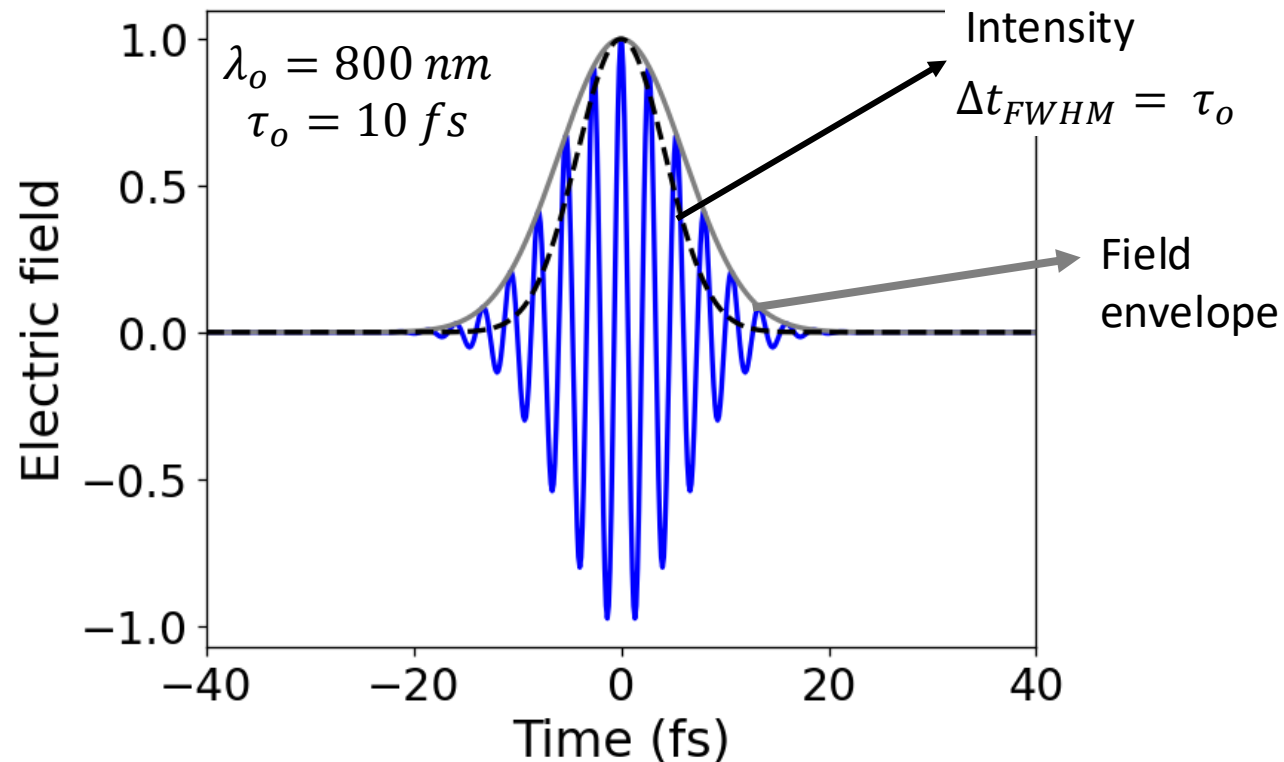


Transform-limited or bandwidth-limited pulses



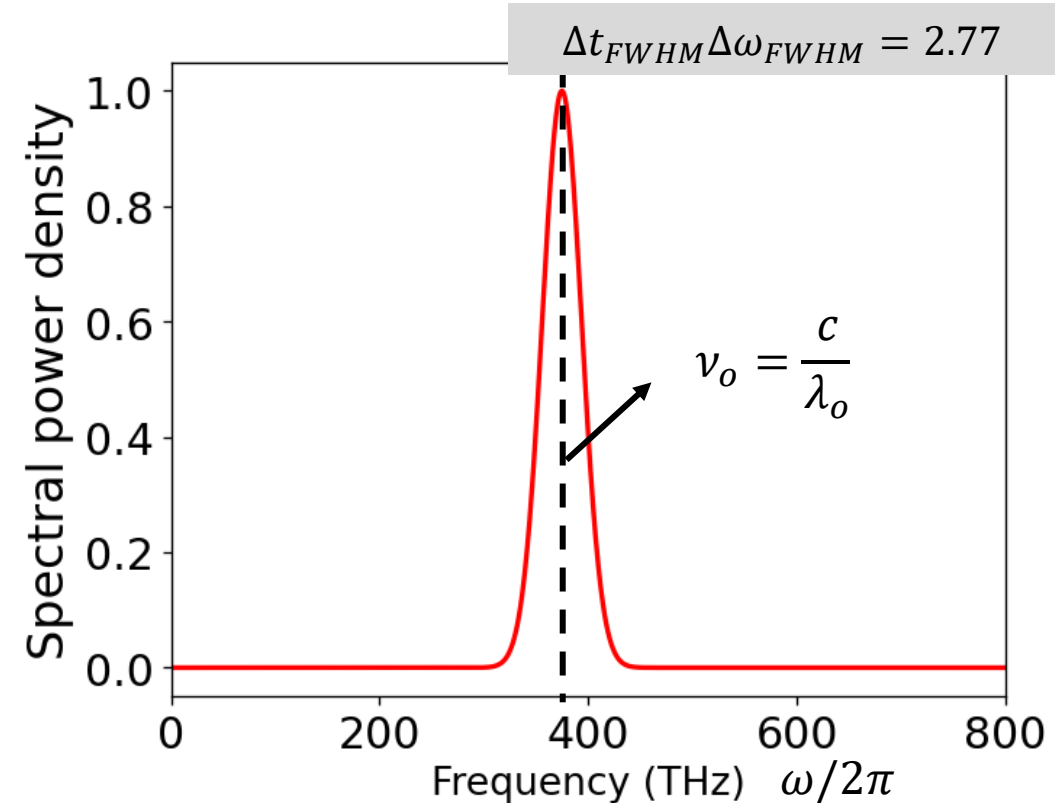
Pulse shape

$$E(z, t) = E_o e^{[-2 \ln(2) \frac{t^2}{\tau_o^2}]} e^{i(\omega_o t - k_o z)}$$



Spectrum

$$\tilde{E}(0, \omega) = \tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{E_o \tau_o}{2\sqrt{\ln(2)}} e^{[-\frac{\tau_o^2}{8 \ln(2)} (\omega - \omega_o)^2]}$$



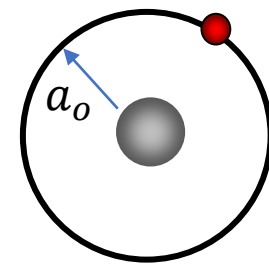
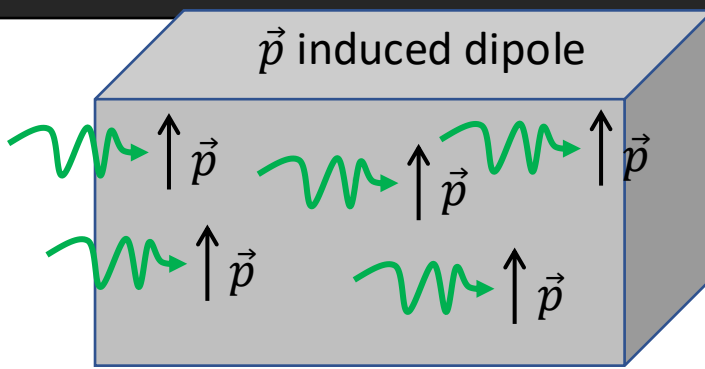
The shortest pulse for the spectral bandwidth available occurs when the phase is constant across the spectrum

Other transform-limited pulses



Pulse Shape	Fourier Transform	Pulse Width	Time-Bandwidth Product
$A(t)$	$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt$	Δt	$\Delta t \cdot \Delta f$
Gaussian: $e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$	$\sqrt{2\pi} \tau e^{-\frac{1}{2} \tau^2 \omega^2}$	$2\sqrt{\ln 2} \tau$	0.441
Hyperbolic Secant: $\text{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\pi}{2} \text{sech}\left(\frac{\pi}{2} \tau \omega\right)$	1.7627τ	0.315
Rect-function: $\begin{cases} 1, & t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2 \end{cases}$	$\tau \frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$	τ	0.886
Lorentzian: $\frac{1}{1+(t/\tau)^2}$	$2\pi \tau e^{- \tau\omega }$	1.287τ	0.142
Double-Exp.: $e^{- \frac{t}{\tau} }$	$\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}$	$\ln 2 \tau$	0.142

Light matter interactions with optical pulses



$$E_o = \frac{e}{4\pi\epsilon_o a_o^2} \sim 5 \times 10^{11} \text{ V/m}$$

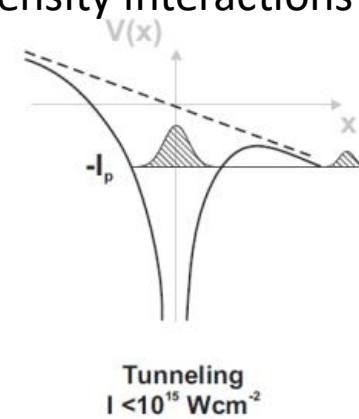
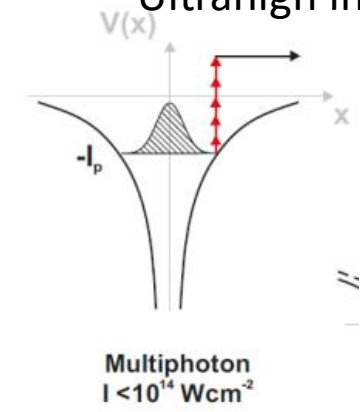
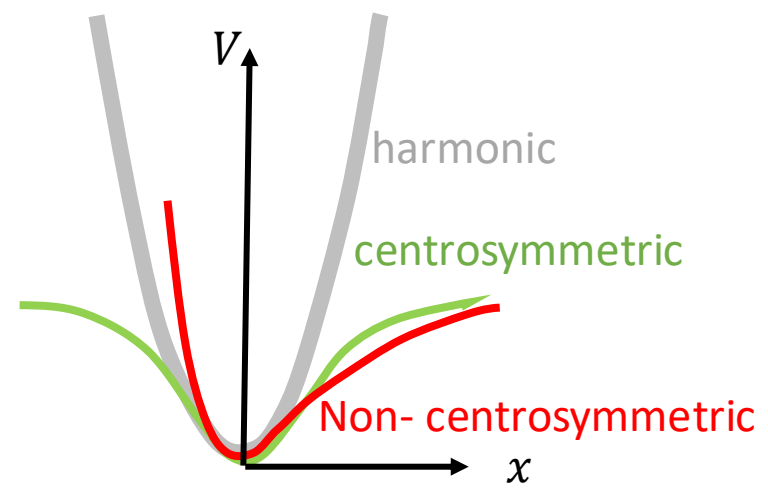
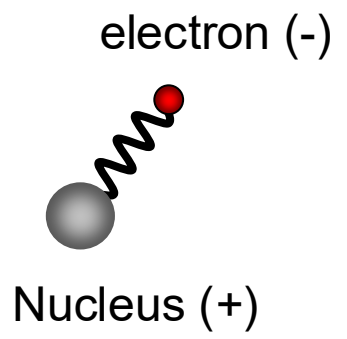
$$I \sim 3 \times 10^{16} \text{ Wcm}^{-2}$$



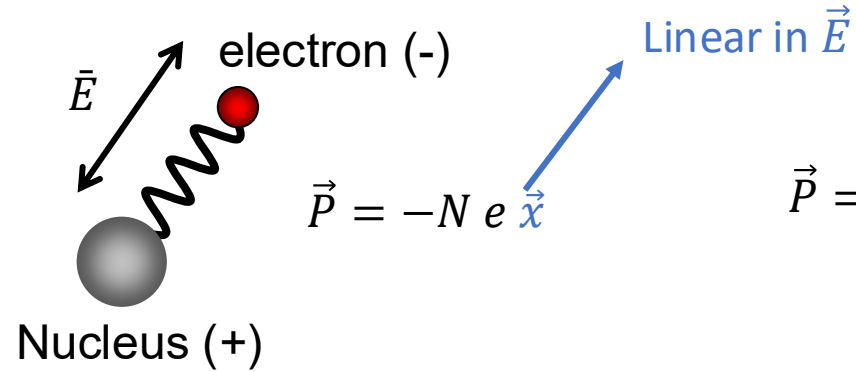
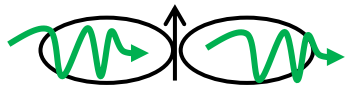
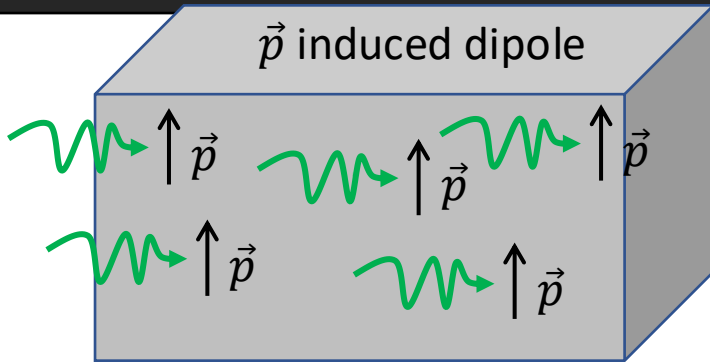
Linear optical properties

Nonlinear optical properties

Ultrahigh intensity interactions



Propagation of pulses in a linear dispersive medium



$$\vec{P} = -N e \vec{x}$$

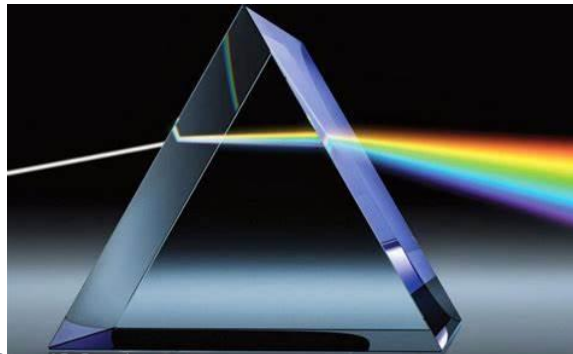
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n(\omega)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

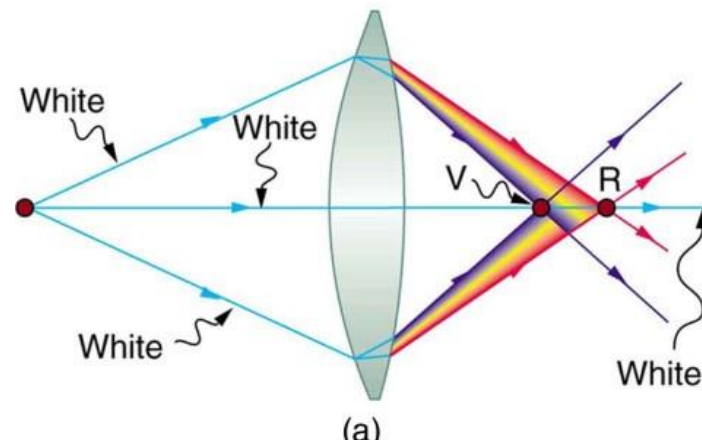
$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)}$$

$$\omega = \frac{c}{n(\omega)} k$$

$$k = \sqrt{k_{\parallel}^2 + 2k_{\perp}^2}$$



Prof. MG Capeluto



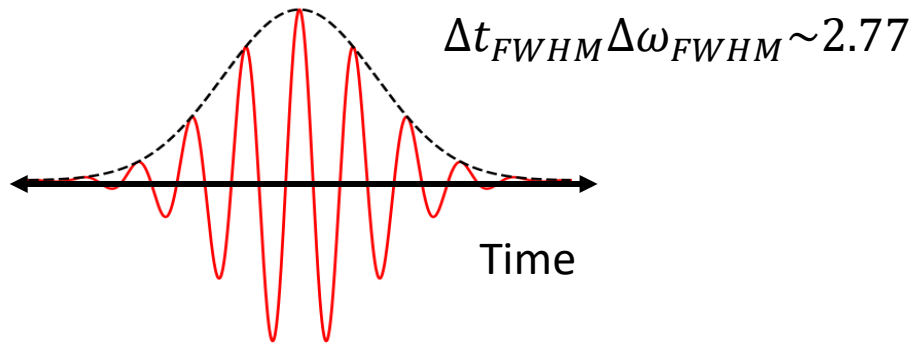
The speed of light in a medium depends on frequency

$$\frac{c}{n(\omega)}$$

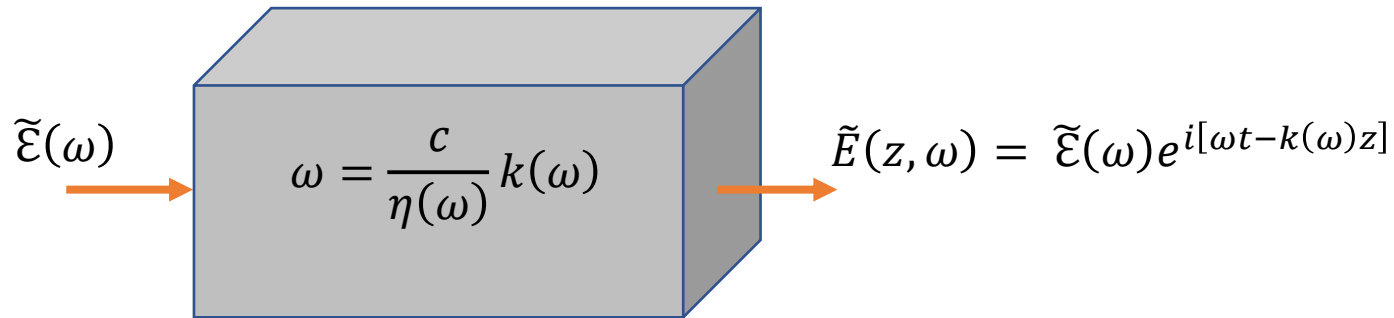
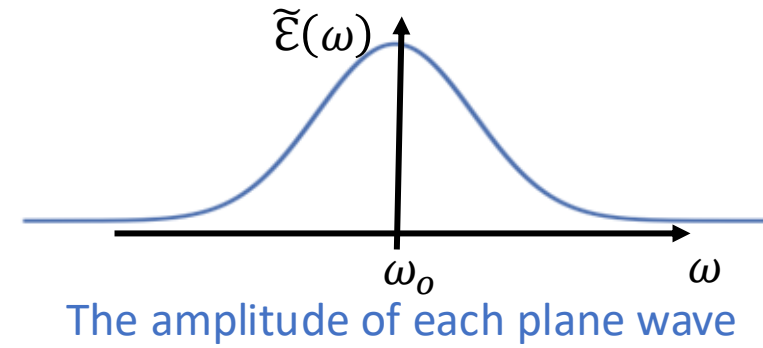
Propagation of pulses in a linear dispersive medium



$$E(0, t) = \mathcal{E}(t) = E_o e^{[-2 \ln(2) \frac{t^2}{\tau_o^2}]} e^{i\omega_o t}$$



$$\tilde{E}(0, \omega) = \tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{E_o \tau_o}{2\sqrt{\ln(2)}} e^{[-\frac{\tau_o^2}{8 \ln(2)} (\omega - \omega_o)^2]}$$



In a transparent medium, the spectrum does not change

$$|\tilde{E}(z, \omega)|^2 = |\tilde{E}(0, \omega)|^2$$

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega$$

Spectral phase $\Psi(z, \omega) = k(\omega)z$

Propagation of pulses in a linear dispersive medium



$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega$$

Spectral phase $\Psi(z, \omega) = k(\omega)z$

Let's assume ω_o (central frequency) is much greater than the bandwidth $\Delta\omega \ll \omega_o$

$$\Psi(z, \omega) \sim \Psi(z, \omega_o) + \left. \frac{\partial \Psi(z, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Psi(z, \omega)}{\partial^2 \omega} \right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Psi(z, \omega)}{\partial^3 \omega} \right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o)^3 + \dots$$

$$\Psi(z, \omega) = k(\omega)z \sim \Psi(z, \omega_o) + GD (\omega - \omega_o) + \frac{1}{2!} GDD (\omega - \omega_o)^2 + \frac{1}{3!} TOD (\omega - \omega_o)^3 + \dots$$

Group delay (GD)

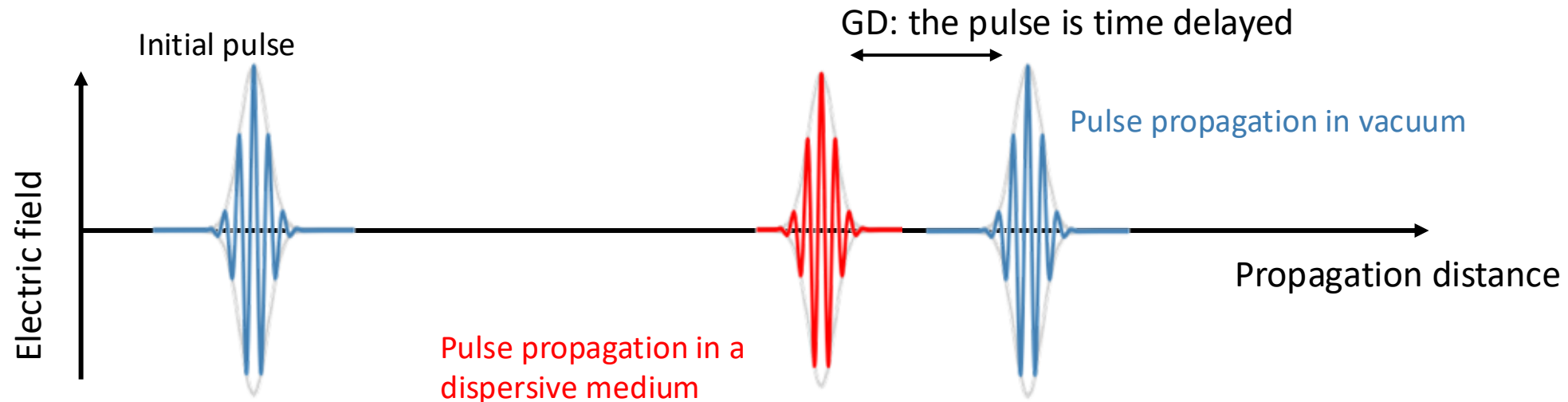


$$\Psi(z, \omega) = z k(\omega) \sim \textcolor{red}{z k_o} + \textcolor{blue}{GD} (\omega - \omega_o)$$

$$v_p = \frac{c}{\eta(\omega_o)} \quad \omega_o = v_p k_o \quad \text{phase velocity at } \omega_o$$

$$\Psi'_o = \left. \frac{\partial \Psi(z, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_o} = z \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_o} = z \frac{1}{v_g(\omega_o)} = GD$$

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega = \mathcal{E}(t - GD) e^{i(\omega_o t - k_o z)}$$

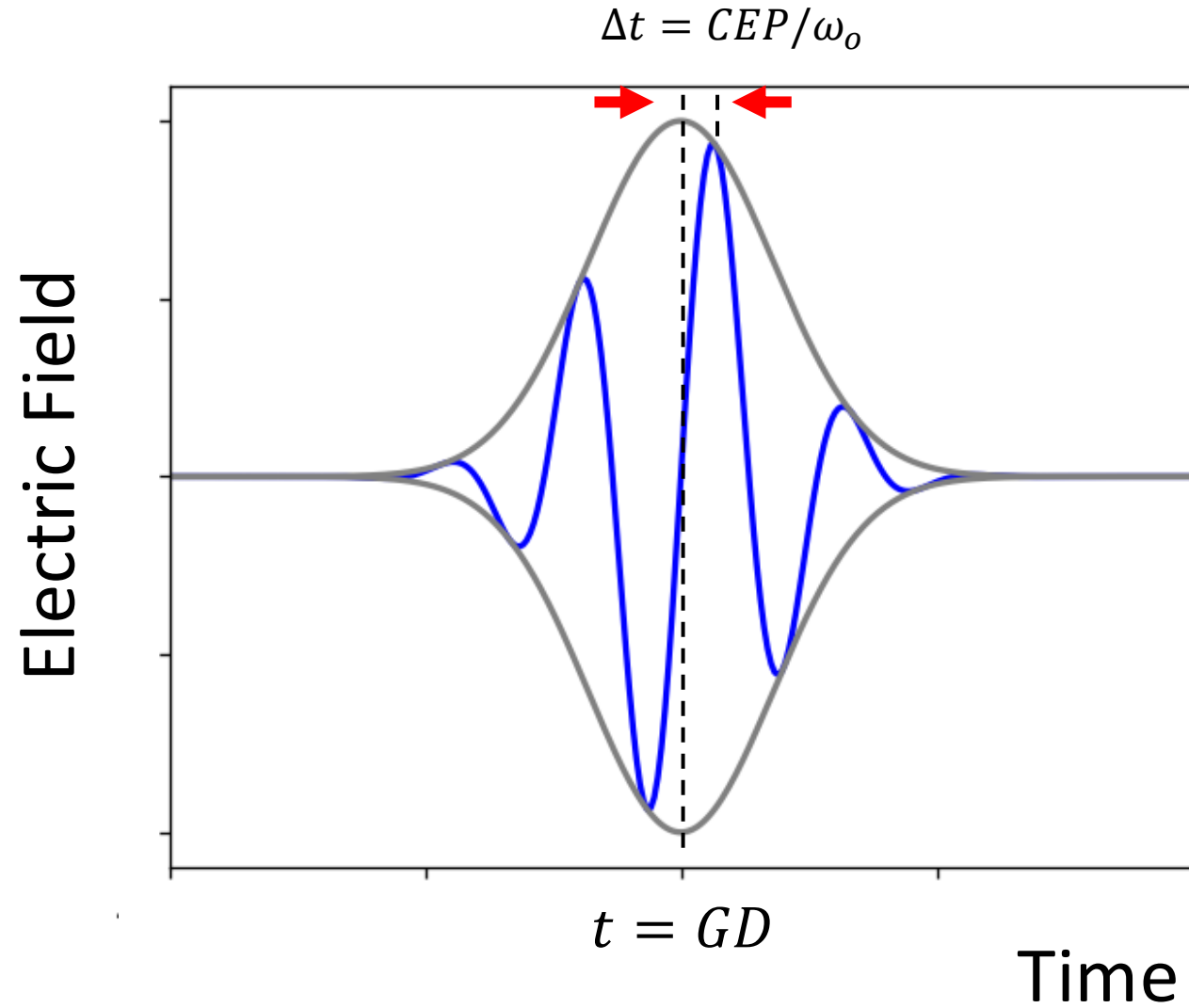


The carrier envelope phase (CEP)

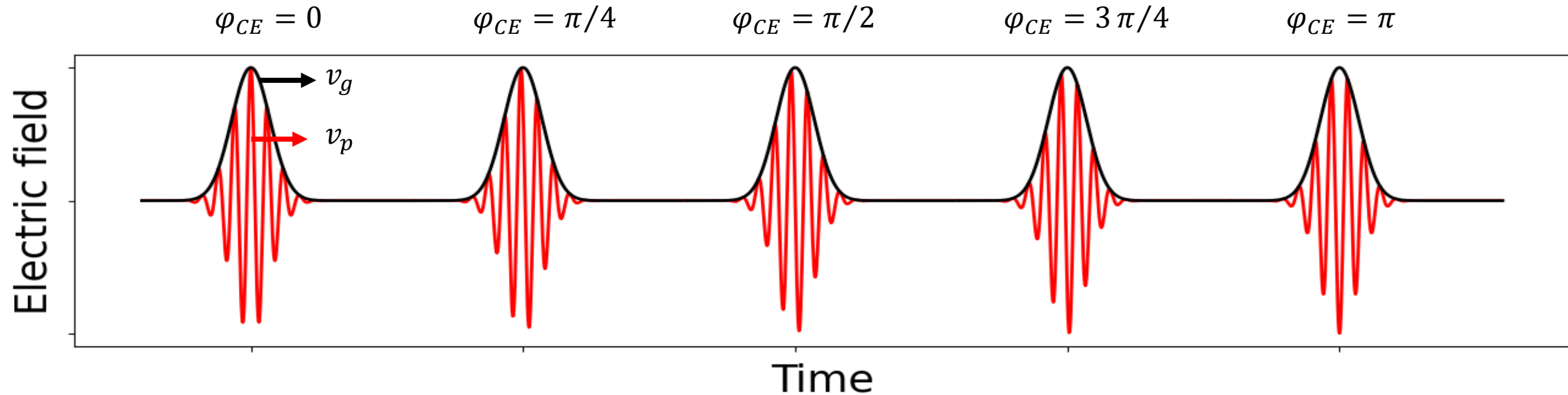


$$E(z, t) = \mathcal{E}(t - GD) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

$$CEP = \omega_0 GD - k_0 z$$



The carrier envelope phase (CEP)



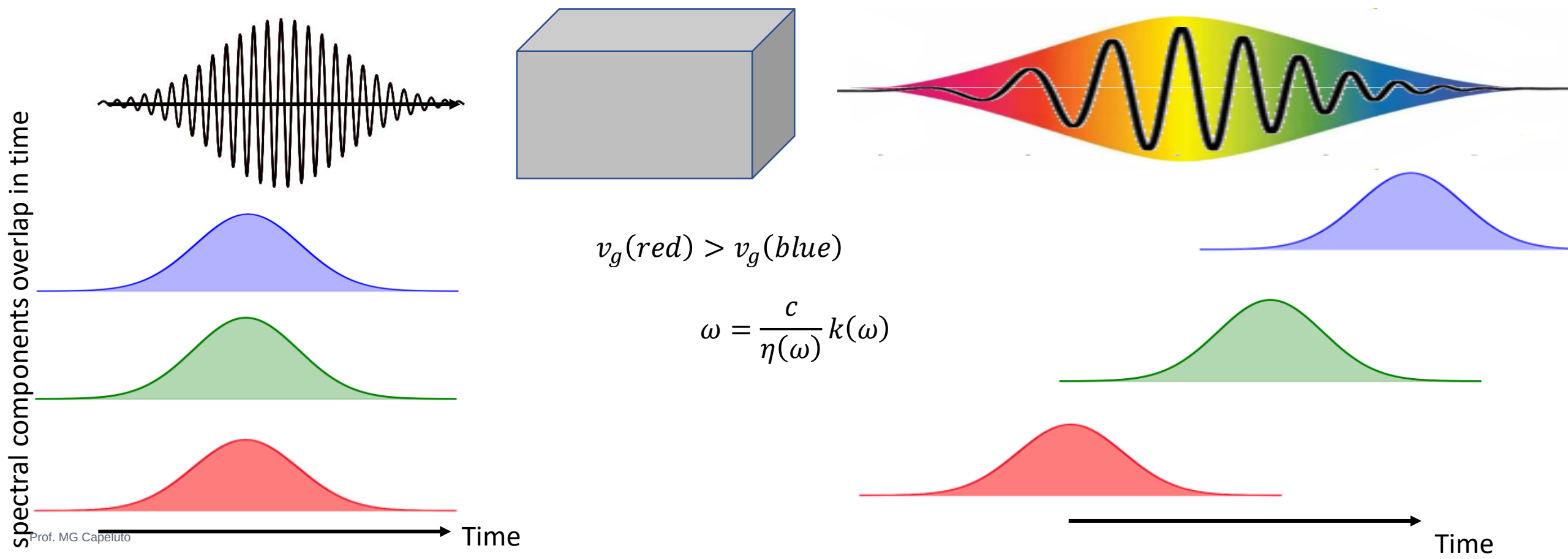
Since phase and group velocity are different, CEP can change during propagation

Group-delay dispersion (GDD)/ Group-velocity dispersion (GVD)

$$\Psi(z, \omega) = z k(\omega) \sim z k_o + GD (\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} GDD (\omega - \omega_o)^2$$

$$\Psi''_o = \left. \frac{\partial^2 \Psi(z, \omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_o} = z \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_o} = z \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \bigg|_{\omega_o} = GDD = GVD \times z$$

GVD: change of group velocity with frequency
GDD: cumulative dispersion



Group delay dispersion (GDD)/ Group velocity dispersion (GVD)

$$E(z, t) = E^* \exp \left[-\frac{2 \ln(2)}{\tau^2} (t - GD)^2 \right] e^{i\Phi(z, t)}$$

Quadratic phase in time

$$\Phi(z, t) = \omega_o t - k_o z + \frac{8 \ln^2(2) GDD}{\tau_o^2} \frac{(t - GD)^2}{\tau^2} \dots$$

$$\dots - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4 \ln(2) GDD}{\tau_o^2} \right)$$

Peak amplitude

$$E^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\tau}} E_o$$

Pulse width ($\Delta\tau_{FWHM}$ for intensity)

$$\tau = \tau_o \sqrt{1 + \left(\frac{GDD}{\tau_o^2} 4 \ln(2) \right)^2}$$

$$\tau = \tau_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2}$$

$$z > L_D = \frac{\tau_o^2}{GVD 4 \ln(2)} \text{ dispersion becomes important}$$

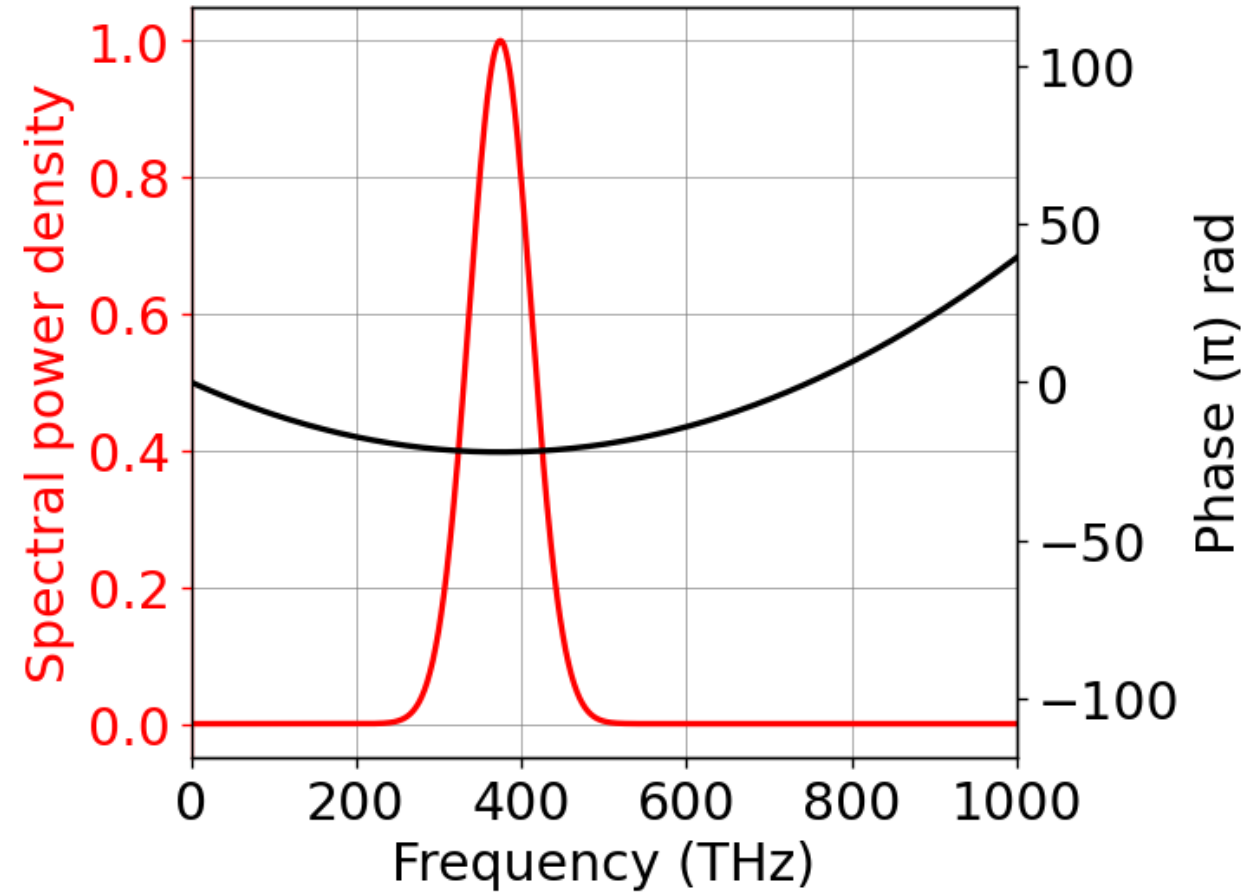
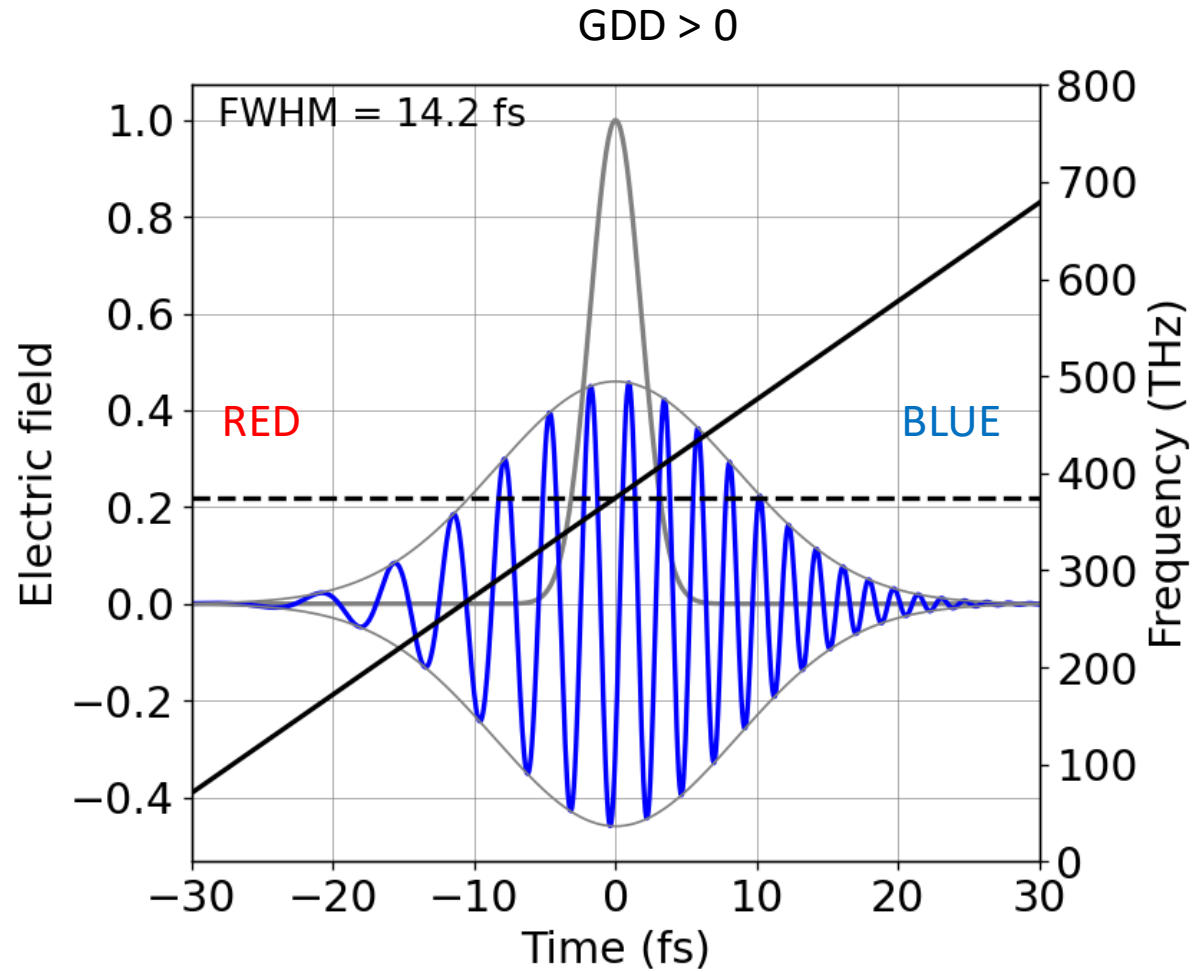
Instant frequency

$$\omega(t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \omega_o + \frac{16 \ln^2(2) GDD}{\tau_o^2} \frac{(t - GD)}{\tau^2}$$

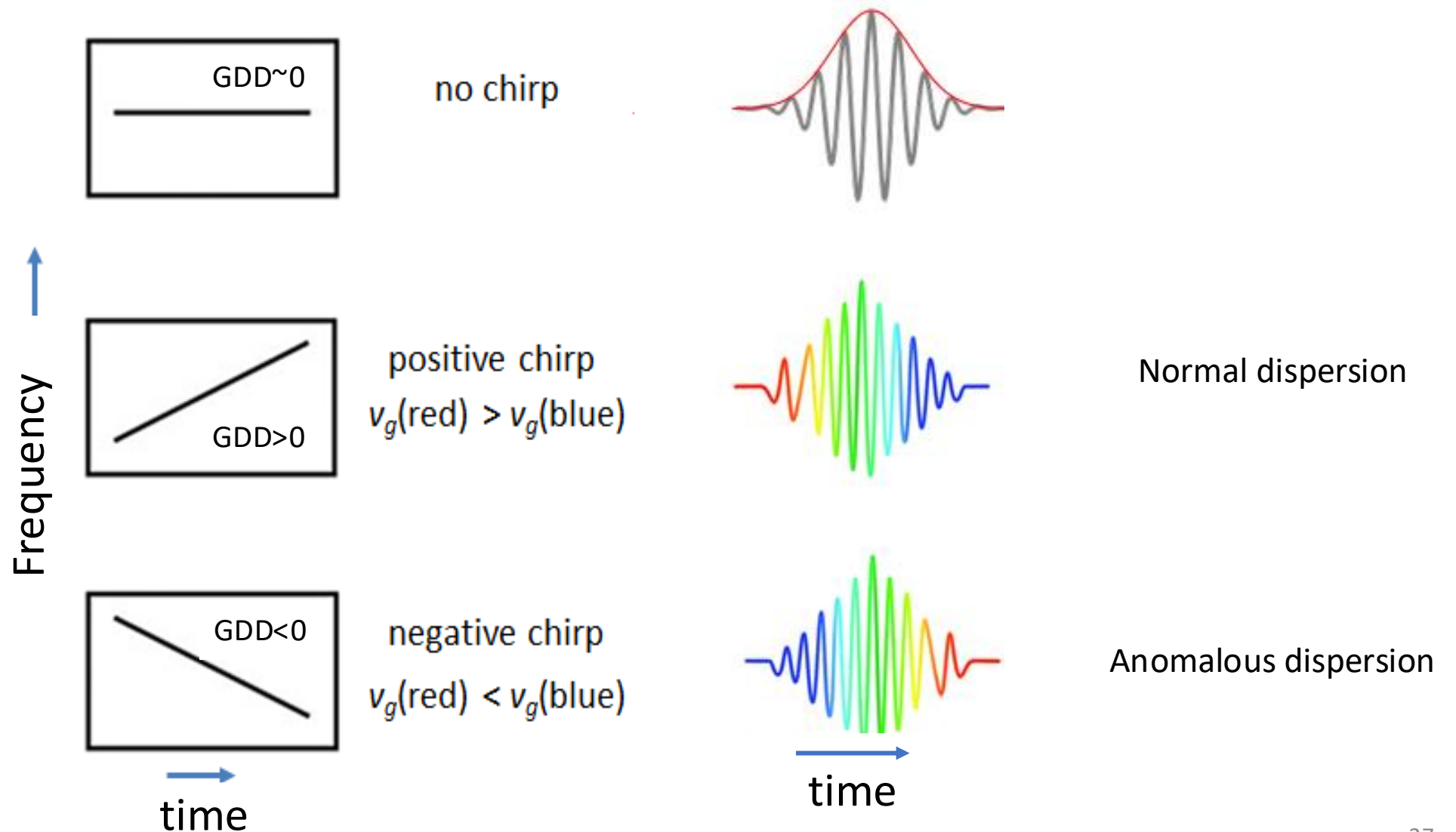
The frequency varies linearly across the pulse (chirp)

The pulse spreads as it propagates

Group-delay dispersion (GDD)



Group-delay dispersion (GDD)

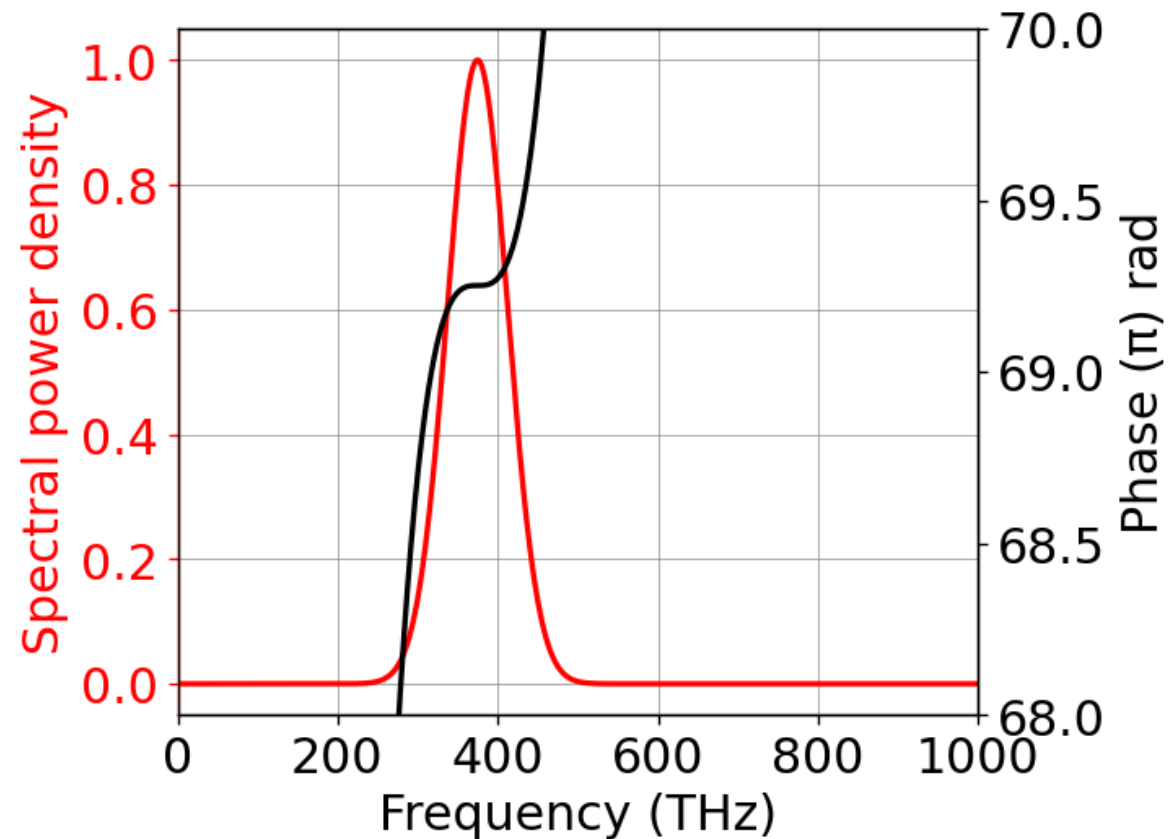
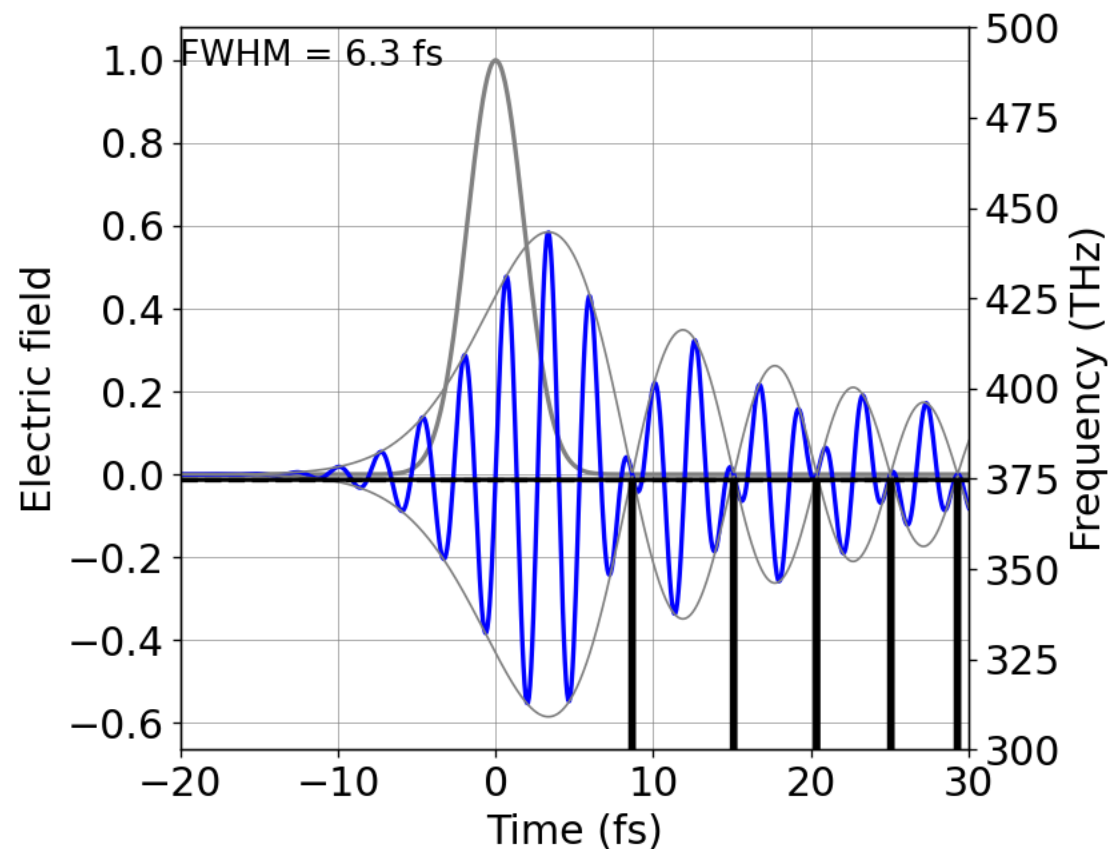


Third-order dispersion (TOD)

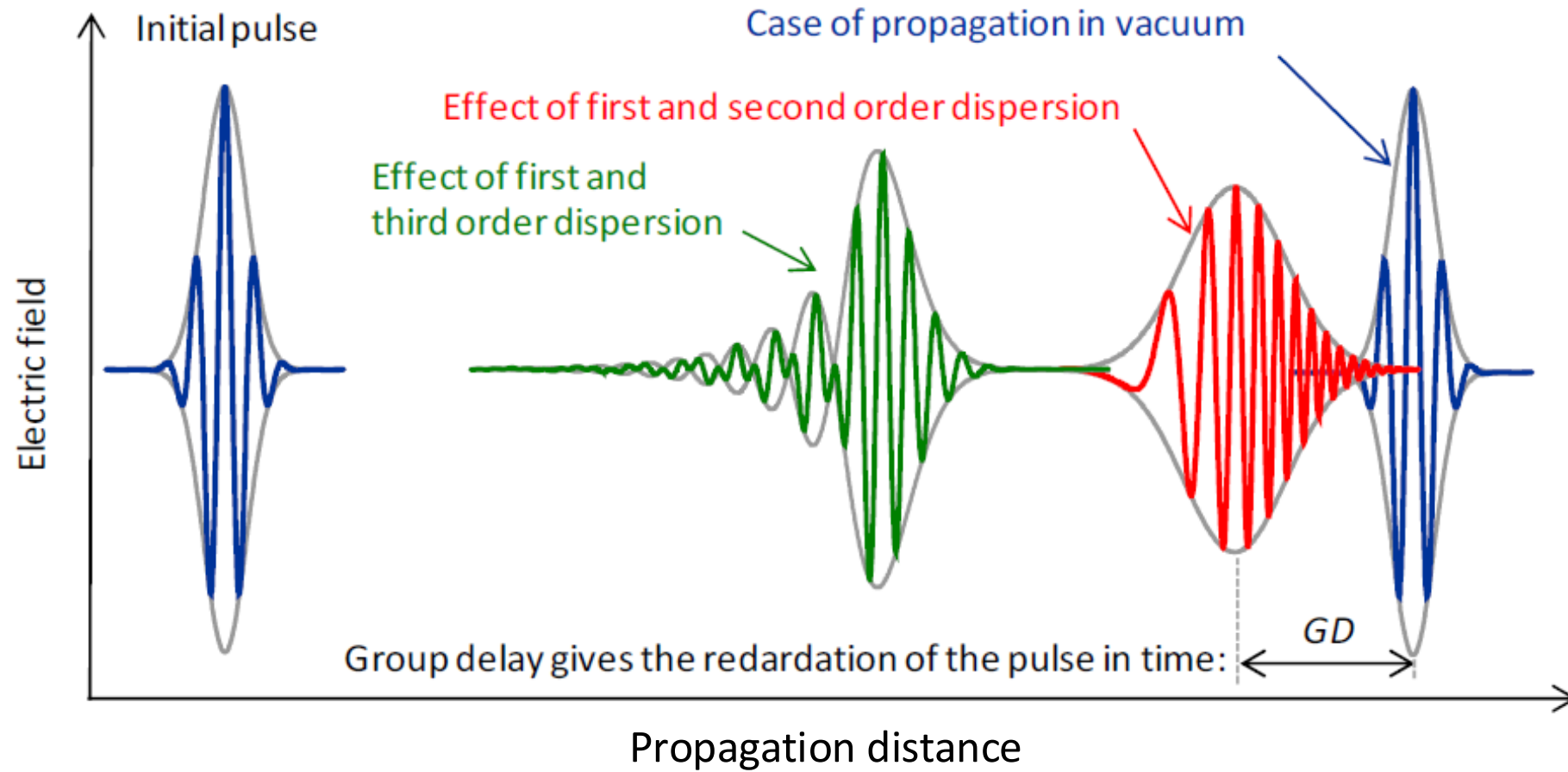


$$\Psi(z, \omega) = z k(\omega) \sim z k_0 + GD (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} GDD (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{3!} TOD (\omega - \omega_0)^3$$

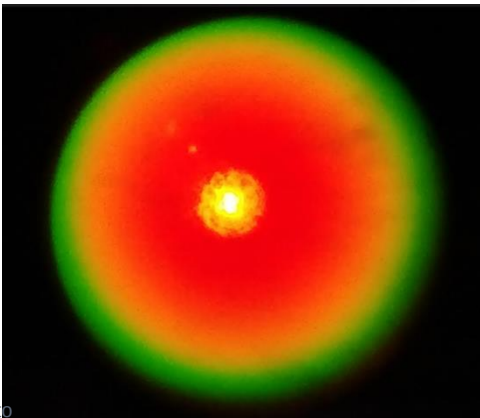
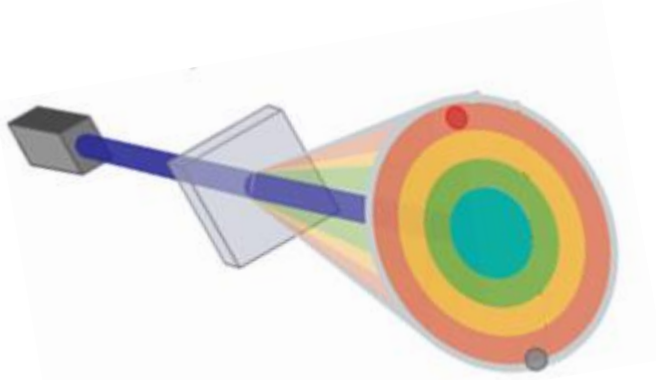
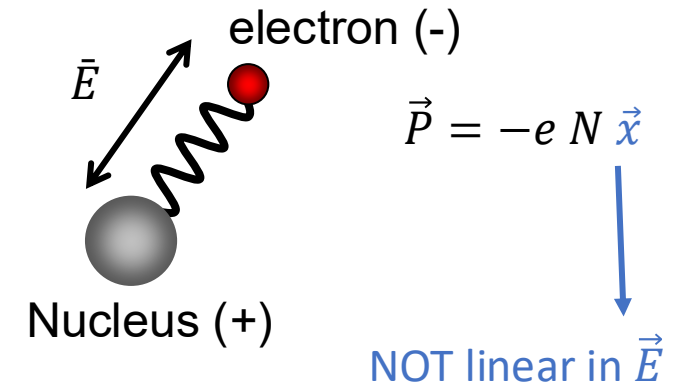
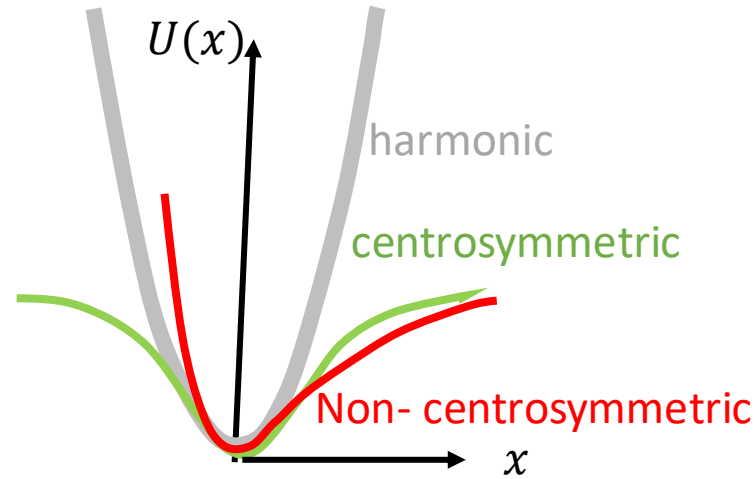
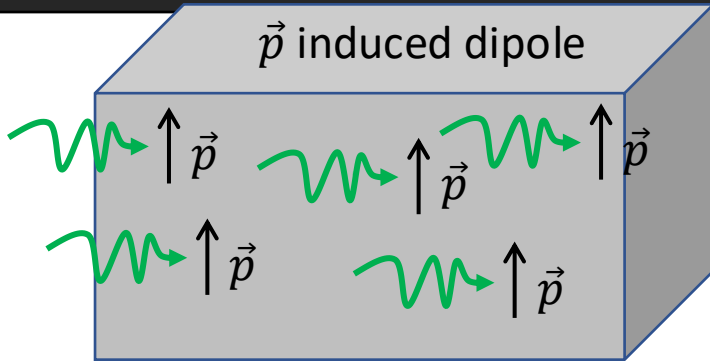
$TOD > 0$



F. Furch, MBI



Propagation of pulses in a nonlinear optical medium



$$P_j = P_j^L + P_j^{NL} = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n(\omega)^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}$$

$\vec{P}^{NL}$ is a source for the electric field

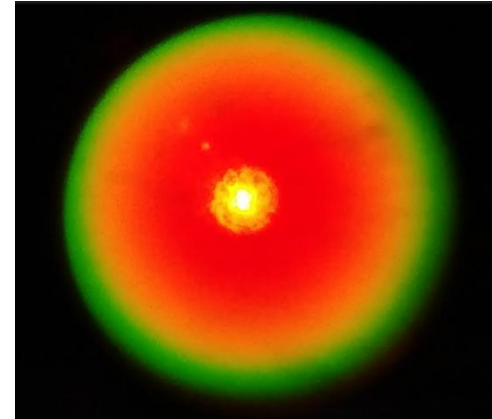
Nonlinear optical effects (some)



$$P_j = P_j^L + P_j^{NL} = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots$$



- Second harmonic generation (SHG)
- Sum/difference frequency generation
- Optical parametric amplification/oscillation/generation
- Optical rectification
- Two photon absorption
- Third harmonic generation
- Self phase modulation
- Self focusing
- Four wave mixing
- Stimulated Raman/Brillion scattering



Second-order nonlinearity $\chi^{(2)}$



$$\vec{E}(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c.$$

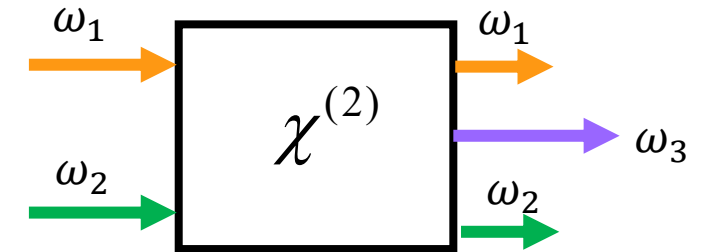
$$\vec{P}^{(2)}(t) = \epsilon_o \chi^{(2)} \vec{E}(t)^2 = \epsilon_o \chi^{(2)} (E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c.)^2$$

$$\vec{P}^{(2)}(t) = \epsilon_o \chi^2 [E_1^2 e^{-i2\omega_1 t} + E_2^2 e^{-i2\omega_2 t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.] + 2\epsilon_o \chi^2 [E_1 E_1^* + E_2 E_2^*]$$

Second Harmonic
Generation

Sum and difference
Frequency Generation

Optical
rectification



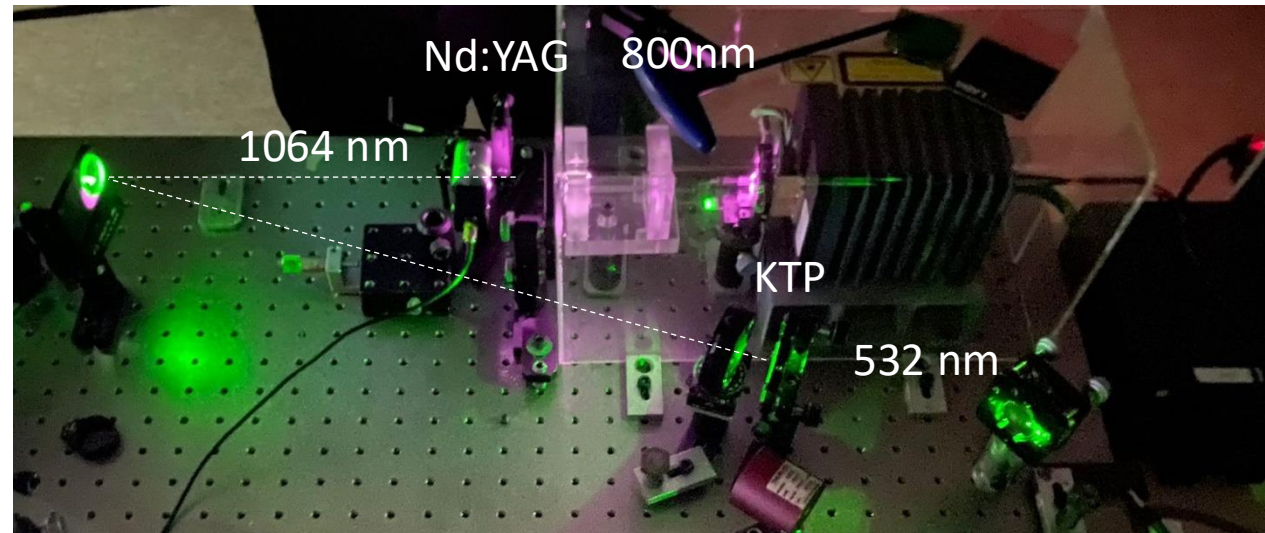
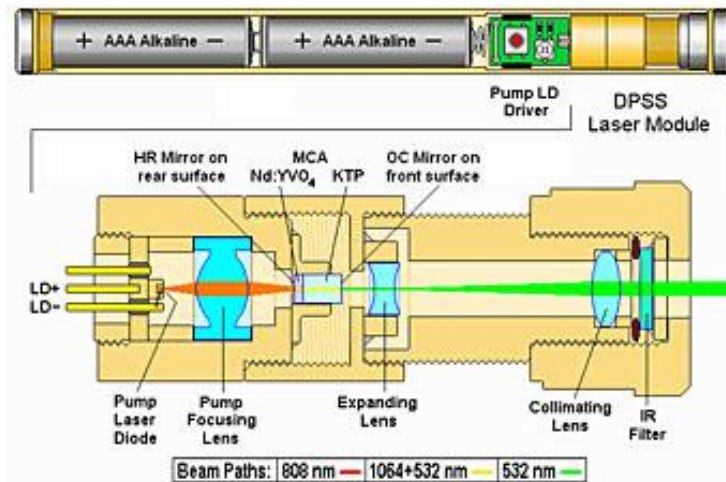
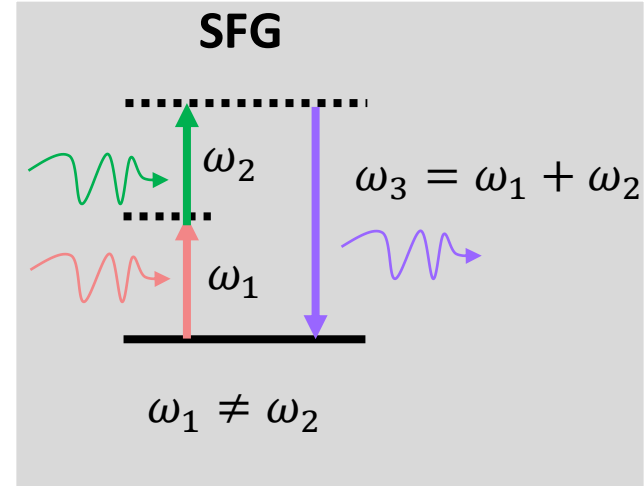
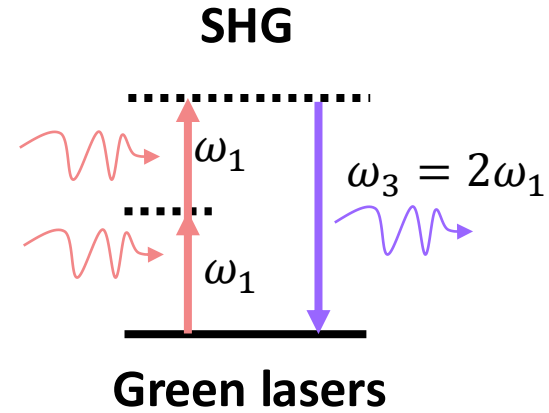
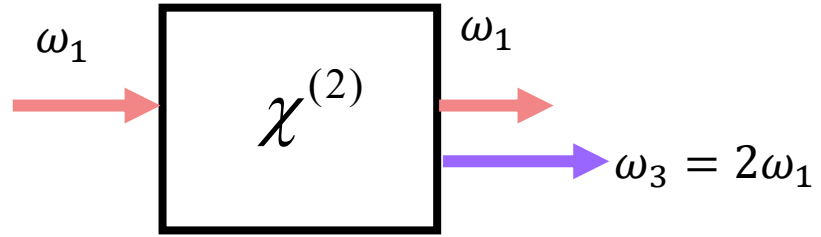
El proceso es eficiente si el momento se conserva (phase matching)

$$\Delta k = 0$$

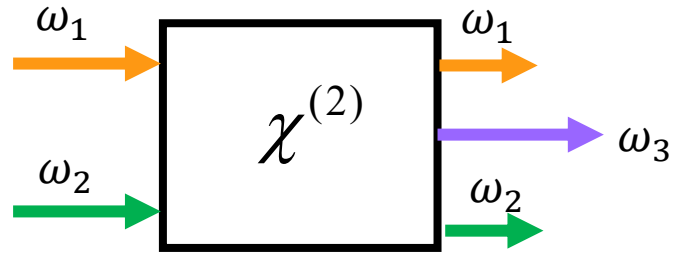
por ejemplo, para suma de frecuencias:

$$k_3 = k_1 + k_2$$

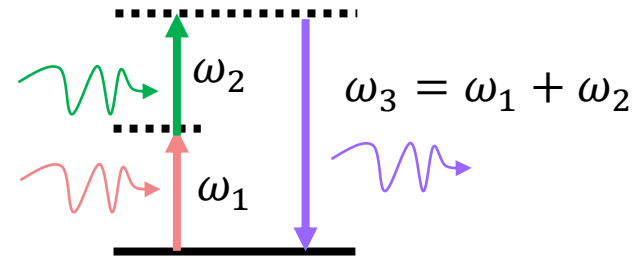
Second-order nonlinearity $\chi^{(2)}$



Second-order nonlinearity $\chi^{(2)}$



SFG



Phase matching

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 \\ k_1 + k_2 &= k_3\end{aligned}$$

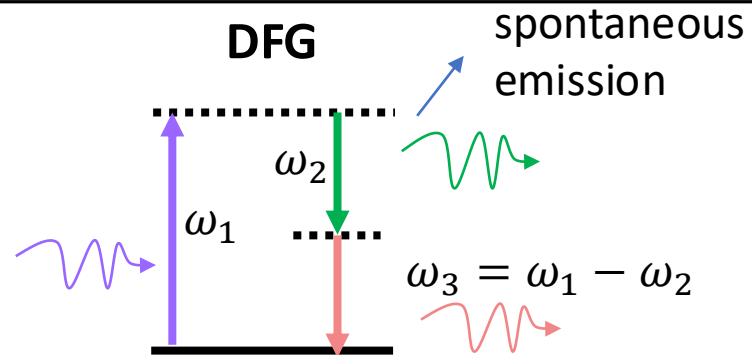
Tunable radiation in the UV

Tunable visible+ visible $\rightarrow$ tunable UV

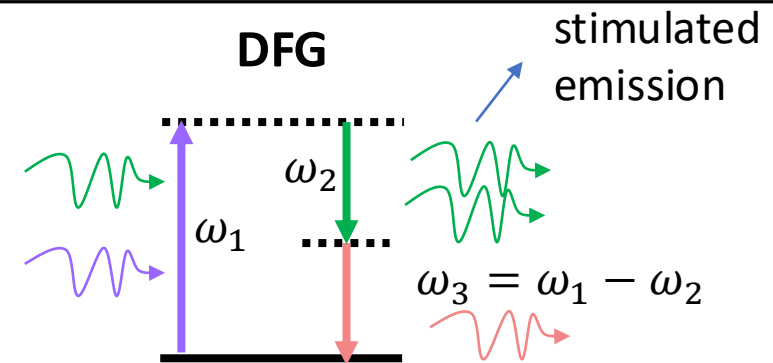
IR upconversion

IR+ Visible $\rightarrow$ visible

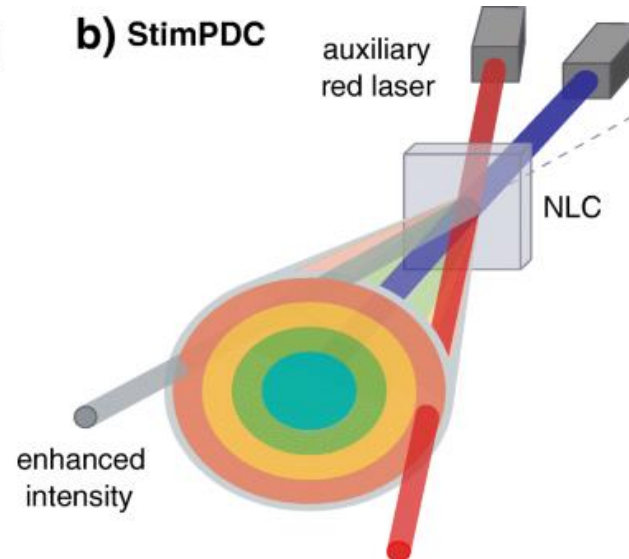
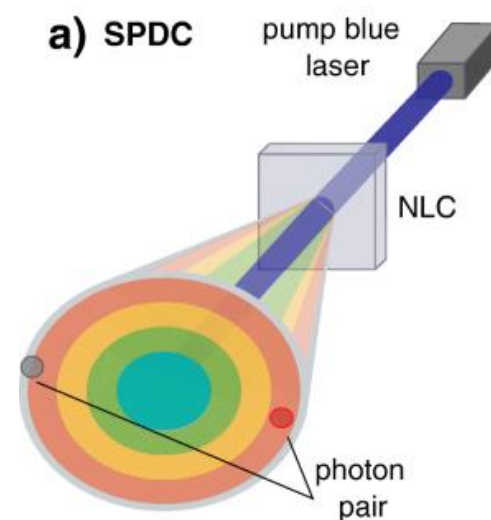
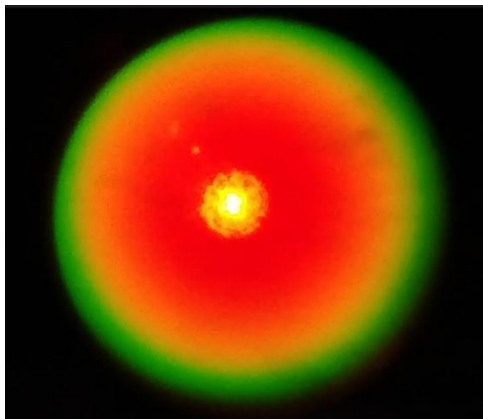
Second-order nonlinearity $\chi^{(2)}$



Parametric fluorescence or Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC)



Parametric amplification
(light at ω_1 and ω_2 is amplified)

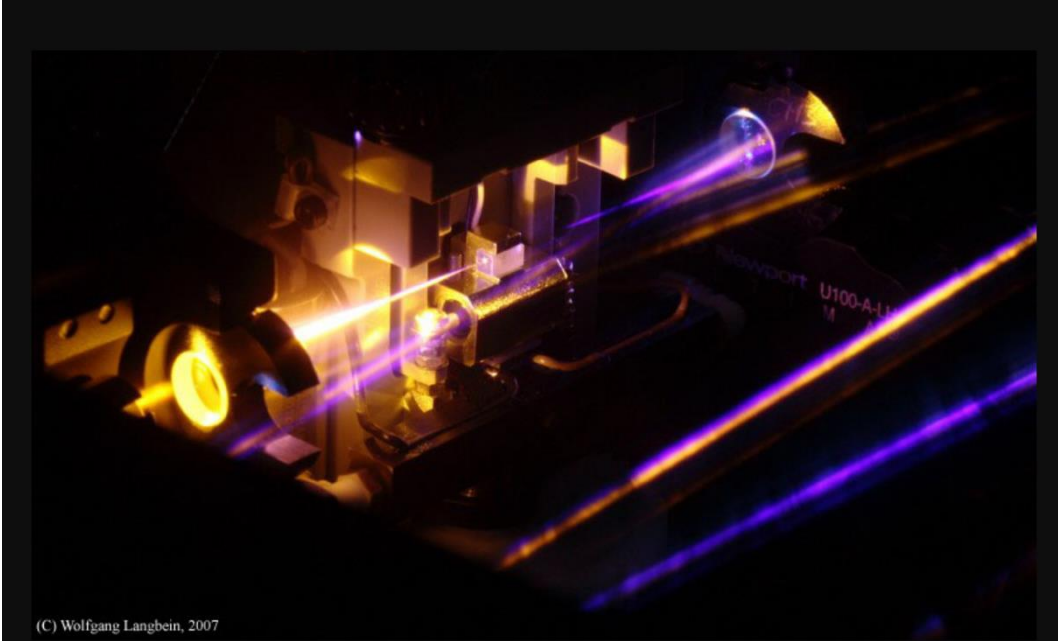


Phase matching

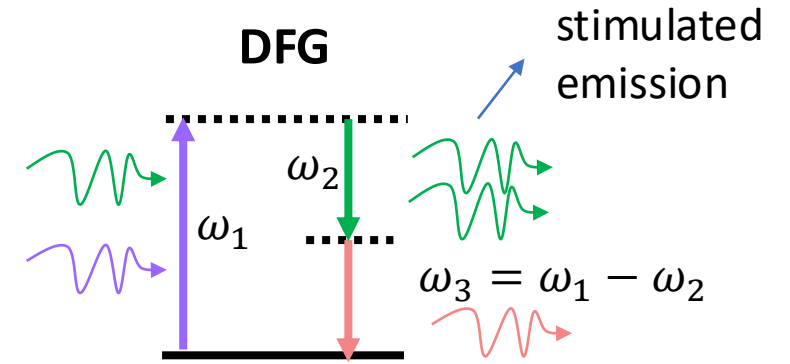
$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$$

$$k_1 = k_2 + k_3$$

Second-order nonlinearity $\chi^{(2)}$

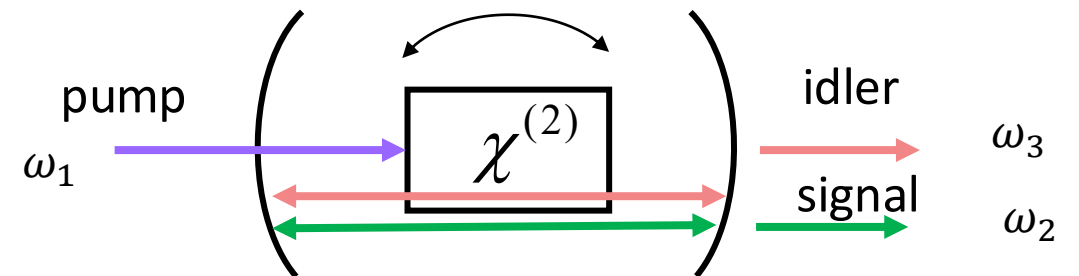


(C) Wolfgang Langbein, 2007



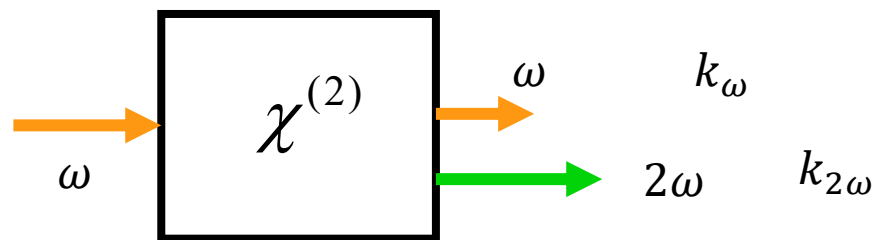
Parametric amplification
(light at ω_1 and ω_2 is amplified)

Optical parametric oscillation

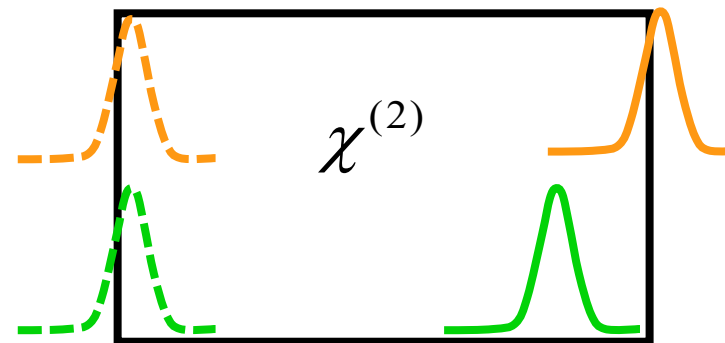


The output frequencies can be tuned by tilting the crystal and achieving phase matching

Propagation of light in nonlinear crystals



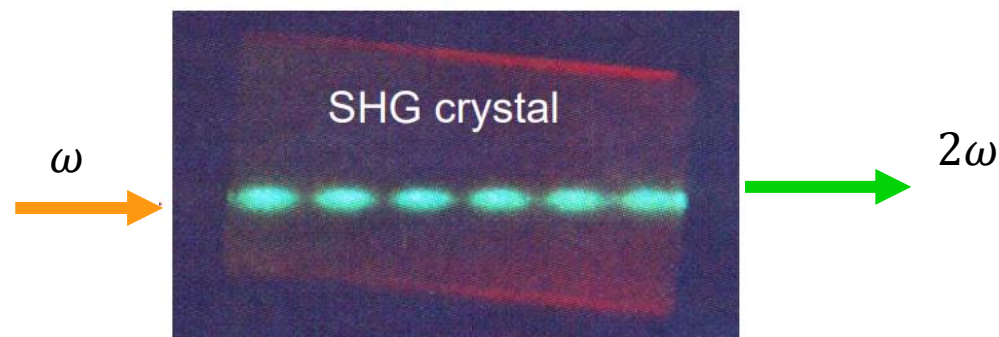
Group velocity mismatch



$$GVM = \frac{1}{v_{g(\omega)}} - \frac{1}{v_{g(2\omega)}}$$

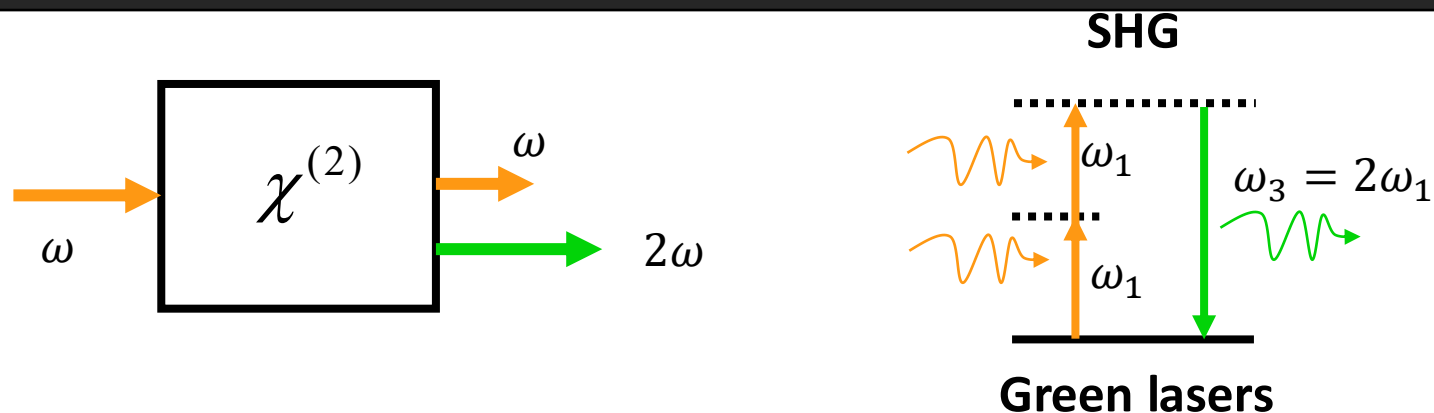
$$\vec{P}^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} A_\omega(z)^2 e^{i(2\omega t - 2k_\omega z)}$$

SH interference



- NLO media are dispersive, the fundamental and harmonic signals propagate at different speeds
- The harmonic signals generated at different points interfere with each other

Phase matching: conservation of momentum



Energy conservation

$$\hbar \omega_3 = \hbar(2\omega) = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \longrightarrow \hbar(2\omega) = \hbar\omega + \hbar\omega$$

Momentum conservation

$$\hbar \vec{k}_3 = \hbar \vec{k}_1 + \hbar \vec{k}_2 \longrightarrow k(2\omega) = k(\omega) + k(\omega) = 2k(\omega)$$

$$\vec{k} = k(\omega) \hat{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \hat{k}$$

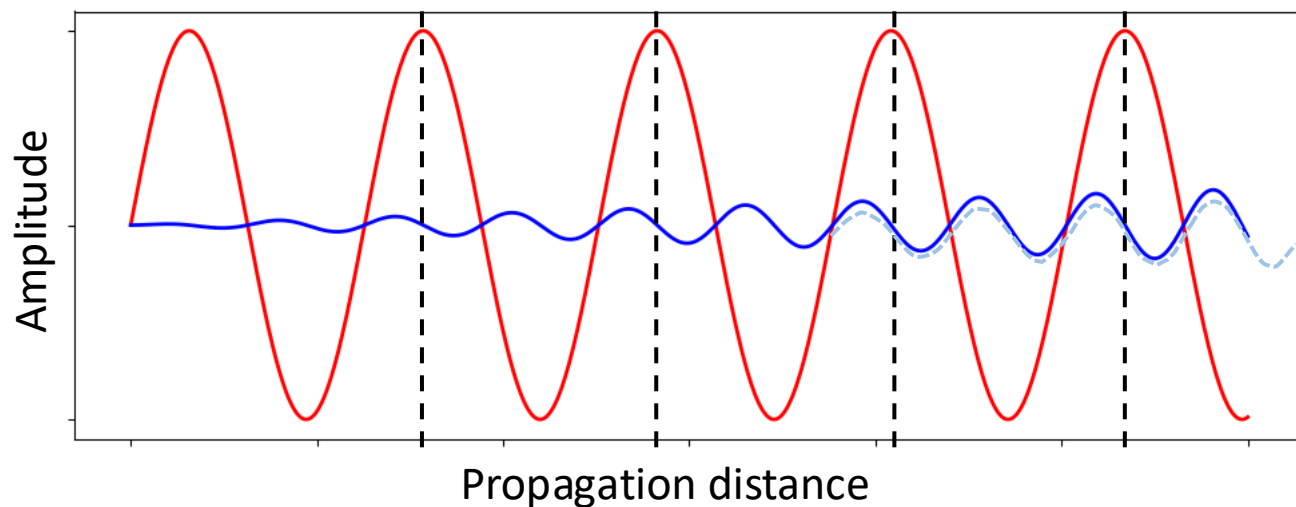
$$\Delta k = k(2\omega) - 2k(\omega) = \frac{2\omega}{c} (n(2\omega) - n(\omega))$$

Phase mismatch

Phase matching: conservation of momentum



Phase matched

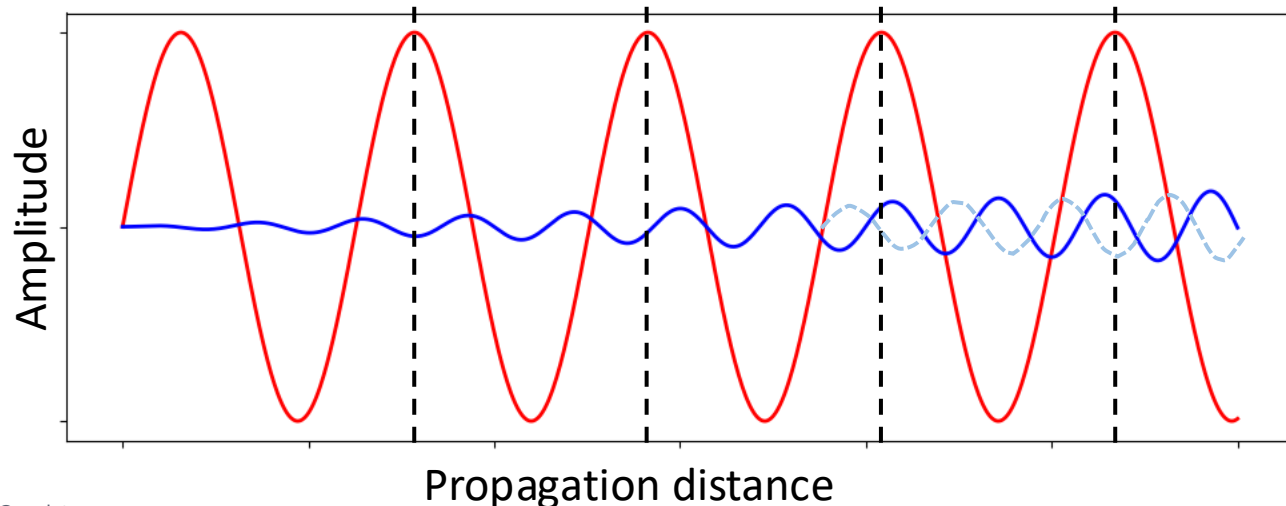


$$\Delta k = 0 \rightarrow n(\omega) = n(2\omega)$$

Incident and SH waves have the same phase velocities

$$\lambda_{\omega} = 2 \lambda_{2\omega}$$

Non phase matched



$$\Delta k \neq 0 \rightarrow \lambda_{\omega} \neq 2 \lambda_{2\omega}$$

diferencia de fase acumulada: $\Delta\phi(z) = \Delta k z$

$$L_{coh} \sim \frac{\pi}{\Delta k}$$

Si $\Delta k L \ll 1$, las ondas no llegan a desfasarse demasiado antes de salir del material, y todavía puede haber generación eficiente

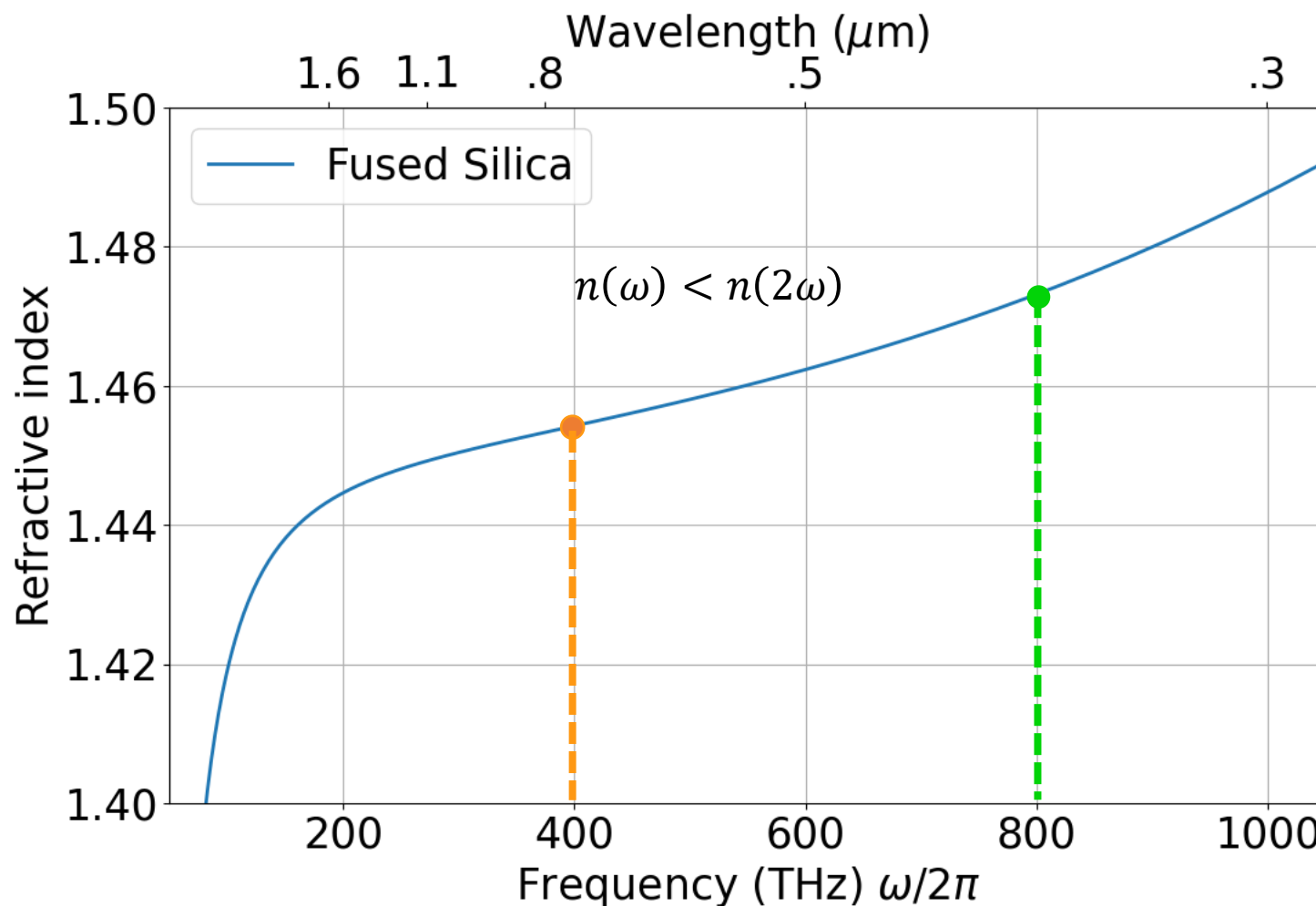
Phase matching: conservation of momentum



Co-propagating fields

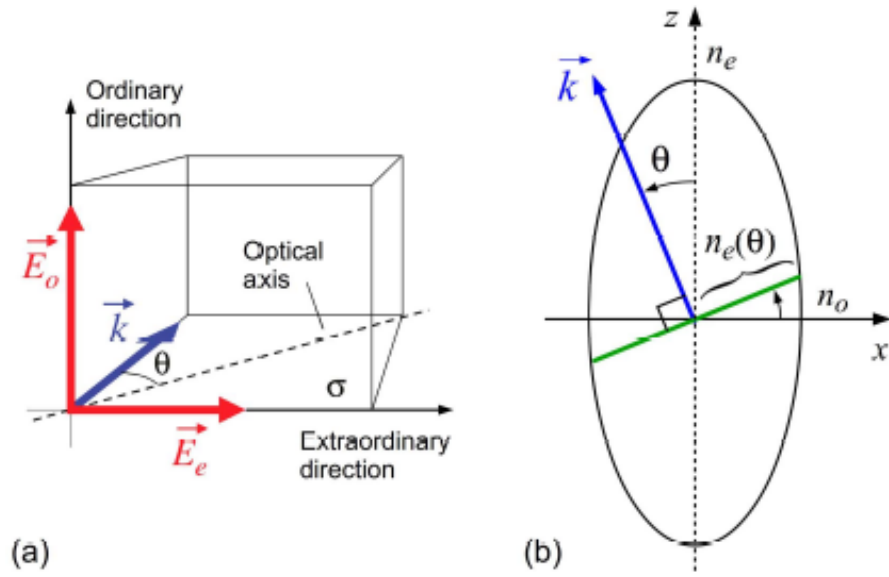
$$\Delta k = 2k(\omega) - k(2\omega) = \frac{2\omega}{c}(n(\omega) - n(2\omega))$$

Materials with normal dispersion
($n(\omega)$ increases with ω)

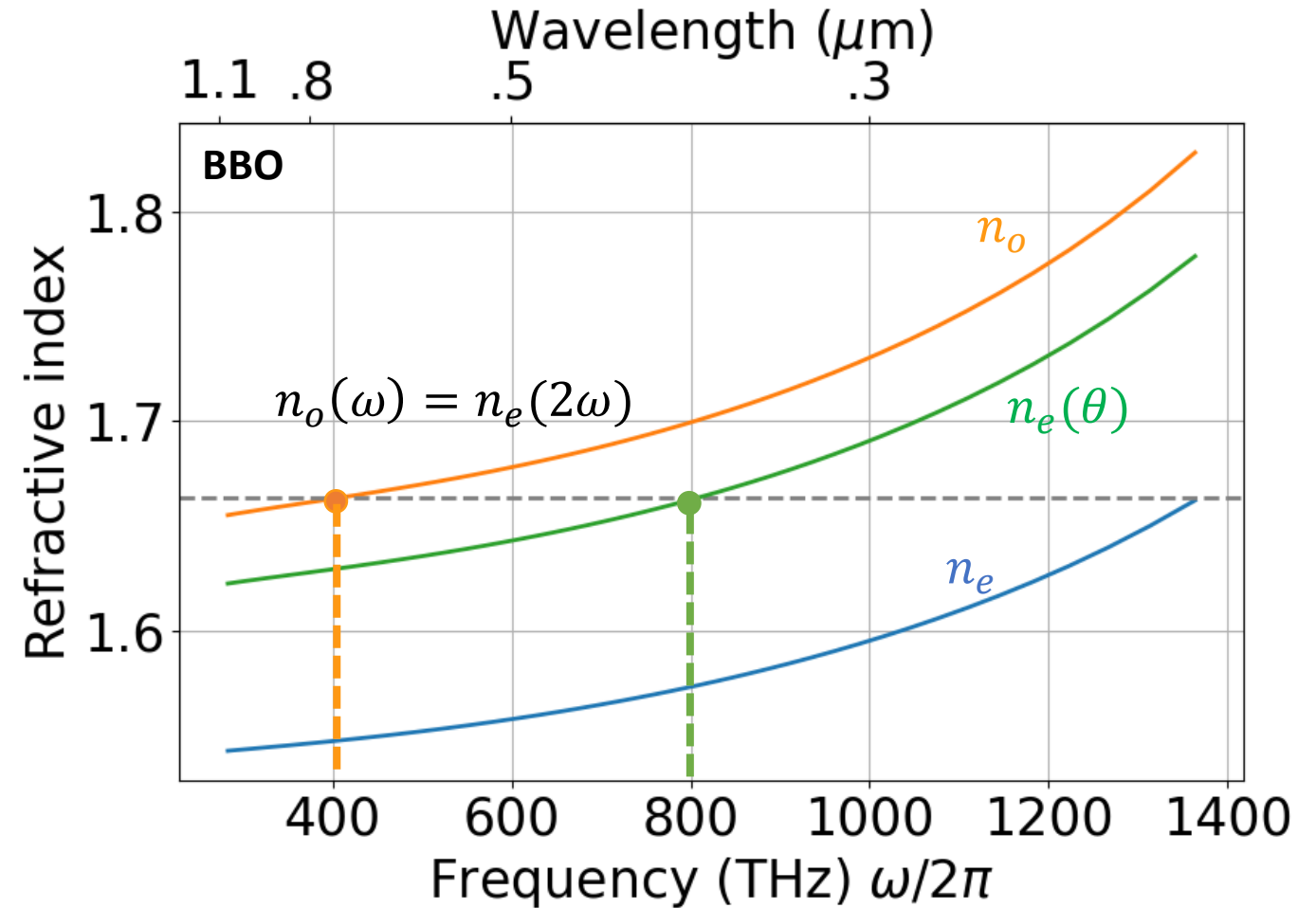


Phase matching: conservation of momentum

Uniaxial crystals



$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}$$



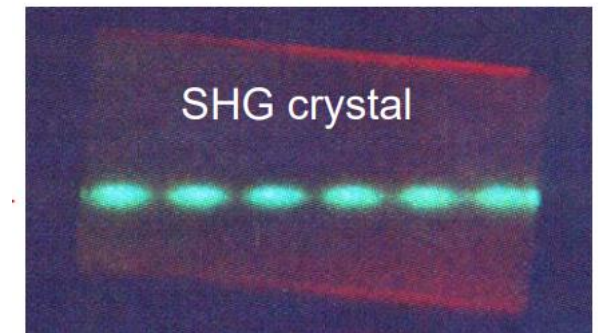
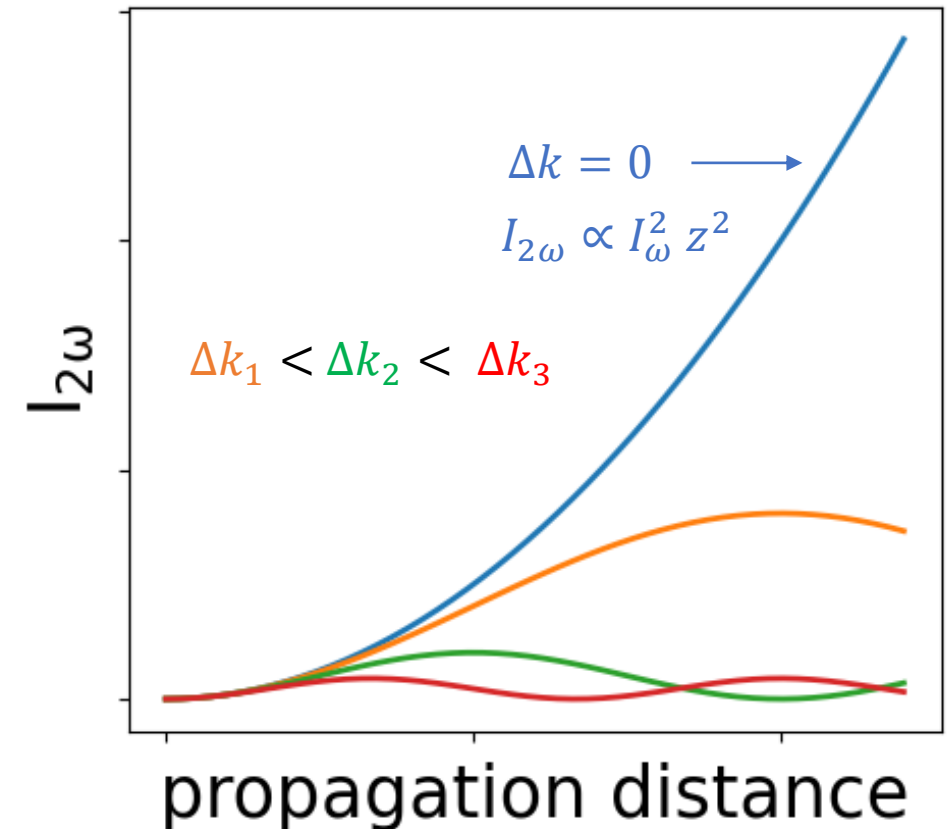
Phase matching in the undepleted approximation



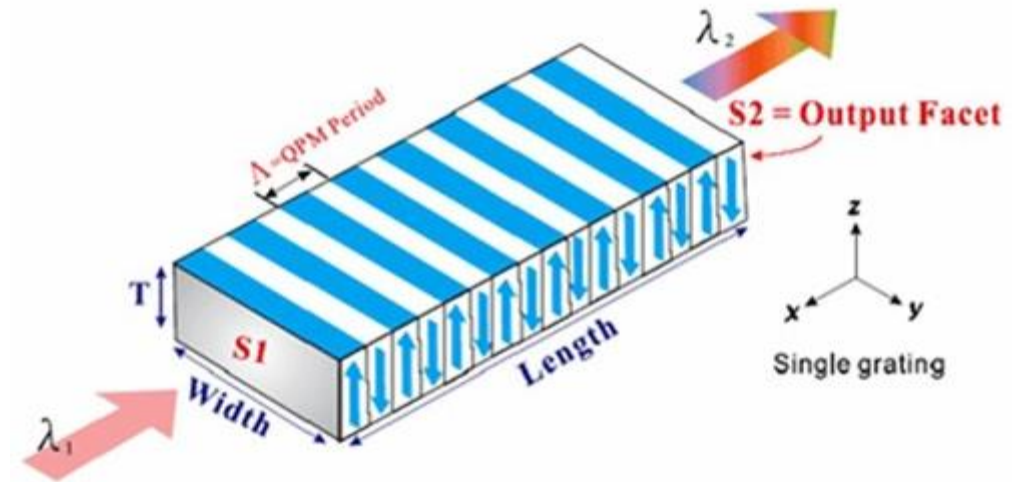
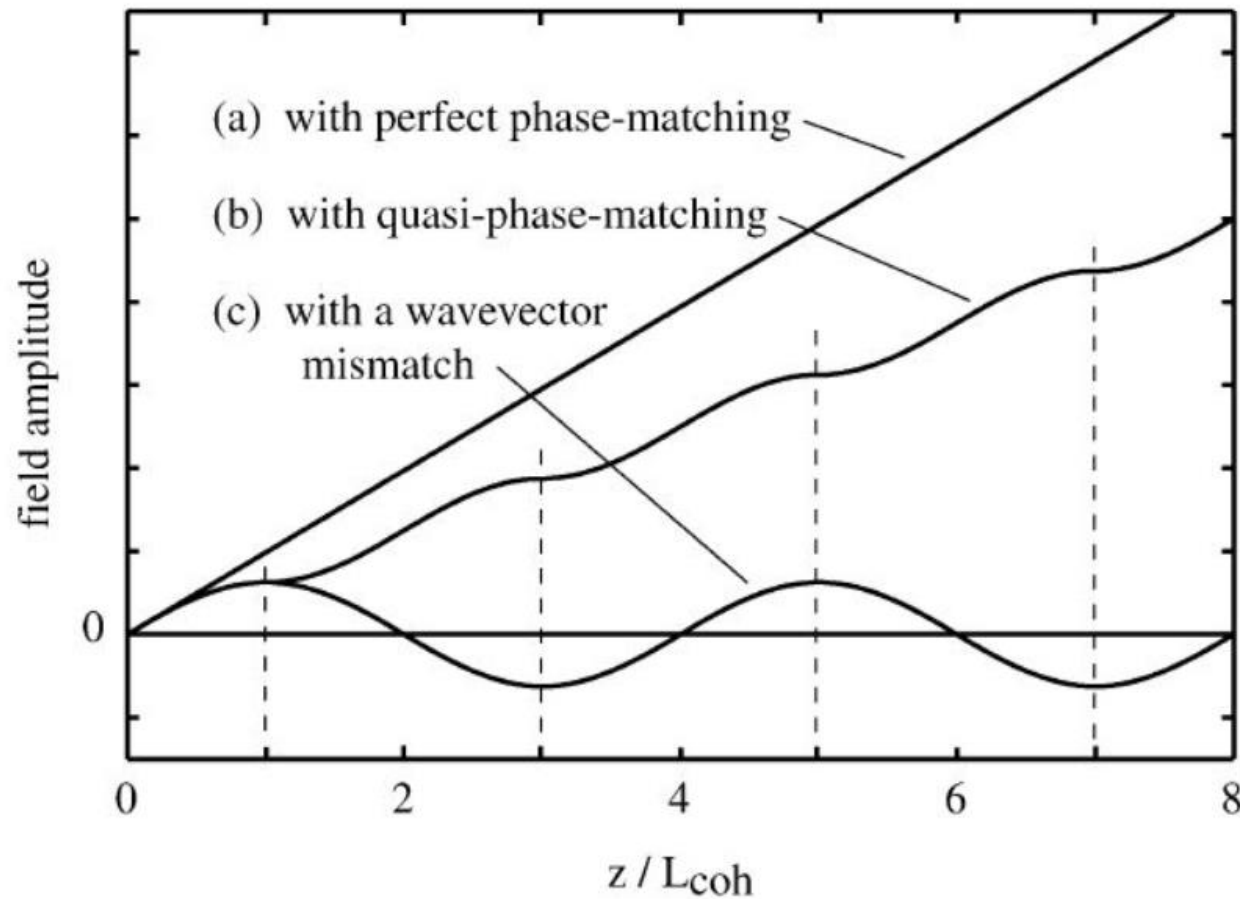
- Slowly varying amplitude approximation (SVAA) $\left| \frac{\partial^2 A_{2\omega}}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_{2\omega} \frac{\partial A_{2\omega}}{\partial z} \right|$
- The pump beam does not deplete. $A_{\omega}(z) \approx A_{\omega}(0)$
- The amplitude at $z=0$ is zero, $A_{2\omega}(0)$

$$I_{2\omega} \propto I_{\omega}^2 z^2 \left(\frac{\sin(\Delta k z / 2)}{\Delta k z / 2} \right)^2$$

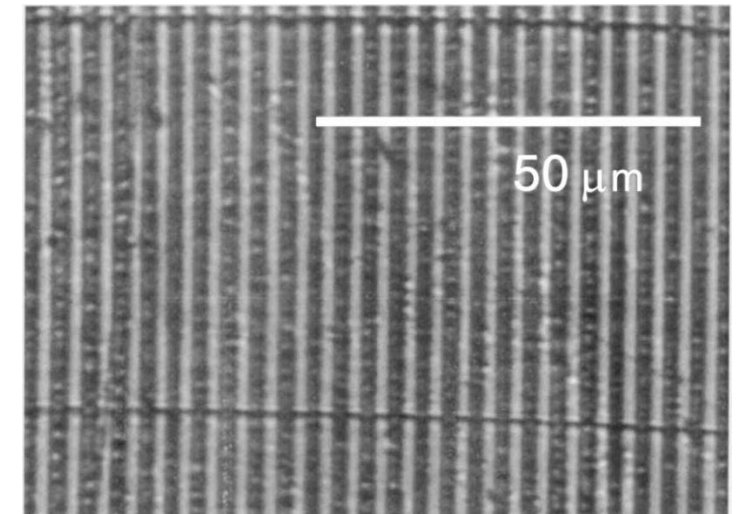
- $\Delta k \neq 0 \Rightarrow$ oscillatory conversion due to phase mismatch
- $\Delta k z / 2 \ll 1$, $I_{2\omega}$ grows quadratically with distance and with I_{ω}
- If nonlinear medium is too thick for a given Δk , the conversion efficient may decrease due to interference effects



Phase matching: periodically poled crystals



Periodically poled Lithium Niobate

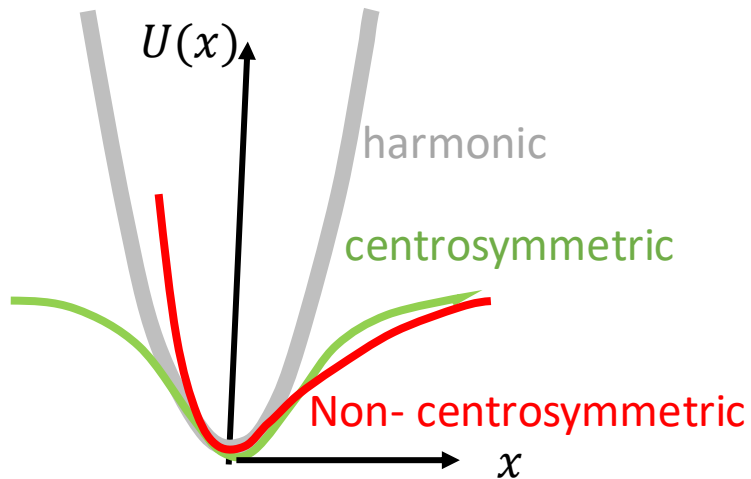


Nonlinear optical effects $\rightarrow \chi^{(3)}$



$$P_j = P_j^L + P_j^{NL} = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots$$

- Two photon absorption
- Third harmonic generation
- Self phase modulation
- Self focusing
- Four wave mixing
- Stimulated Raman/Brillion scattering



Materials with inversion symmetry (many crystalline materials, any amorphous material (glasses))

$$\text{If } \vec{E}(t) \rightarrow -\vec{E}(t) \Rightarrow \vec{P}^{(2)}(t) \rightarrow -\vec{P}^{(2)}(t)$$

$$\vec{P}^{(2)}(t) = \epsilon_o \chi^2 \vec{E}(t)^2 \rightarrow -\vec{P}^{(2)}(t) = \epsilon_o \chi^2 (-\vec{E}(t))^2 = \vec{P}^{(2)}(t)$$

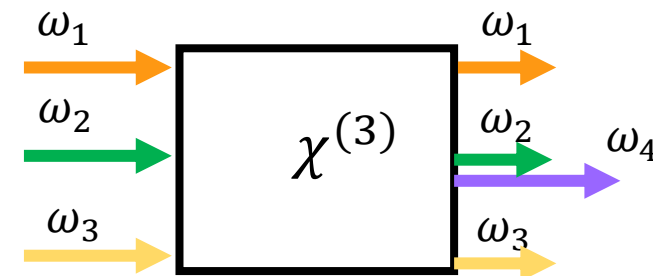
$\vec{P}^{(2)}(t) = -\vec{P}^{(2)}(t)$ only if $\chi_{ijk}^{(2)} = 0$ and then the largest non-linear effect is $\chi_{ijkl}^{(3)}$

Third-order nonlinearities: $\chi^{(3)}$

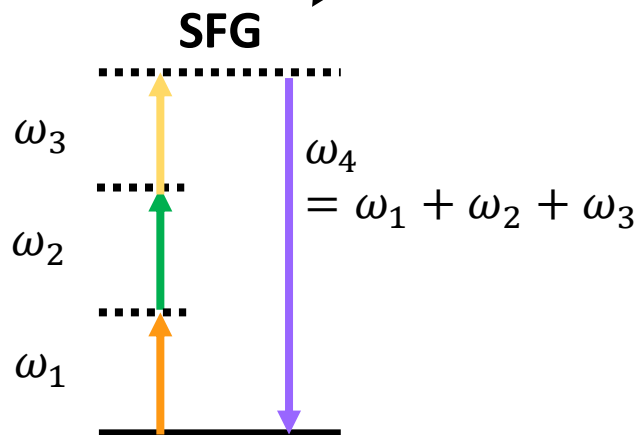


$$\vec{E}(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_3 e^{-i\omega_3 t} + c.c.$$

$$\vec{P}^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(t)^3 \rightarrow 22 \text{ components that depend on the frequencies:}$$



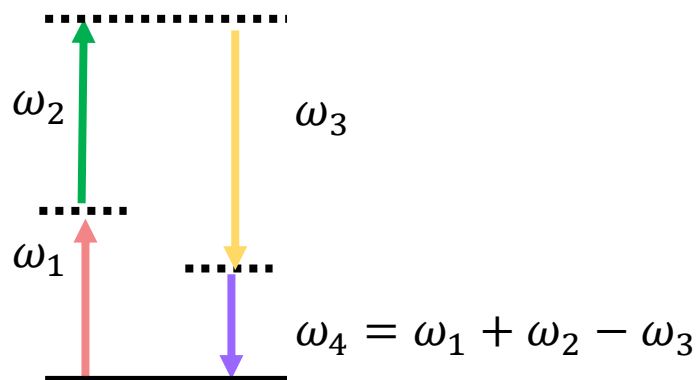
$$\omega_i, \quad 3\omega_i, \quad (\omega_i + \omega_j + \omega_k), \quad (\omega_i + \omega_j - \omega_k), \quad (2\omega_i - \omega_j), \quad (2\omega_i + \omega_j), \quad i, j, k = 1, 2, 3$$



THG

If $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$,
 $\omega_4 = 3\omega_1$

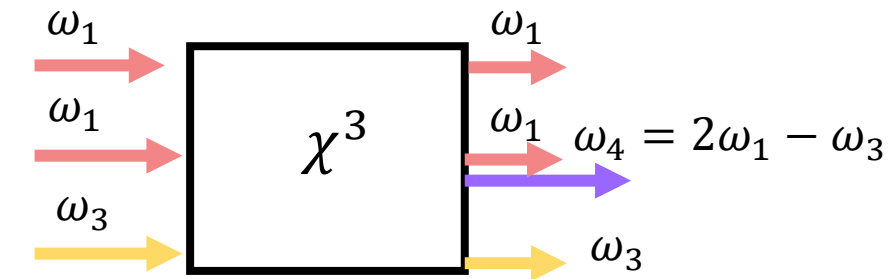
Four-Wave Mixing



degenerate FWM

If $\omega_1 = \omega_2$,
 $\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3$

Third-order nonlinearities: $\chi^{(3)}$



$$\vec{P}^{(3)}(\omega_4) = \epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3) E(\omega_1) E(\omega_3)^* E(\omega_1)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

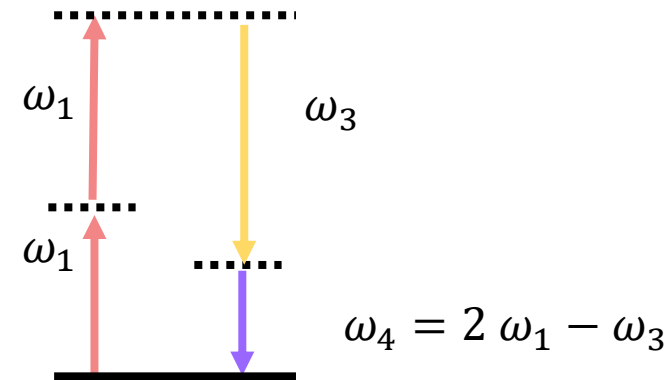
Self action effects, effects in which a beam of light modifies its own propagation by means of the nonlinear response of a material:
Self phase modulation, self focusing

$$\vec{P}^{(3)}(\omega_4 = \omega) = 3\epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_4 = 2\omega - \omega) |E(\omega)|^2 E(\omega)$$

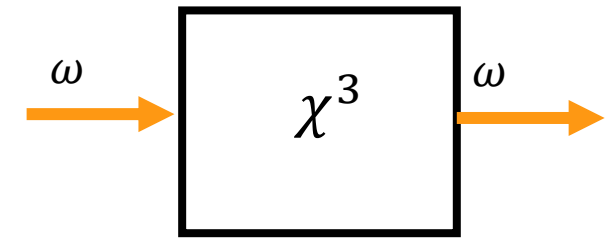
$$\vec{P}(\omega) = P^L(\omega) + \vec{P}^{(3)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E(\omega) + 3\epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) |E(\omega)|^2 E(\omega) = \epsilon_0 (\chi^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega) |E(\omega)|^2) E(\omega)$$

$$\chi_{eff}(\omega)$$

Degenerate FWM



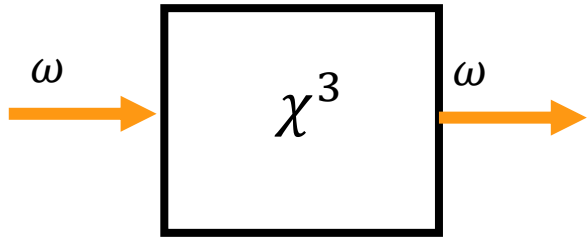
$$\vec{E}(t) = E(\omega) e^{-i\omega t} + c.c.$$



Intensity-dependent refractive index



$$\vec{E}(t) = E(\omega)e^{-i\omega t} + c.c.$$



$$\vec{P}(\omega) = P^L(\omega) + \vec{P}^{(3)}(\omega) = \epsilon_o(\chi^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega)|E(\omega)|^2)E(\omega)$$

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_o\chi_{eff}(\omega)E(\omega)$$

$\chi_{eff}(\omega)$

$$n^2 = 1 + \chi_{eff}(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega)|E(\omega)|^2$$

$n(I) = n_o + n_2(I) \rightarrow$ Intensity dependent refractive index (optical Kerr effect)

$$n^2 = (n_o + n_2 I(\omega))^2 \sim n_o^2 + 2n_2 n_o I(\omega) + \cancel{n_2^2 I(\omega)^2}$$

$$n_o = \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)}$$

$$n_2 = \frac{3}{4n_o^2 \epsilon_o c} \chi^{(3)}$$

$$I = 2n_o \epsilon_o c |E(\omega)|^2$$

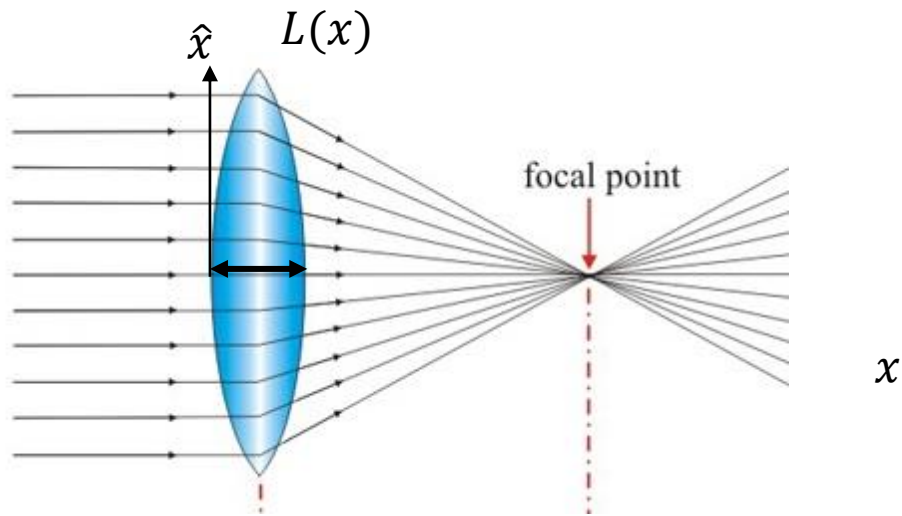
Most common materials (Sapphire, fused quartz, glass, YAG, YLF, ZnS, ZnSe): $\sim 10^{-15}$ to 10^{-16} cm²/W

Air: $\sim 10^{-19}$ cm²/W

Self action effect: self focusing

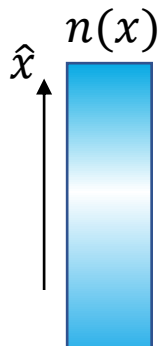


A lens produces a convergent spherical wavefront, by introducing a quadratic phase in a plane wavefront



$$\phi(x) = k \, n \, L(x)$$

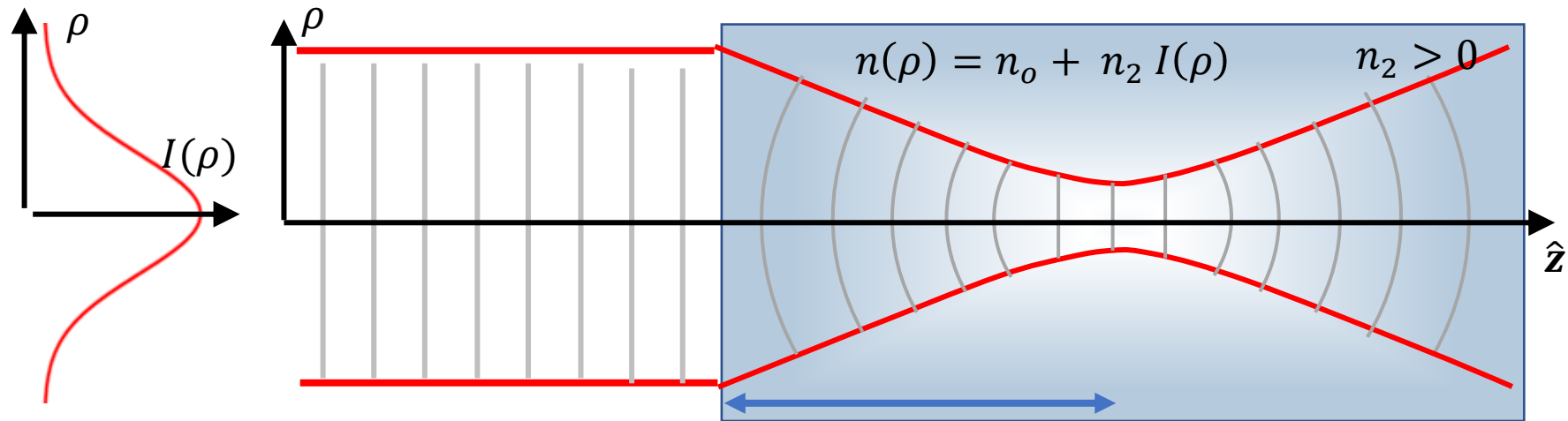
$$e^{i\phi(x)} = e^{ik \, n \, L(x)}$$



$$\phi(x) = k \, n(x) \, L$$

$$e^{i\phi(x)} = e^{i \, n(x) \, kL}$$

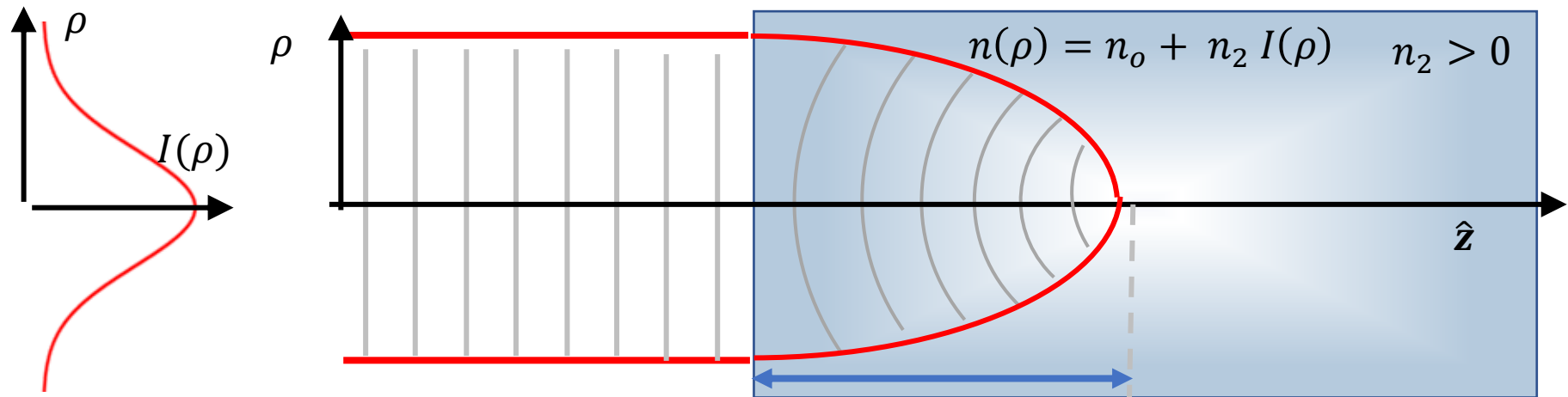
Self action effects: self focusing



Air
 $n_0 \approx 1$, $n_2 \approx 4 \times 10^{-23} \text{ m}^2/\text{W}$
 $P_{cr} = 2.4 \text{ GW}$

SiO_2
 $n_0 \approx 1.453$, $n_2 \approx 2.4 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$
 $P_{cr} = 2.8 \text{ MW}$

Self action effects: self focusing



$$P > P_{cr} = \frac{\pi(0.61)^2 \lambda^2}{8n_o n_2}$$

$$z_{sf} = \frac{2n_o w_o^2}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{P/P_{cr}}}$$

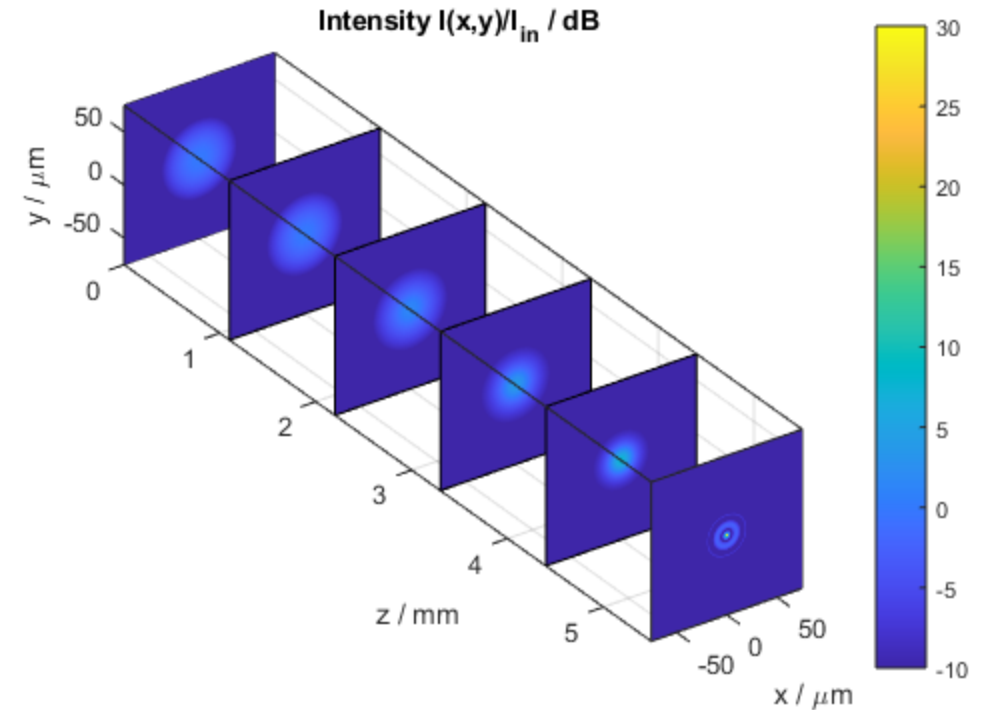
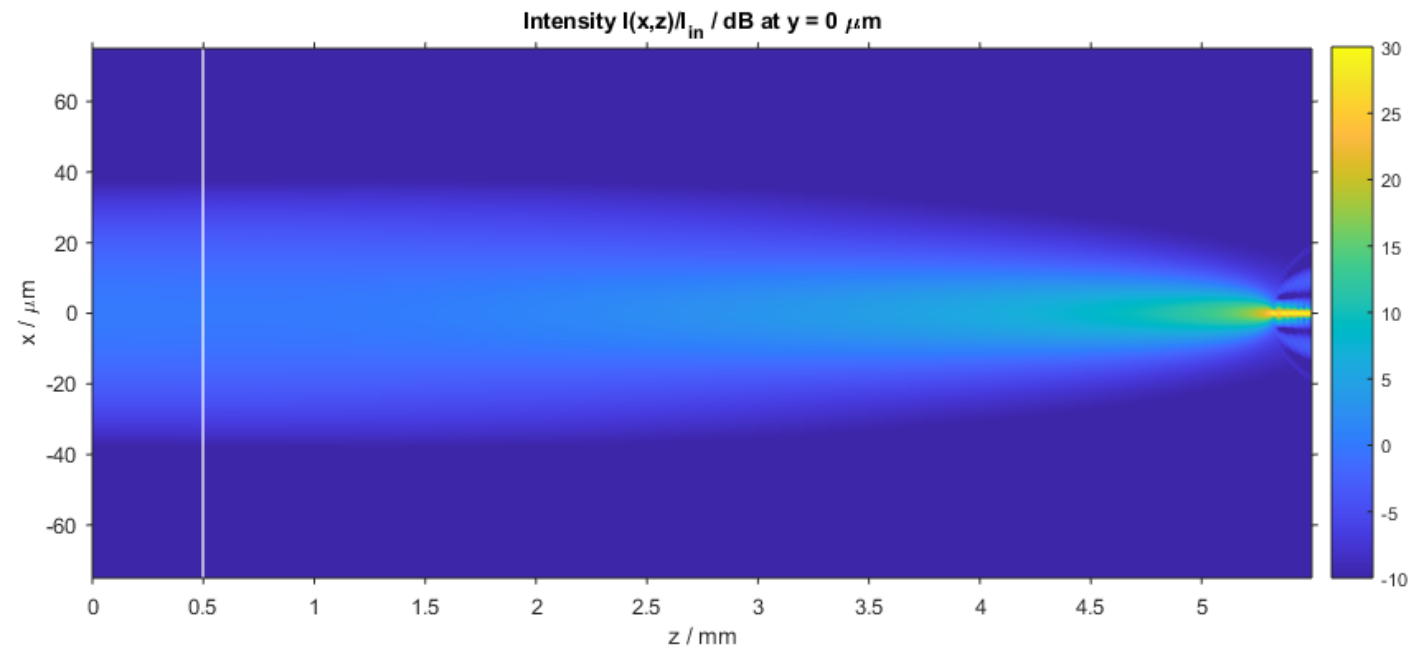
Air
 $n_0 \approx 1$, $n_2 \approx 4 \times 10^{-23} \text{ m}^2/\text{W}$
 $P_{cr} = 2.4 \text{ GW}$

SiO₂
 $n_0 \approx 1.453$, $n_2 \approx 2.4 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$
 $P_{cr} = 2.8 \text{ MW}$

Self action effects: self focusing



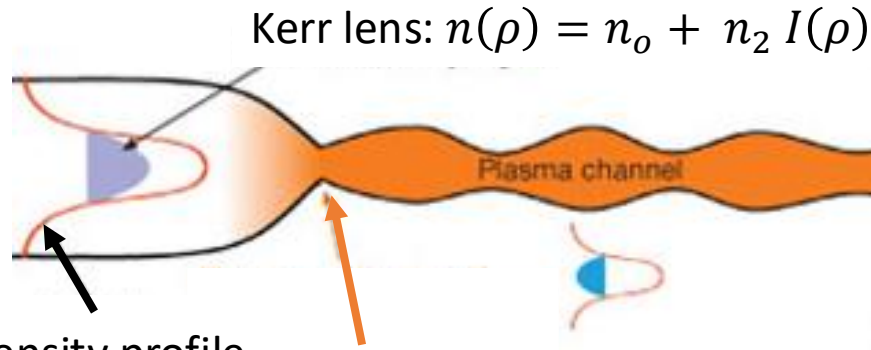
Fused silica



Self trapping: self focusing compensates diffraction

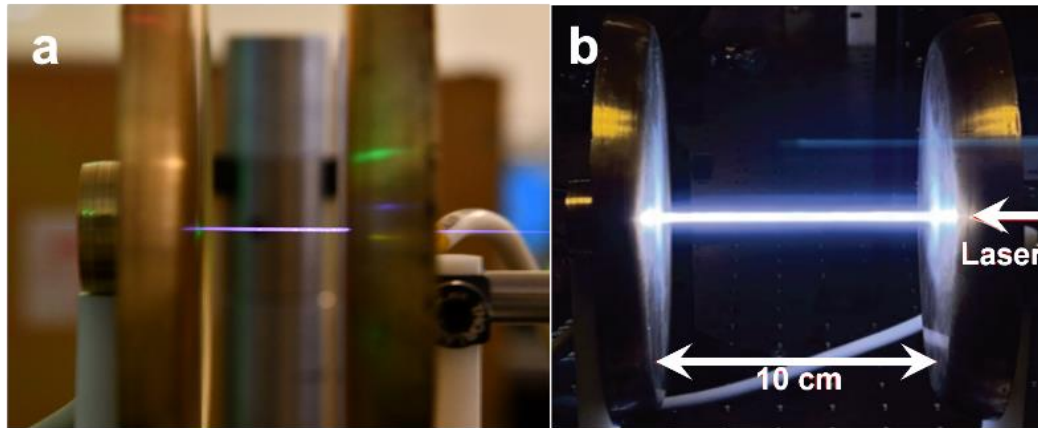
- 1) The Kerr lens focuses the beam
- 2) Diffraction expands the beam

Self focusing in action: plasma channel filamentation



Plasma + saturation
of Kerr effect:
Diverging lens

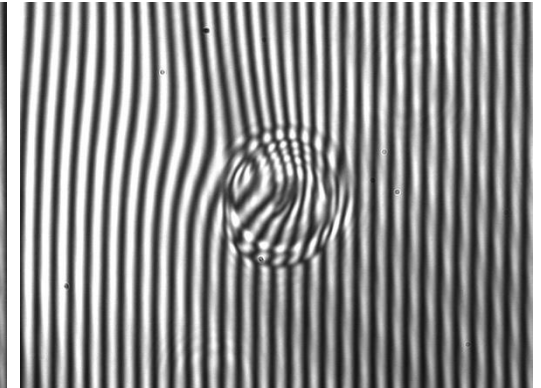
$$n(\rho) = n_o - N_e(I)/2N_{\text{crit}}$$



1 kHz, 150 mJ

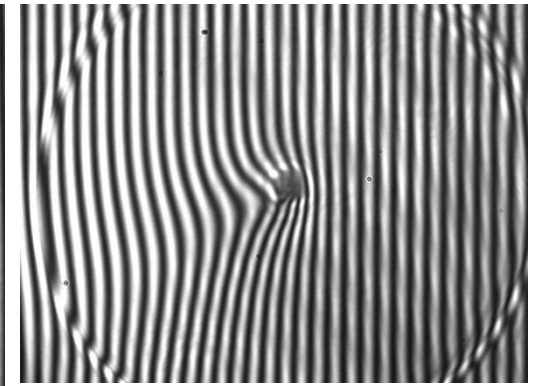
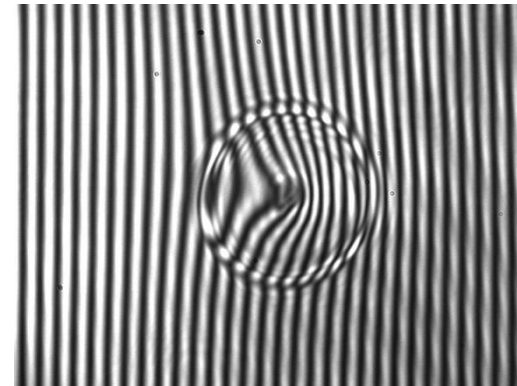
300 ns

2 us



3 us

10 us



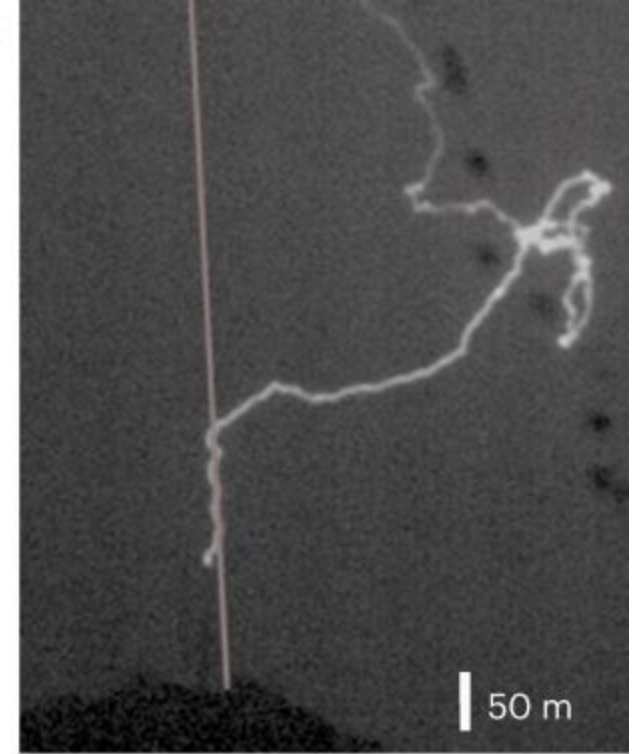
Laser-guided lightning



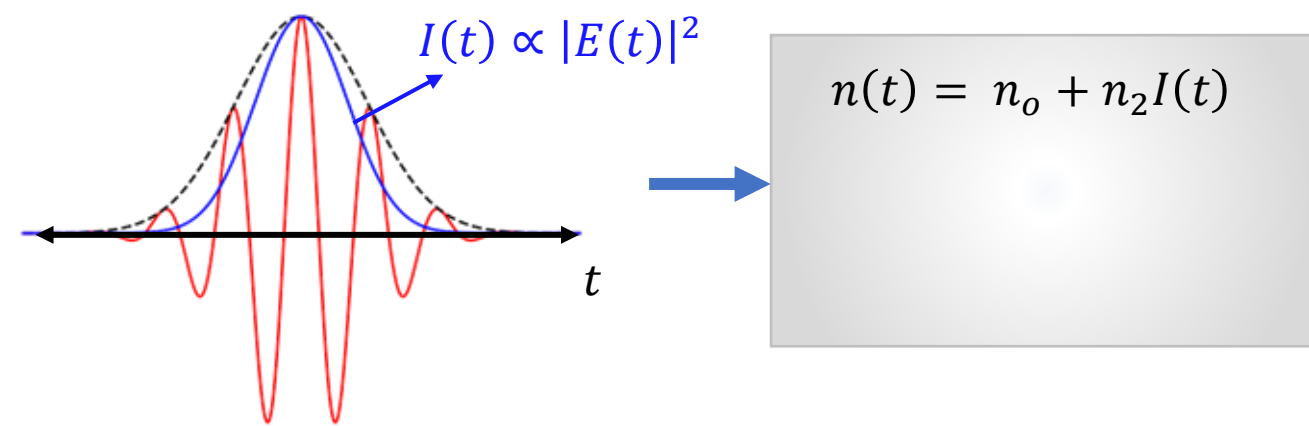
a



b



Self action effects: self-phase modulation



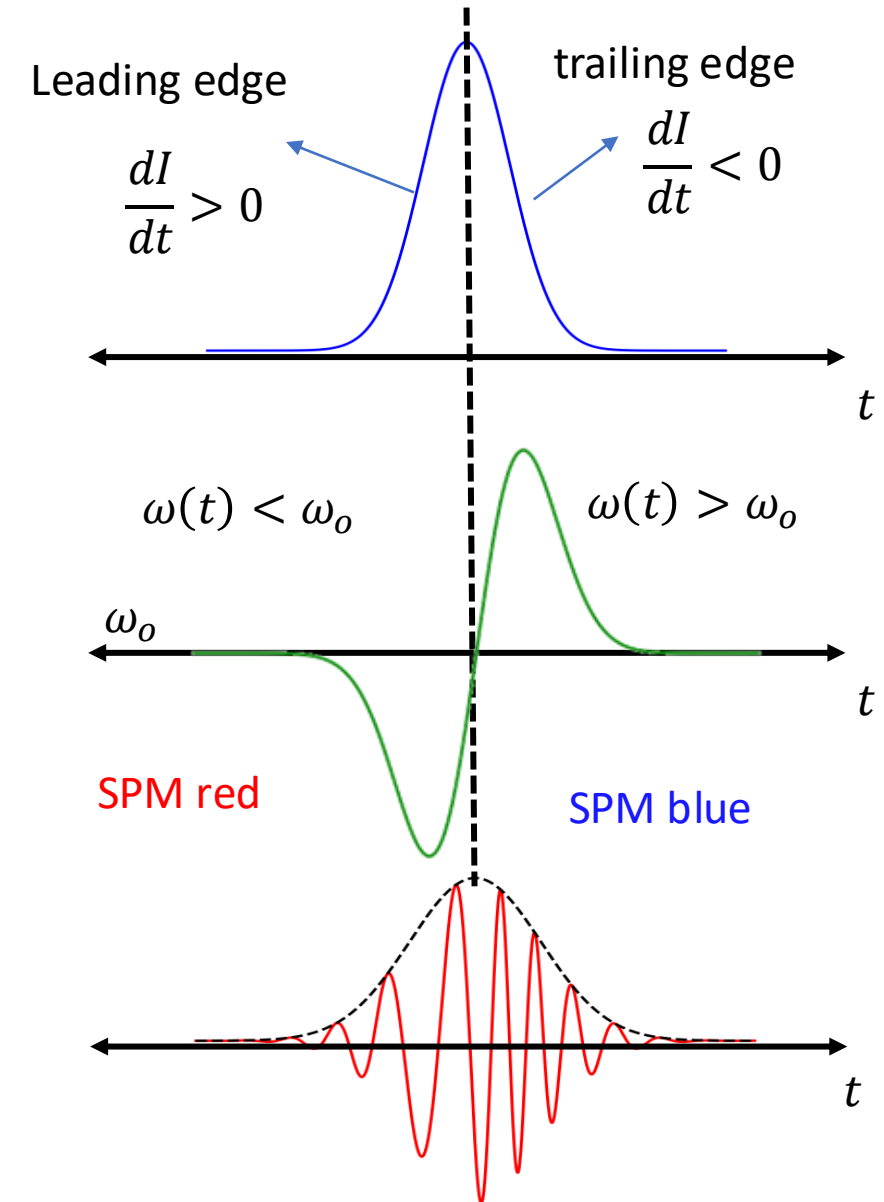
$$\vec{E}(z, t) = E(z, t) \hat{x} = \{\mathcal{E}(t) e^{i(\omega_o t - n k_o z)} + c.c.\} \hat{x}$$

$$\Phi(t) = \omega_o t - k_o n(t) z = \omega_o t - k_o n_o z - k_o n_2 I(t) z$$

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \omega_o - n_2 k_o z \frac{dI}{dt}$$

$$\phi^{NL}(t) = -k_o n_2 z I(t)$$

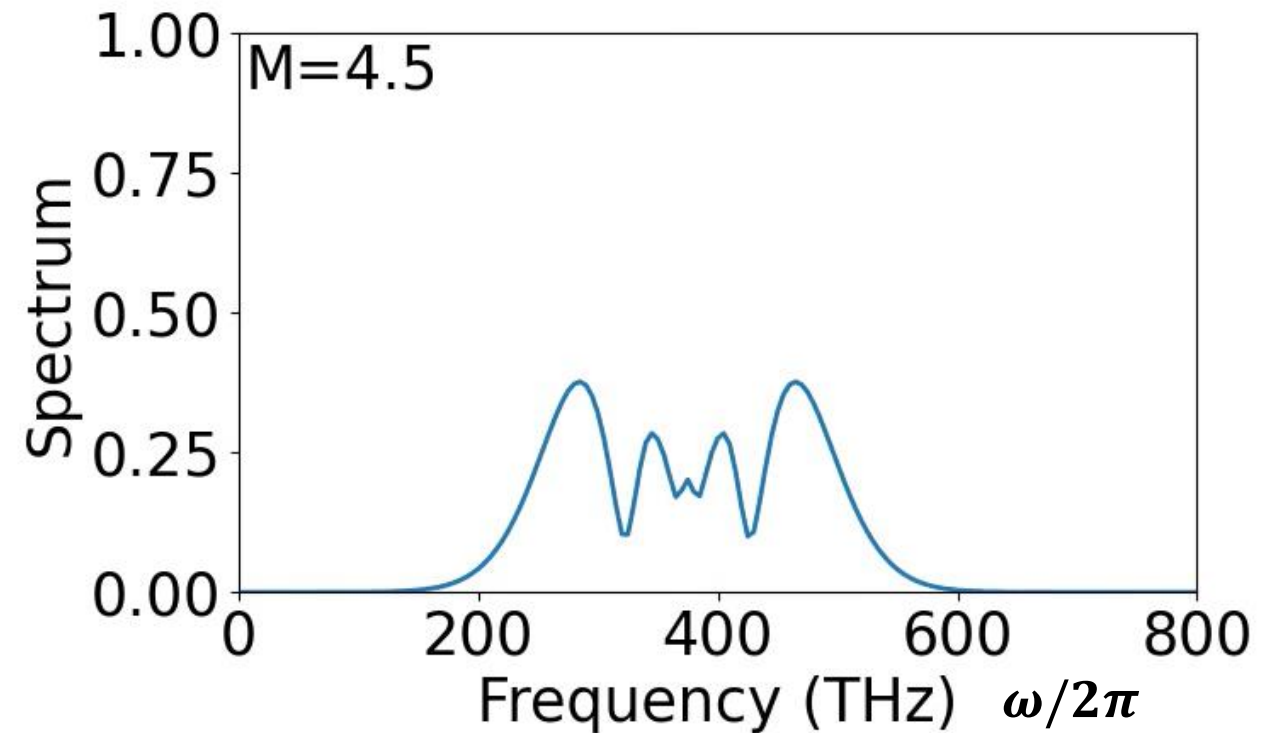
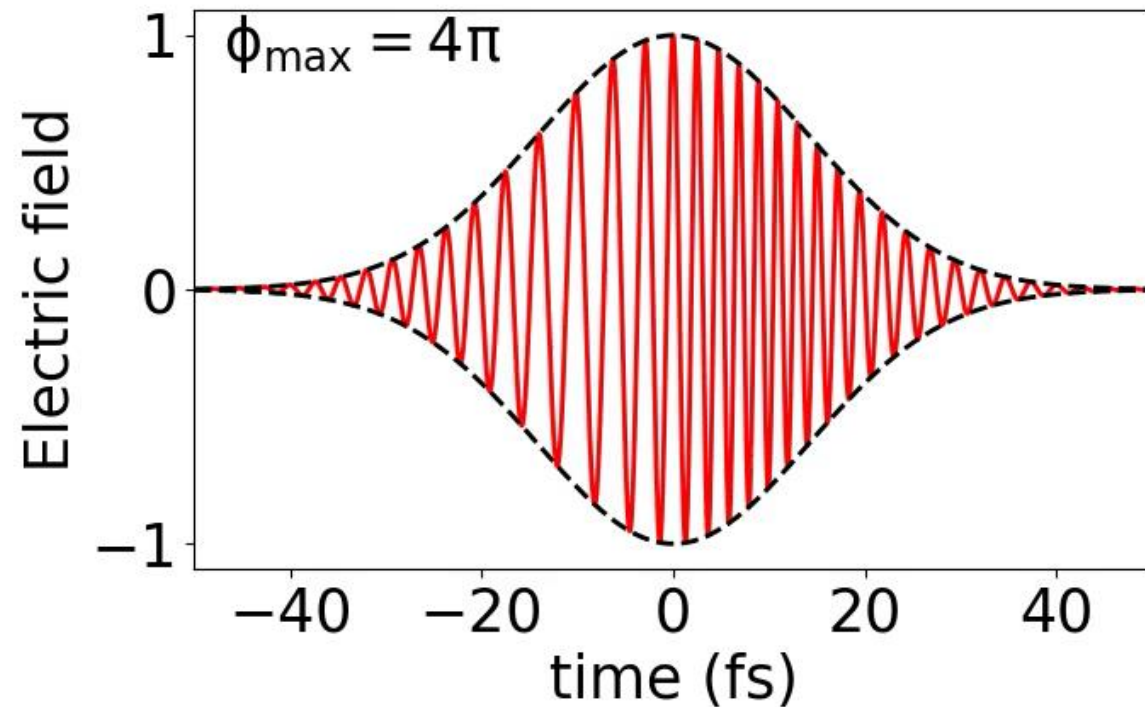
The spectrum broadens, the pulse envelope shape is preserved



Self action effects: self phase modulation

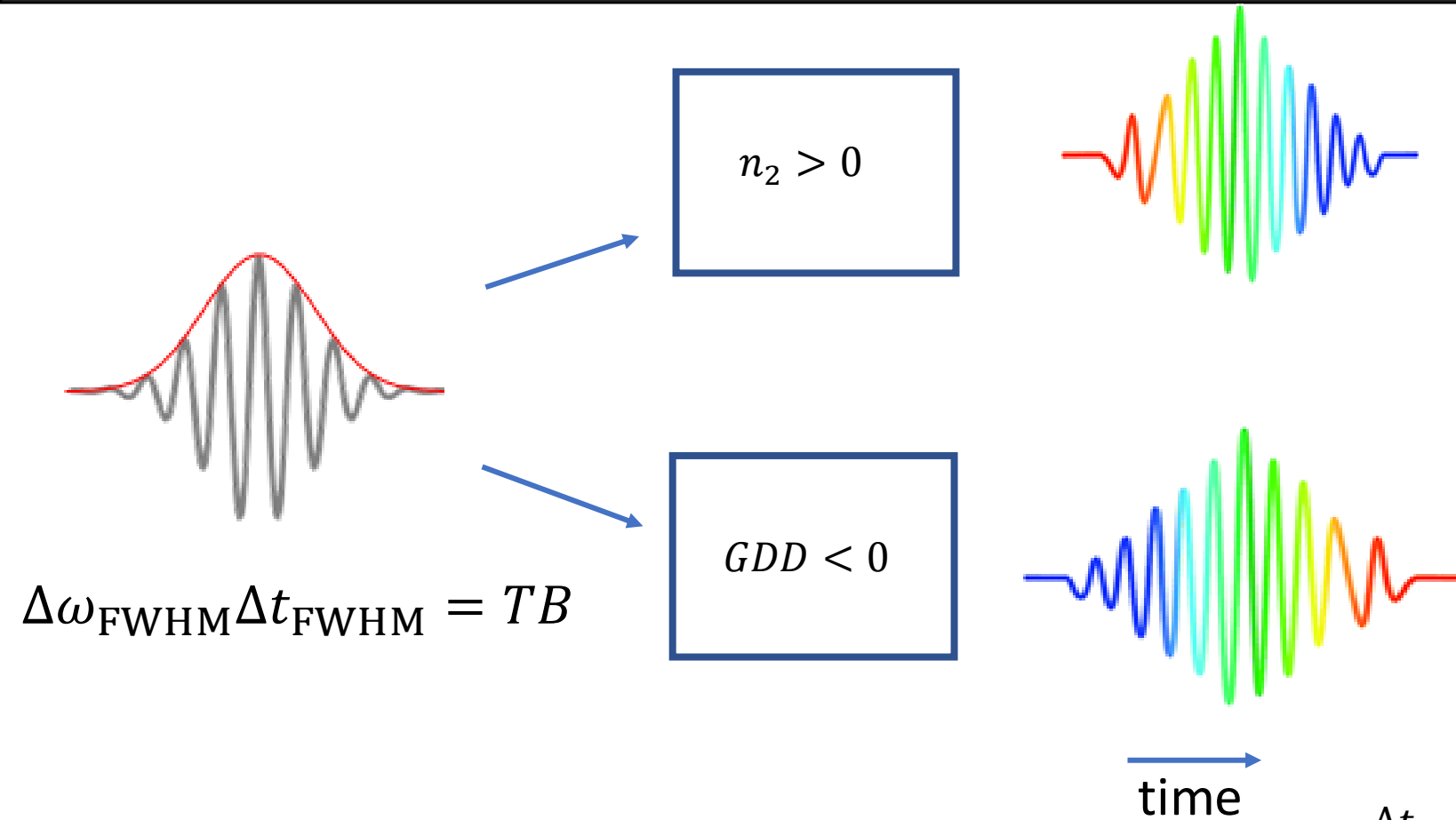


$$\phi^{NL}(t) = -k_o n_2 z I(t) \quad |\phi_{max}^{NL}| = k_o n_2 I_p z = \frac{z}{L_{NL}} = \left(M - \frac{1}{2}\right) \pi$$



Increasing ϕ^{NL} (by increasing I_p or z) will broaden the bandwidth $\Delta\omega$

Combining self-phase modulation and dispersion



- Broadens the spectrum
- Preserves pulse shape

$$|\phi_{max}^{NL}| = (k_o n_2 I p) z = \frac{z}{L_{NL}}$$

$$\Delta\omega_{FWHM} \Delta t_{FWHM} > TB$$

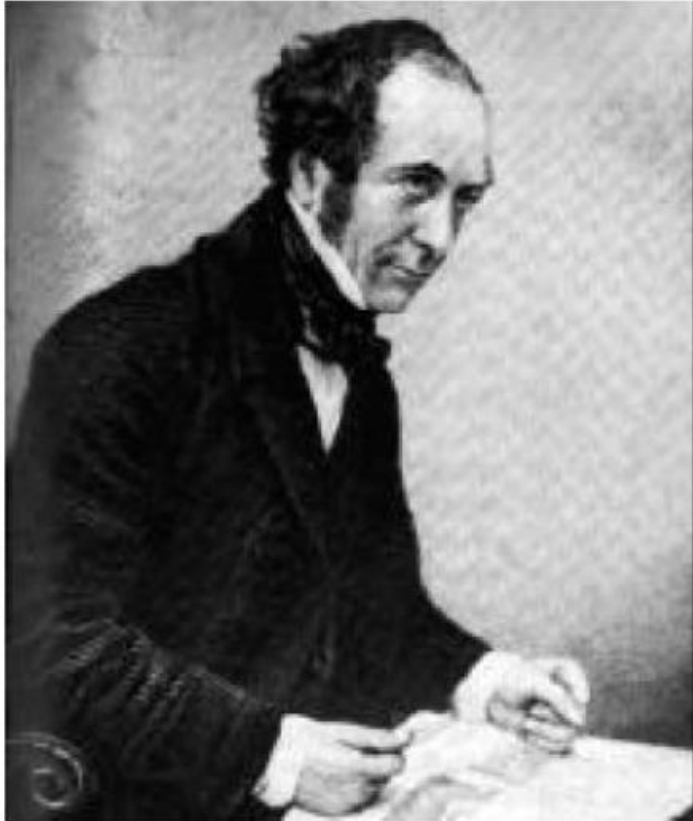
- Stretches the pulse
- Preserves the spectrum

$$\Delta t_{FWHM} = \tau_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} \quad L_D = \frac{\tau_o^2}{GVD \ 4 \ln(2)}$$

$$\Delta\omega_{FWHM} \Delta t_{FWHM} > TB$$

Can SPM and GDD compensate each other allowing a shorter pulse that preserves $\Delta\omega$ and Δt during long propagation distances?

John Scott Russell (1808–1882)



"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation".

Fundamental soliton

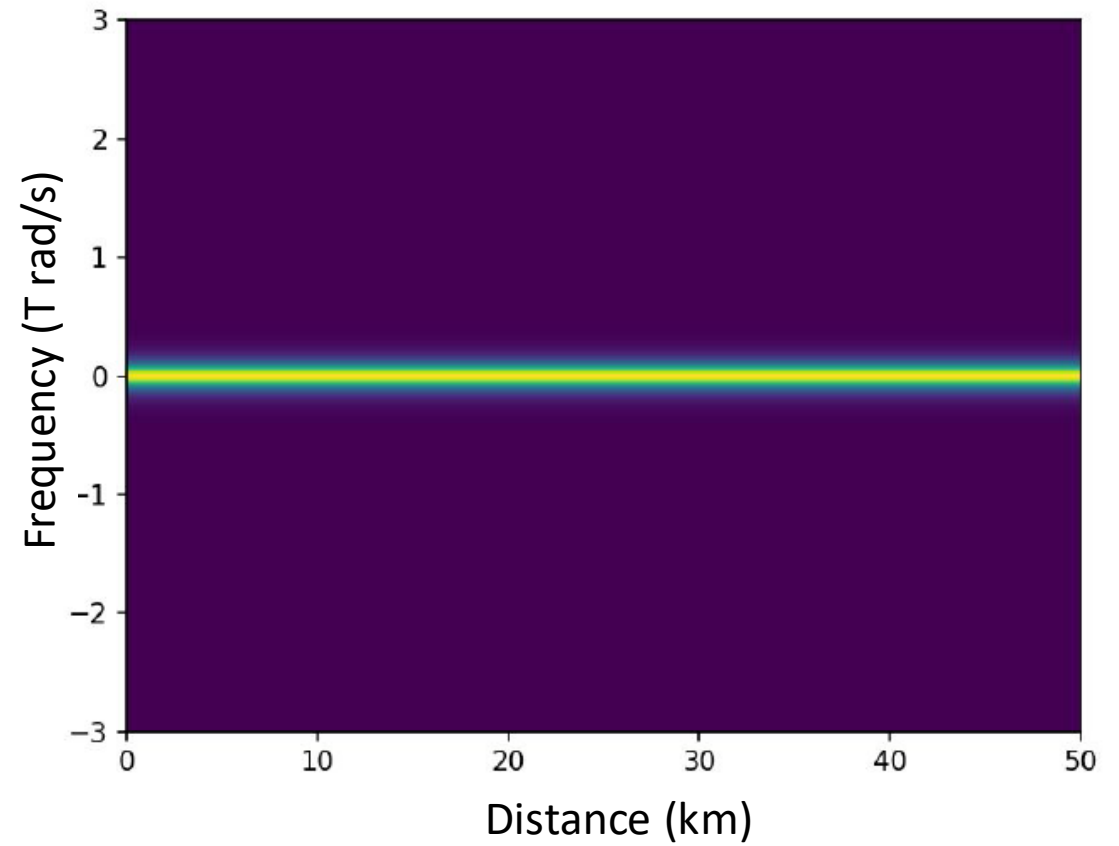
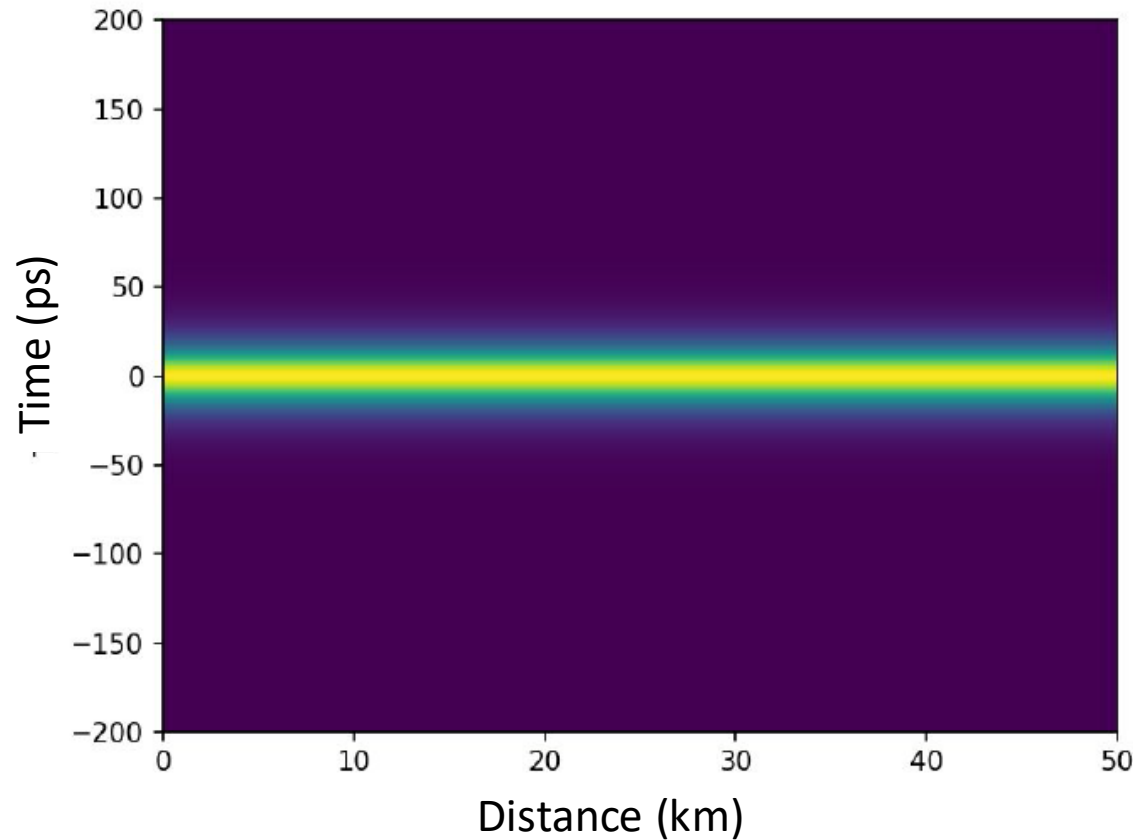


$$L_{NL} = k_o n_2 I p$$

$$L_D = \frac{\tau_o^2}{GVD \ 4 \ln(2)}$$

$$N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}} = 1$$

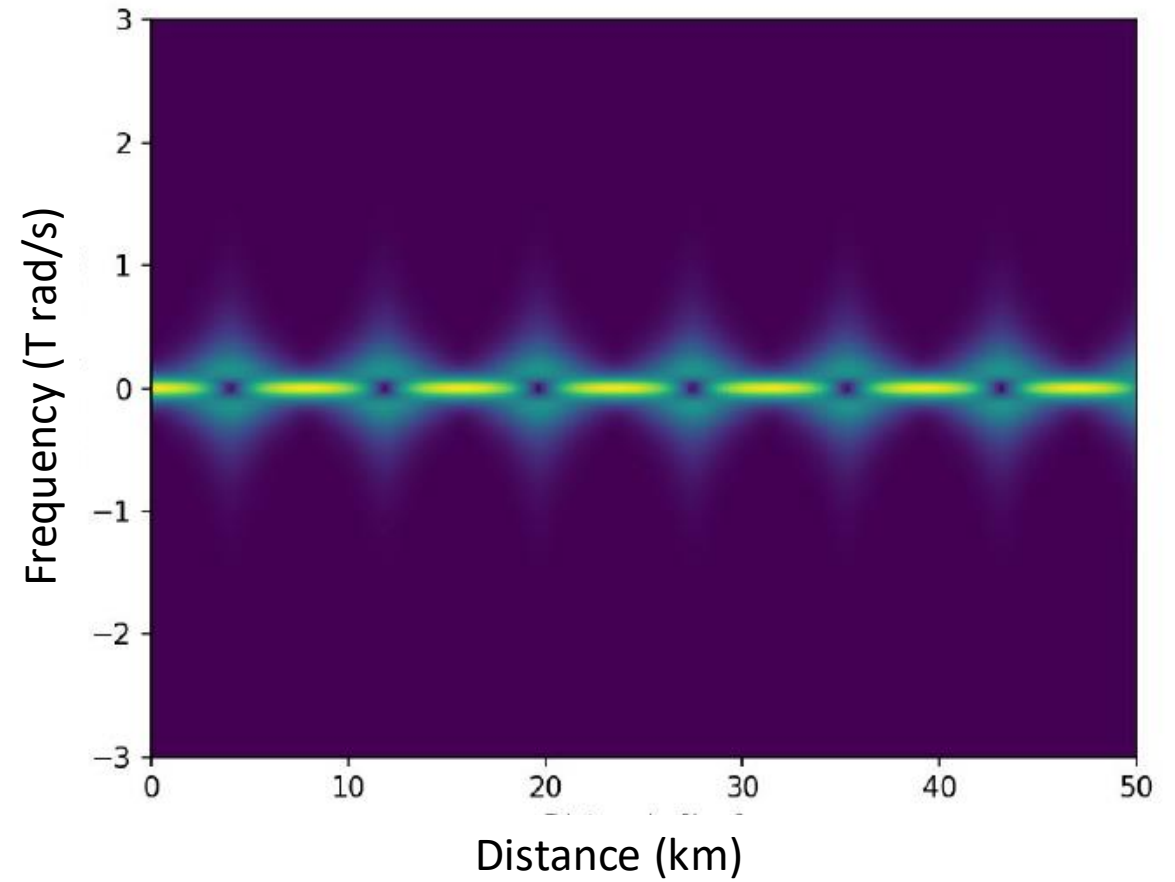
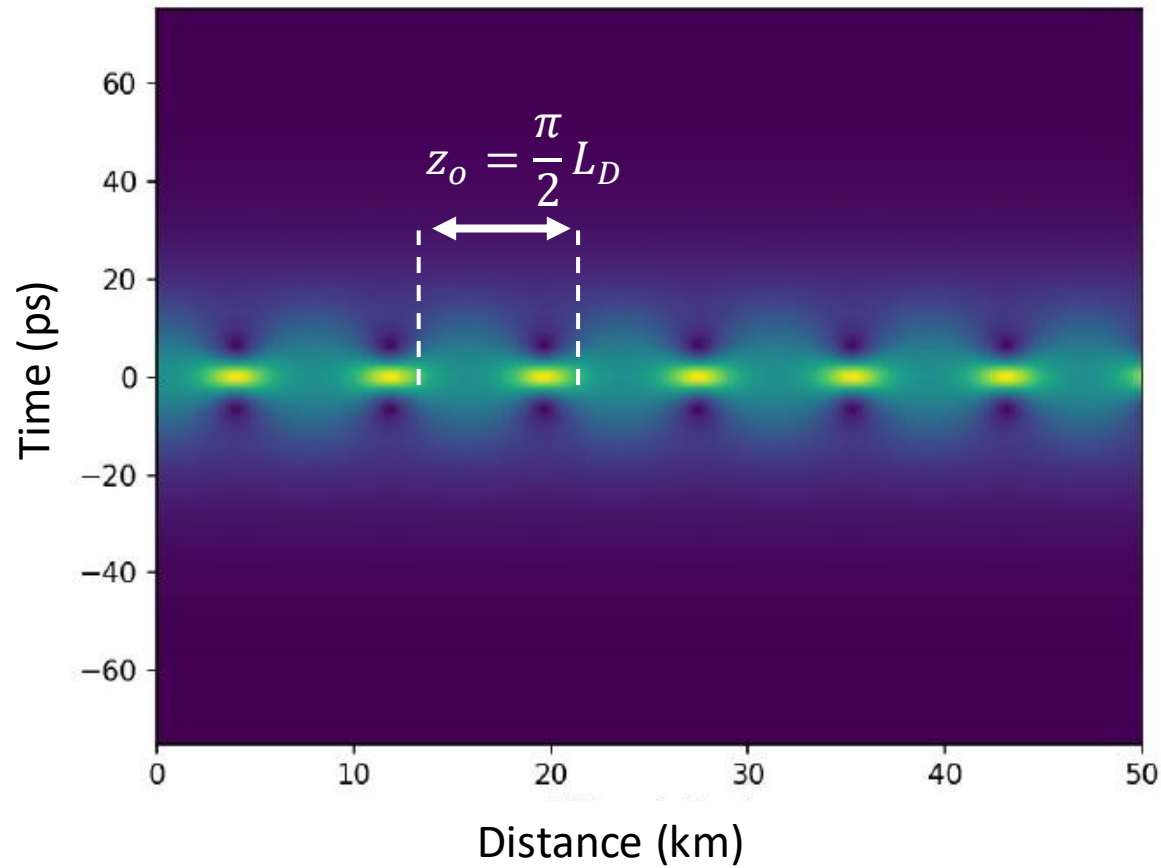
$$\Delta\omega\Delta t = \text{constant}$$



Higher-order soliton



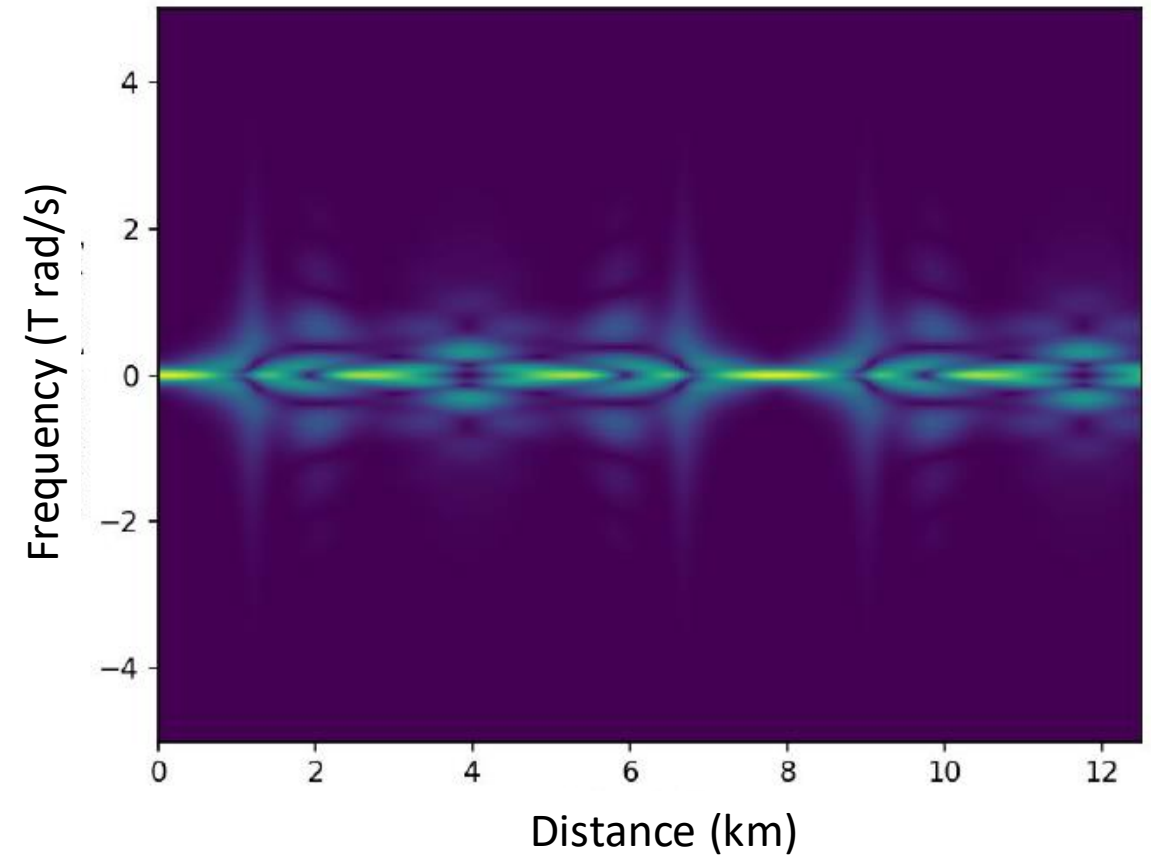
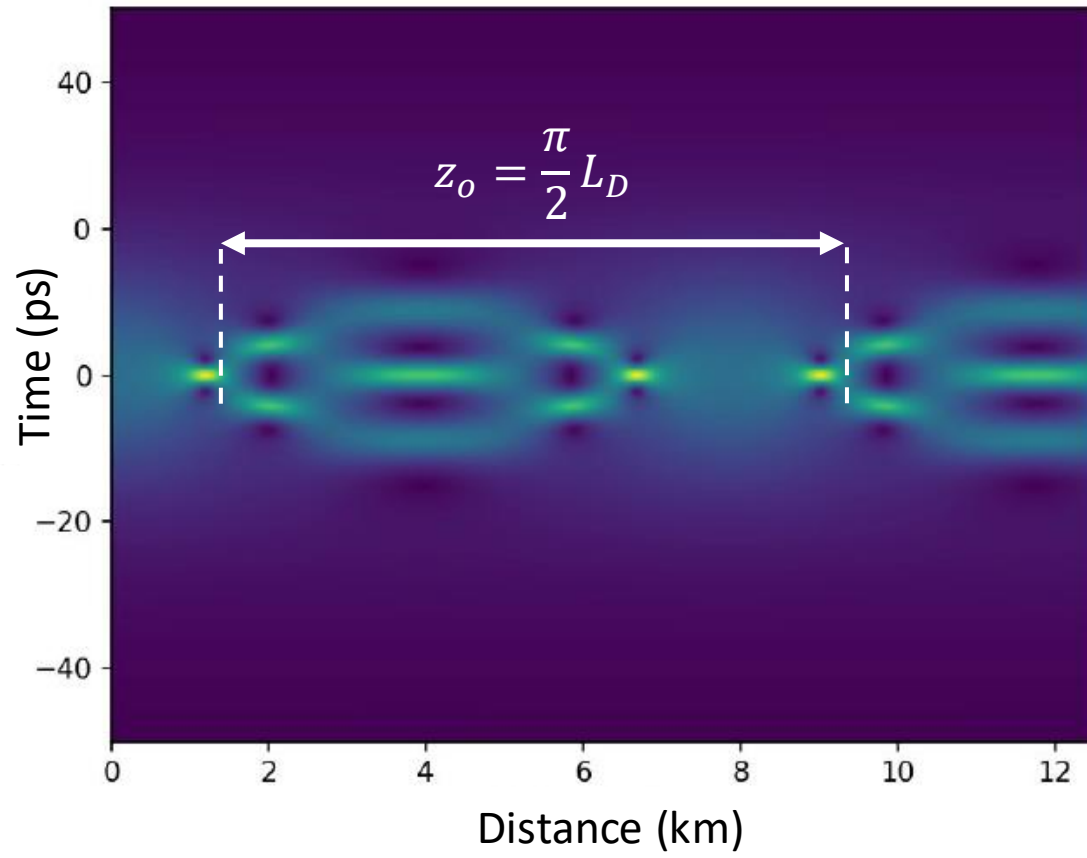
$$N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}} = 2$$



Higher-order soliton



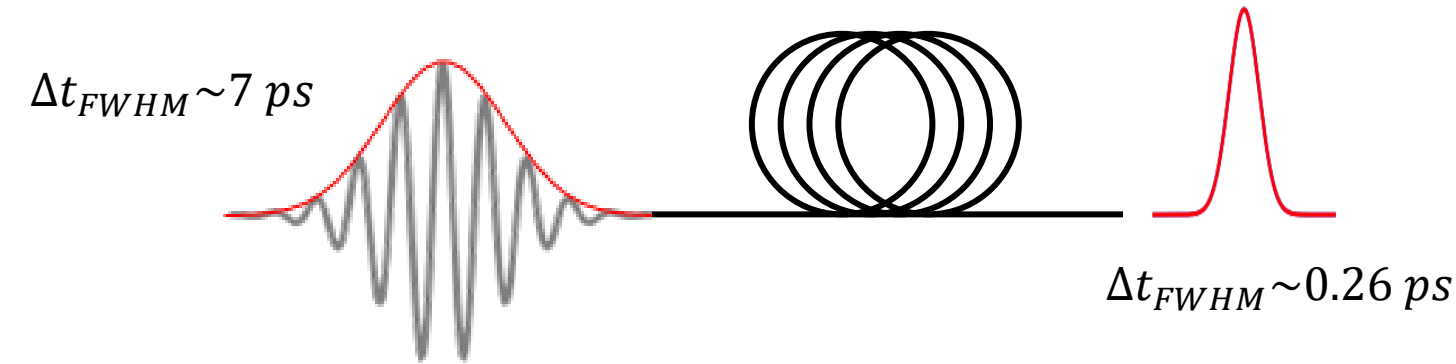
$$N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}} = 4$$



Combining self-phase modulation and dispersion



Extreme picosecond pulse narrowing by means of soliton effect in single-mode optical fibers



$$D_\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} GVD$$

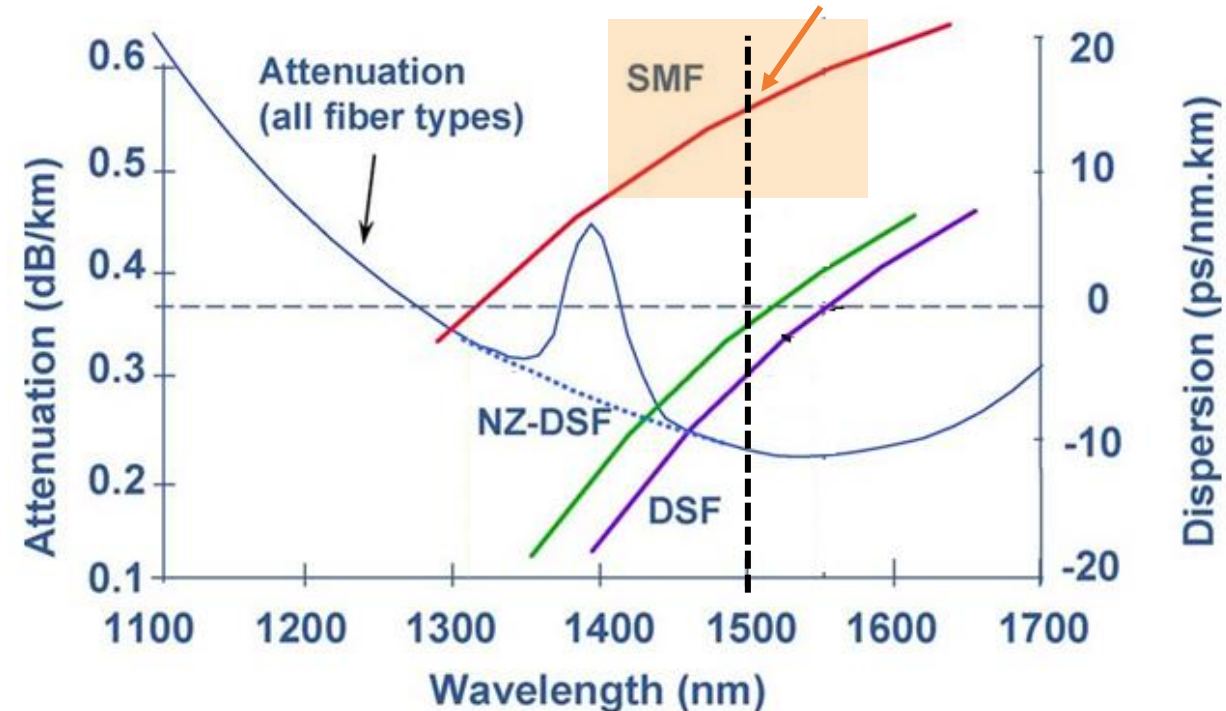
Bandwidth-limited gaussian pulse
 $\Delta\omega_{FWHM}\Delta t_{FWHM} \sim 2.77$

$$n_2 > 0$$

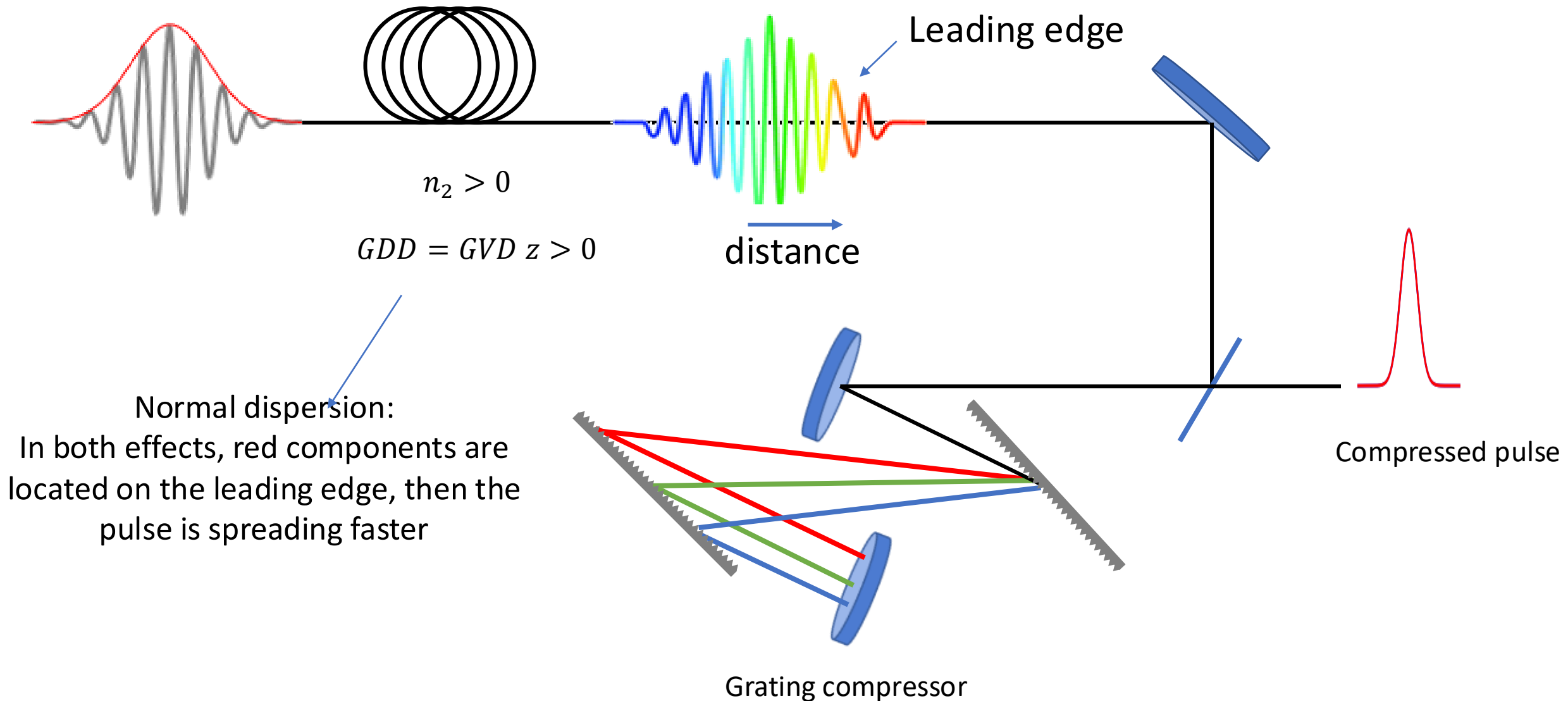
$$GDD = GVD \ z < 0$$

Fiber length $< z_o$ (soliton period)

Low attenuation, negative GDD OF (anomalous D)



What can we do if the OF (or any material) has $GDD > 0$?



- General concepts of light pulses. Laser cavity modes.
- Bandwidth limited of transform limited pulse.
- Propagation of pulses in linear medium: Dispersion. CEP, GV, GDD, TOD
- Propagation of pulses in nonlinear medium
 - Second order susceptibility:
 - SHG, SFG, DFG....
 - Phase matching
 - Third order susceptibility:
 - THG, FWM
 - Intensity dependent refraction index: self action effects (self focusing, self phase modulation)

Mecanismos para fijar la relación de fase entre modos

Mecanismos para fijar la relación de fase

Objetivo: lograr que los modos longitudinales mantengan una relación de fase fija, formando un tren de pulsos.

$$f_{\text{rep}} = \frac{1}{\tau_{RT}}$$

El pulso puede iniciarse a partir de fluctuaciones espontáneas o perturbaciones de la cavidad.

(ruido, fluctuaciones de intensidad, una pequeña perturbación mecánica un modulador externo)

Mode locking activo

Un modulador externo introduce una modulación periódica de pérdidas, fase o ganancia sincronizada con el tiempo de round trip.

$$f_{\text{mod}} = f_{\text{rep}}$$

Ejemplos: modulador acusto-óptico, modulador electro-óptico, bombeo sincrónico.

Idea clave: un reloj externo fuerza la sincronización.

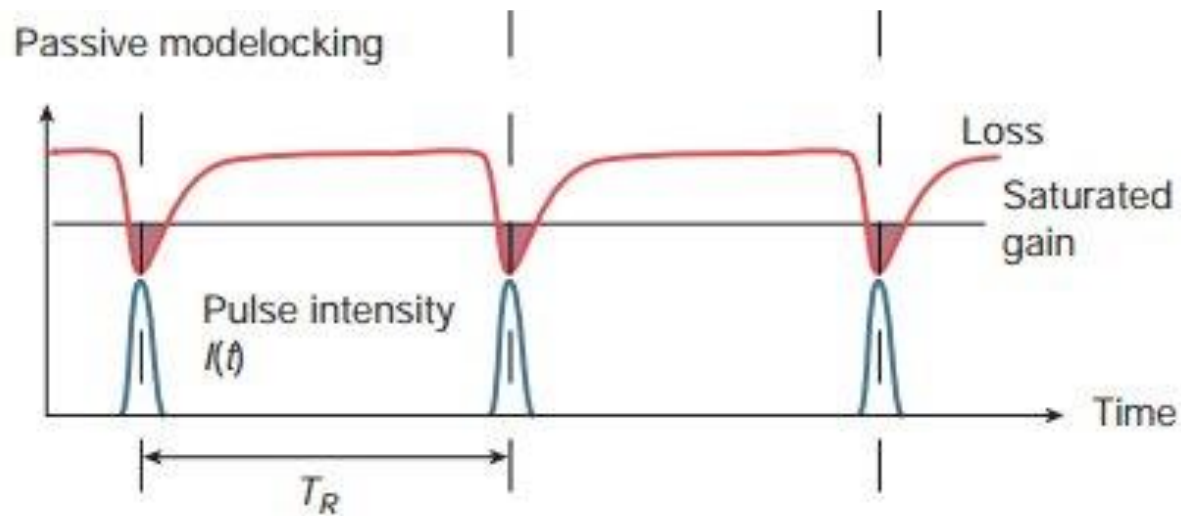
Mode locking pasivo

Un fenómeno no lineal que favorece los picos de mayor intensidad.

Una fluctuación inicial puede crecer, porque el pulso intenso sufre menos pérdidas o más ganancia que el fondo.

Ejemplos: absorbente saturable, Kerr-lens mode locking, colliding pulse mode locking, additive pulse mode locking.

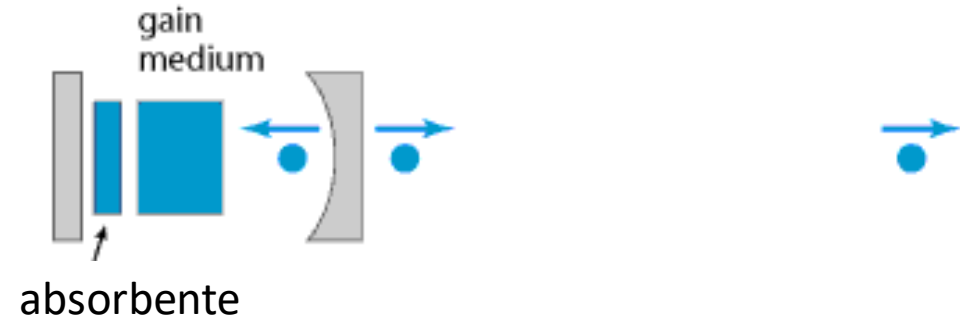
Idea clave: la propia intensidad del pulso selecciona el estado pulsado.



Mode locking pasivo

- Un mecanismo no lineal (ej absorbente saturable) favorece los picos de mayor intensidad
- Luego de muchos round trips, la intensidad de las fluctuaciones mayores crece a expensas de las más débiles y toda la energía se almacena en pulsos muy angostos y de alta energía
- el pulso puede iniciarse por fluctuaciones o perturbaciones, pero la selección la hace el elemento no lineal.

Mode locking pasivo: absorbente saturable



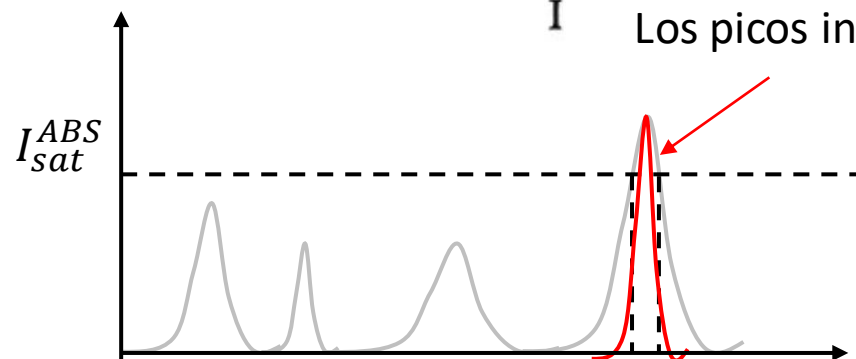
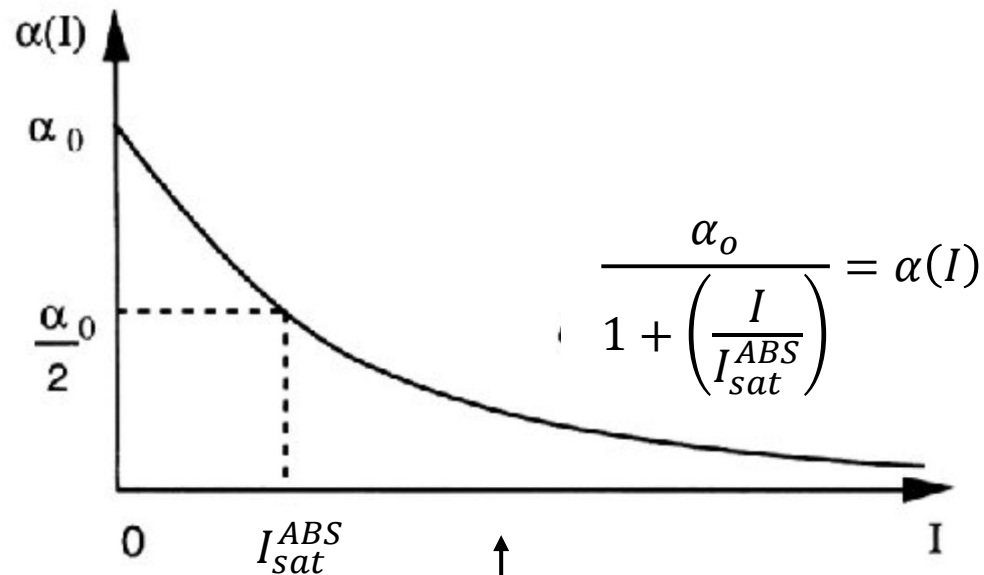
Para un sistema de dos niveles absorbentes

$$\alpha = \Delta N_{12} \sigma_{12} = \frac{\Delta N_{12}^0 \sigma}{1 + \left(\frac{I}{I_{sat}^{ABS}} \right)} = \frac{\alpha_0}{1 + \left(\frac{I}{I_{sat}^{ABS}} \right)} = \alpha(I)$$

Analogía: una esponja que se satura

$I < I_{sat}^{ABS}$, I bajas, son absorbidas y sufren altas pérdidas

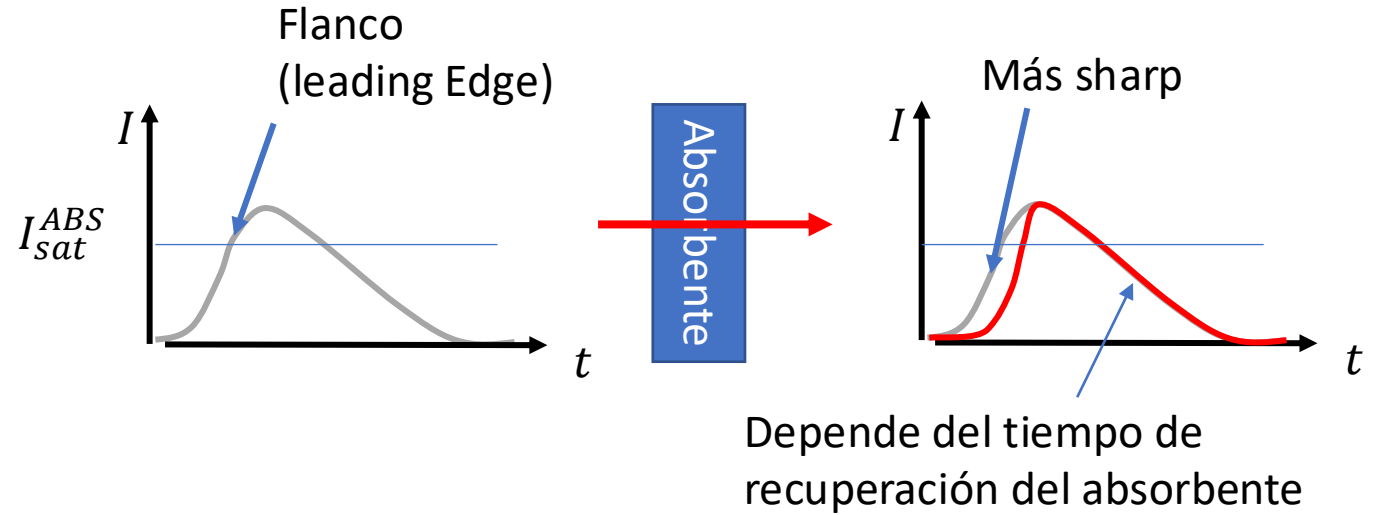
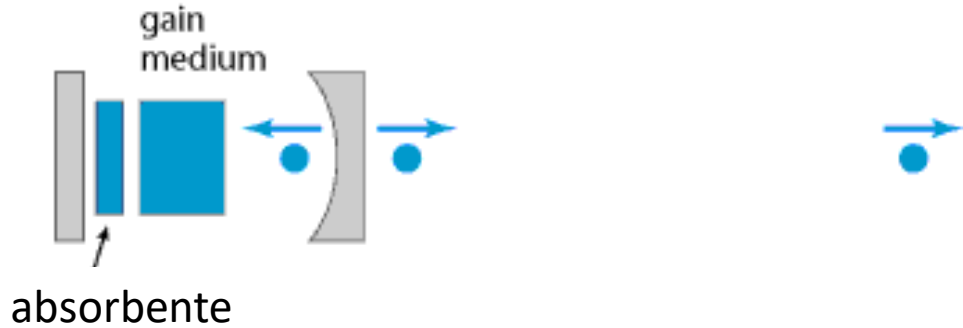
$I > I_{sat}^{ABS}$, el absorbente se satura y aumenta la transmisión



$$I_{sat}^{ABS} < I_{sat}^{gain}$$

El absorbente se vuelve transparente antes de que el medio de ganancia se agote.

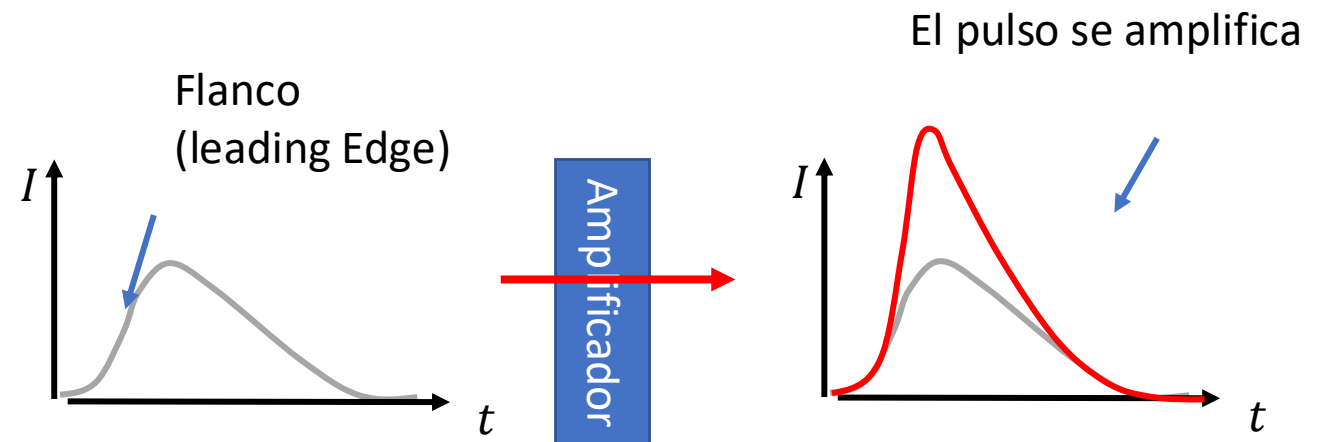
Mode locking pasivo



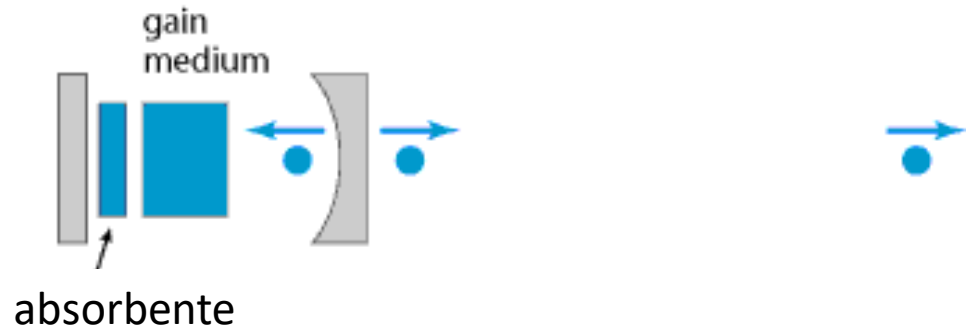
Luego de muchos RT, el leading edge del pulso se hace mas sharp erosionándose por el absorbente y se amplifica por mediante el amplificador

$$I_{sat}^{ABS} < I_{sat}^{gain}$$

El absorbente se vuelve transparente antes de que el medio de ganancia se agote.

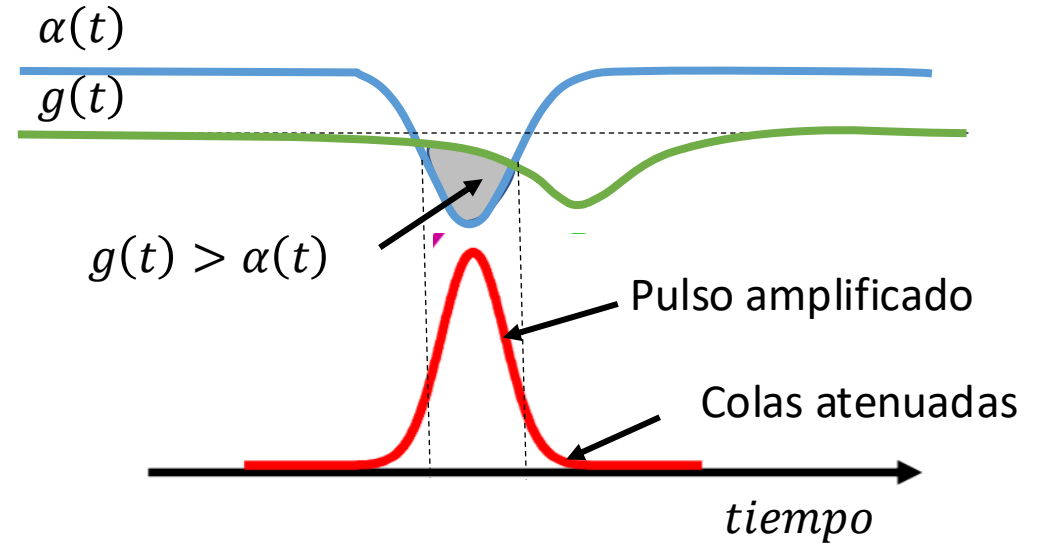


Mode locking pasivo

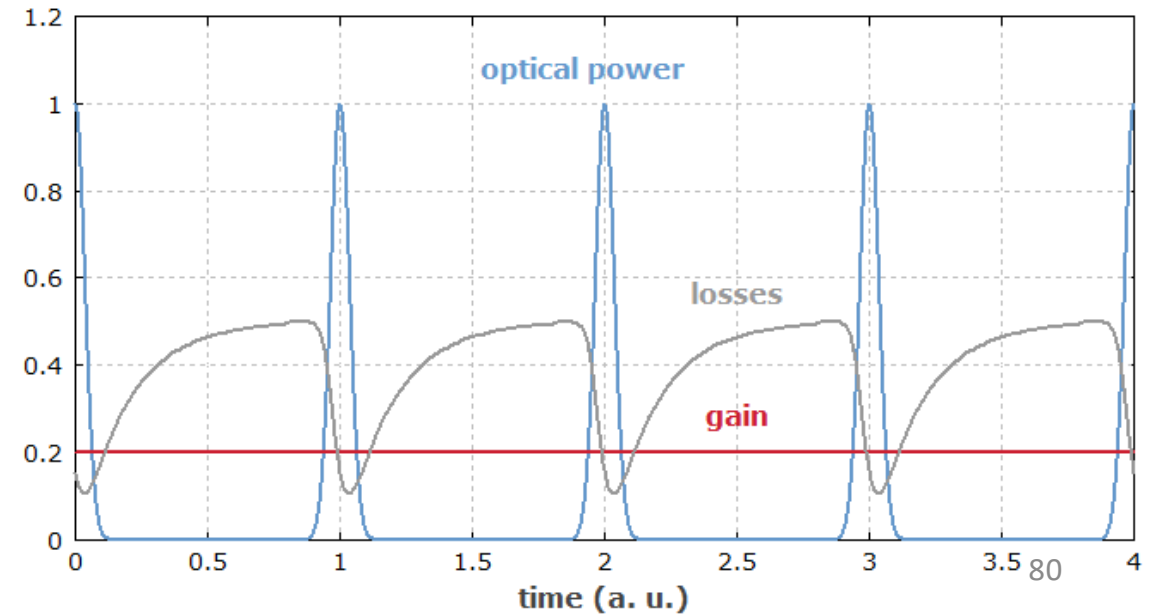
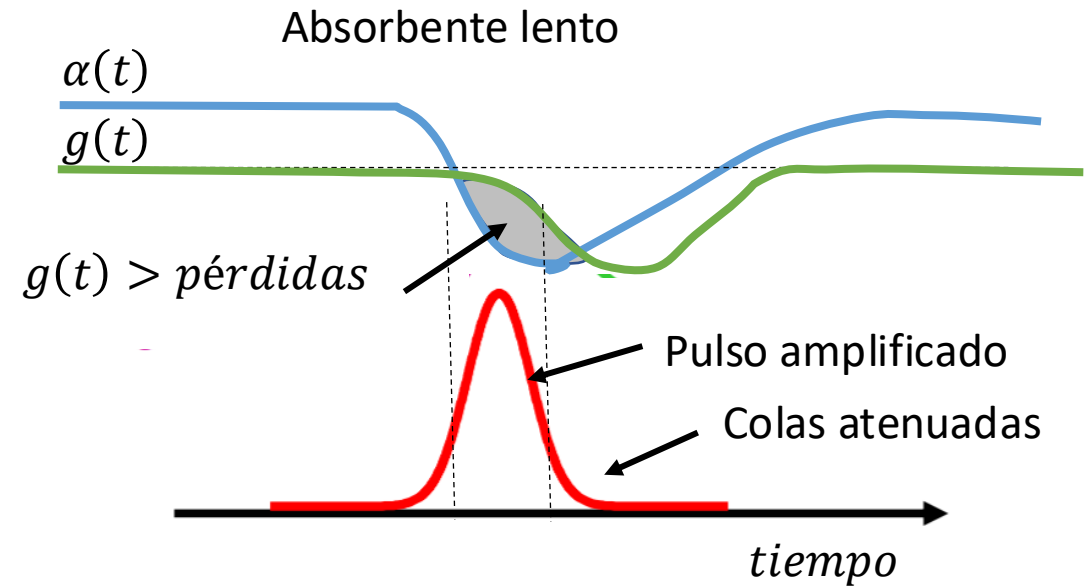
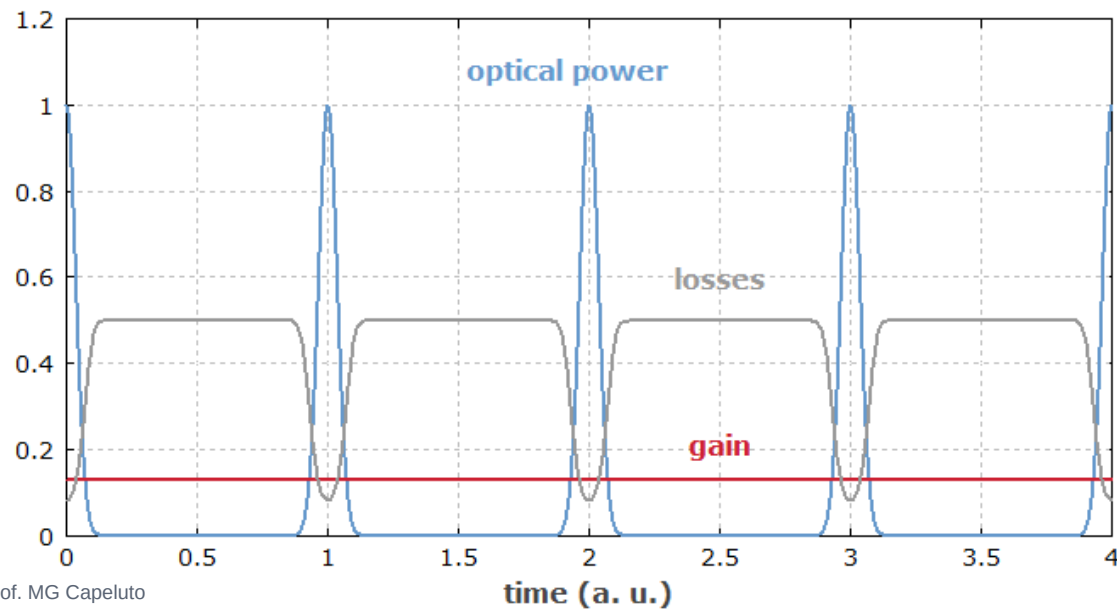
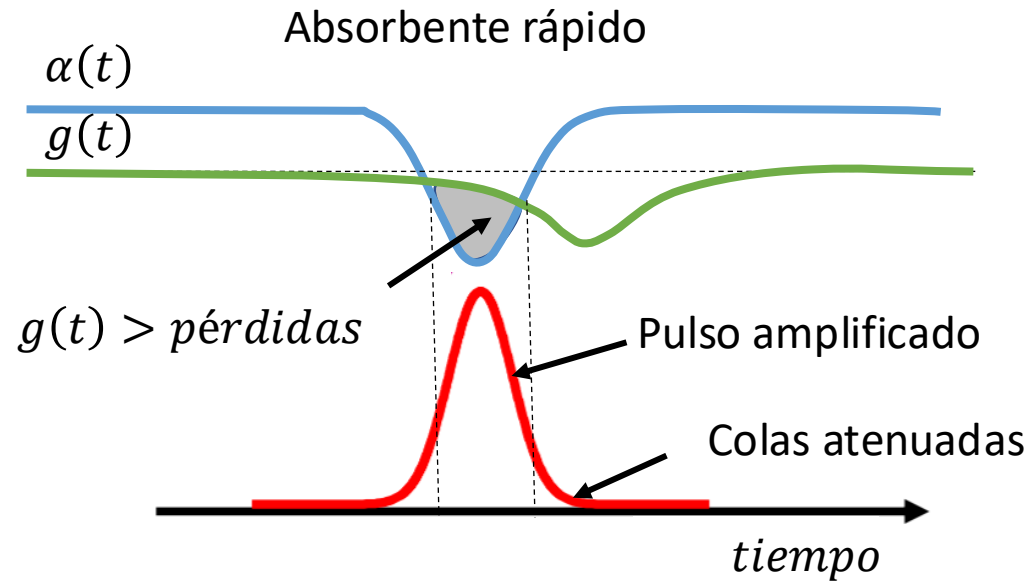


$$\frac{\alpha_o}{1 + \left(\frac{I}{I_{sat}^{ABS}} \right)} = \alpha(I)$$

Las pérdidas bajan cuando la Intensidad del pulso $I > I_{sat}^{ABS}$



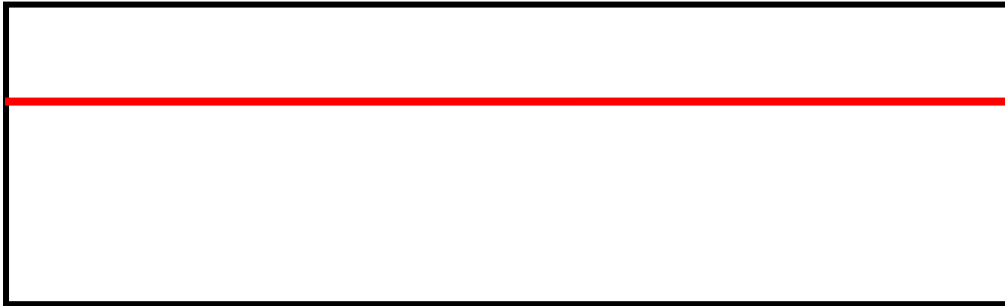
Mode locking pasivo



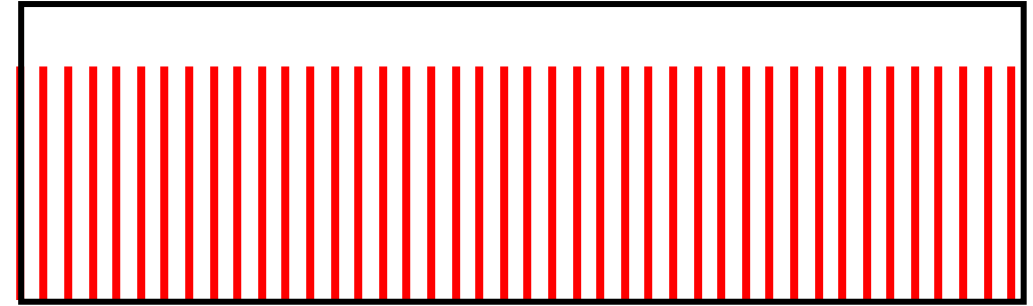
Mode locking vs Q-Switch



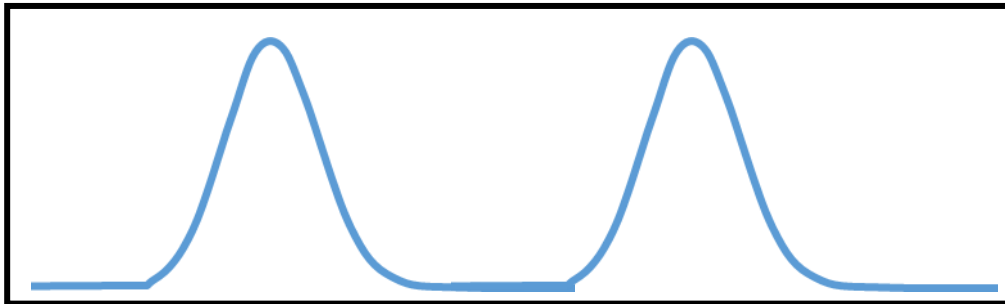
CW



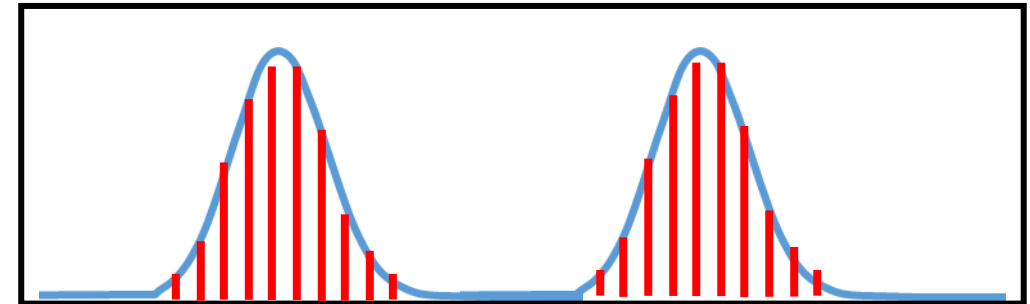
ML



Q-Switch



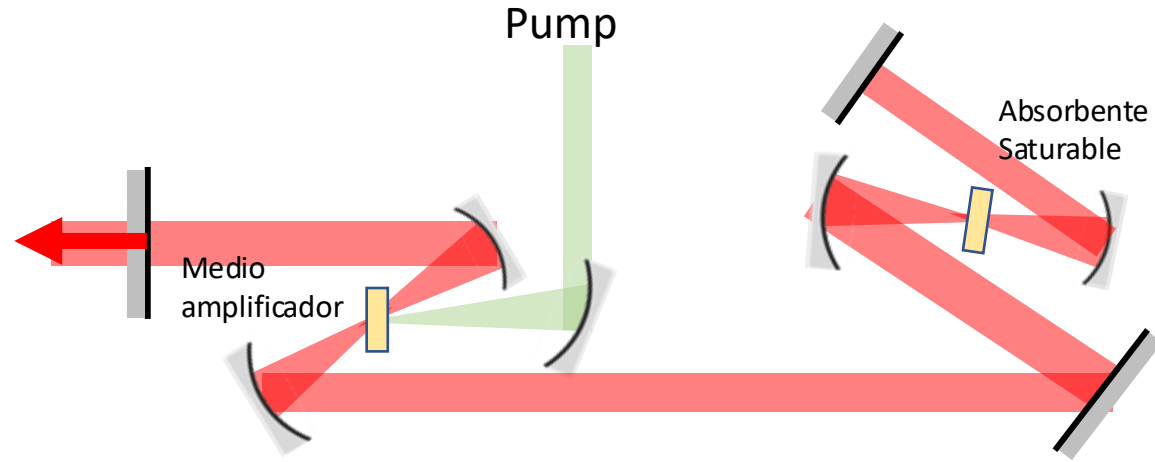
Q-Switch-ML



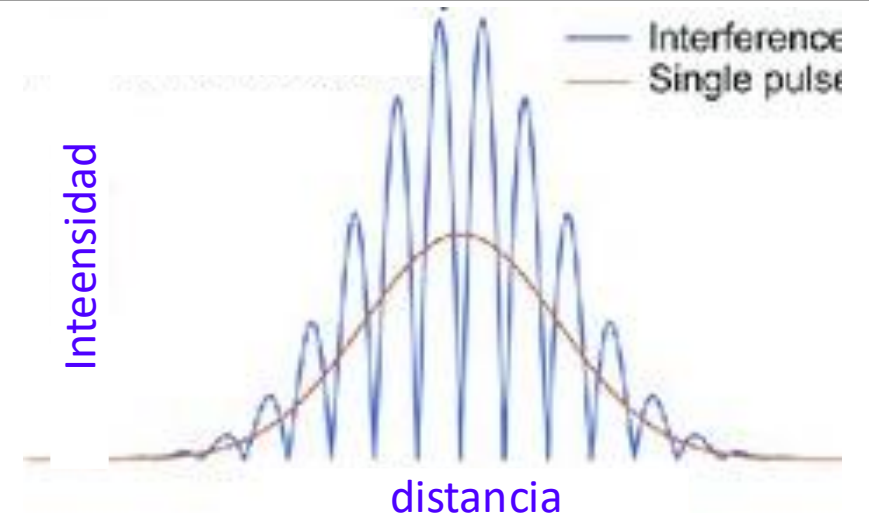
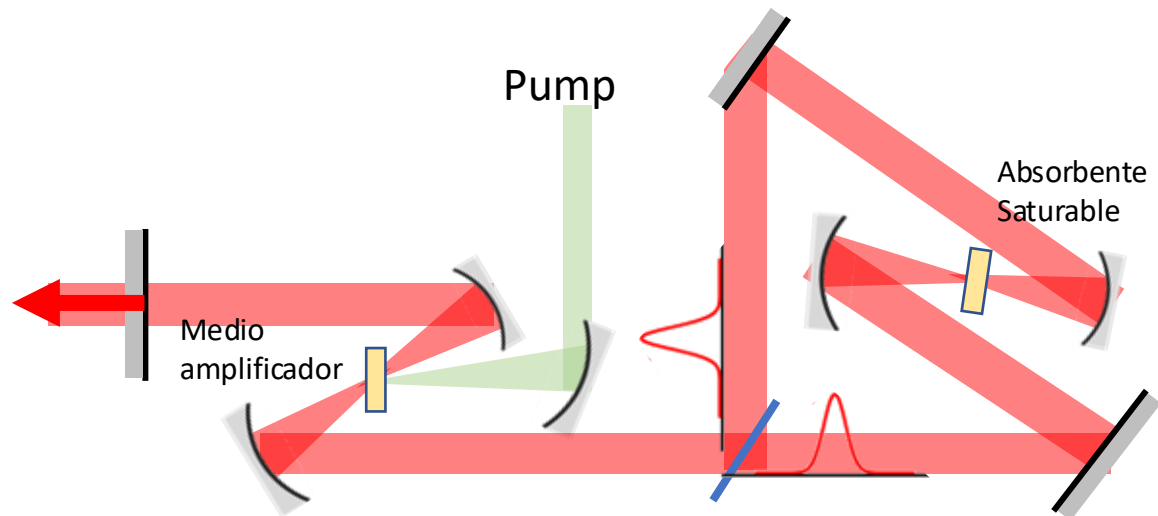
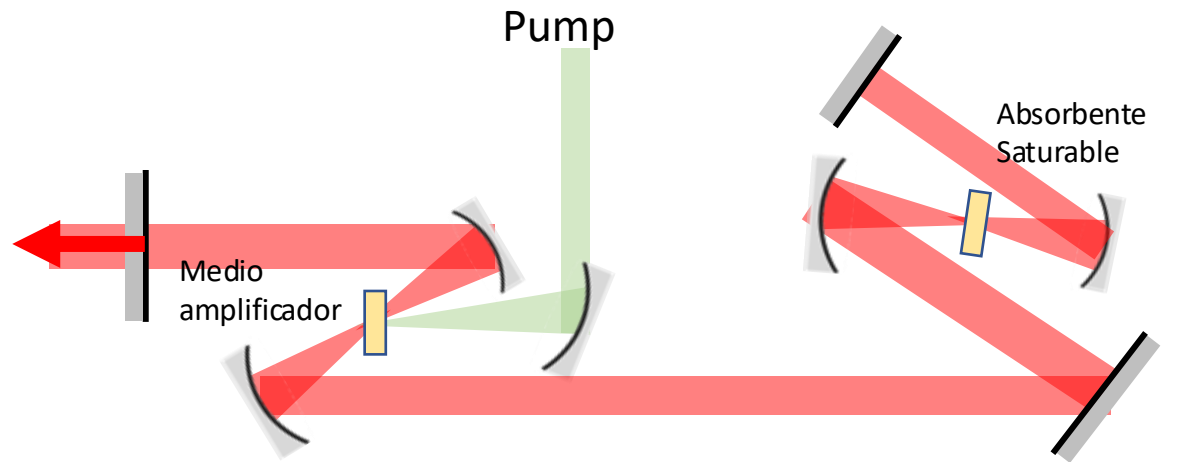
- Q-Switch puede ser monomodo o multimodo
- Modula pérdidas de la cavidad y libera pulsos
- Escala temporal: dinámica de ganancia / recuperación del absorbente.
- absorbente más rápido que el τ_u , τ_u largo. $\tau_{\text{rec}}^{\text{ABS}} < \tau_u$

- Mode locking DEBE ser multimodo
- Fija relación de fase entre modos
- Pulsos separados en τ_{RT}
- absorbente más rápido que el τ_{RT} , $\tau_{\text{rec}}^{\text{ABS}} \lesssim T_R$
- El ancho del pulso depende del bandwidth.

Un posible esquema para mode locking pasivo

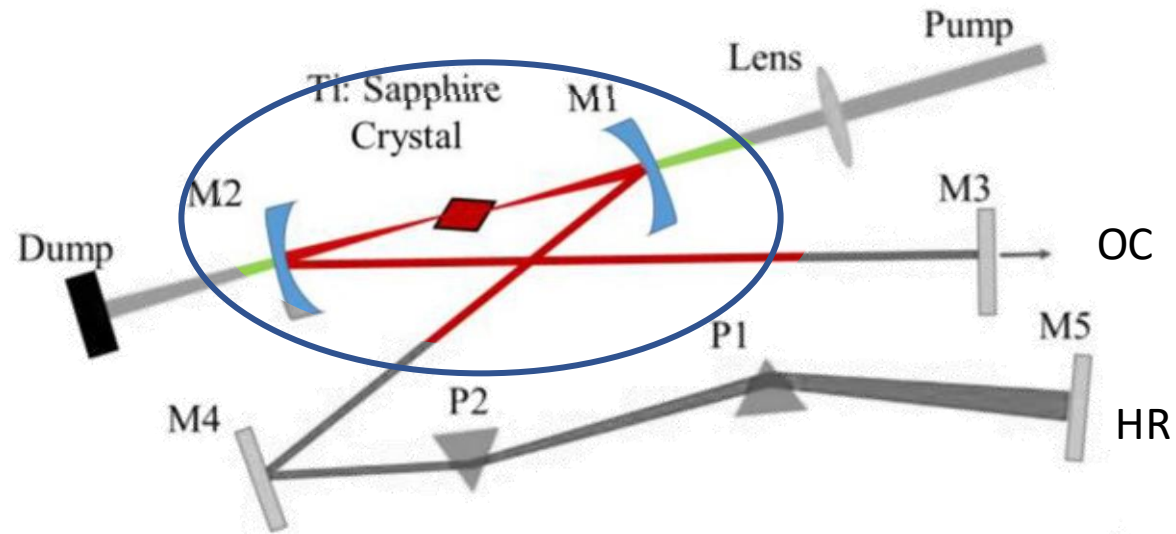


Colliding pulse mode locking (pasivo)-CPM



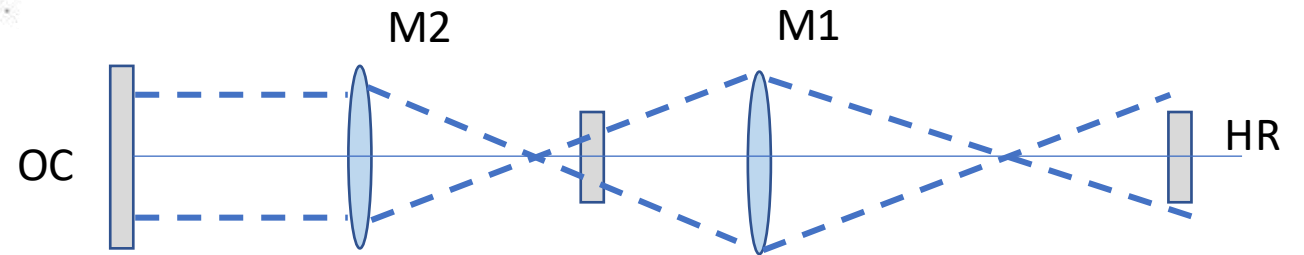


Kerr Mode locking (tipo pasivo)



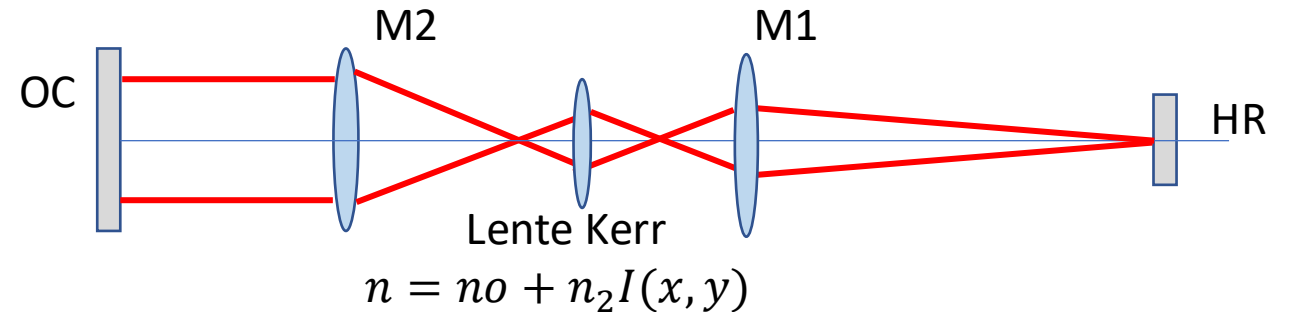
$$P < P_{cr}$$

Intensidad baja CW inestable

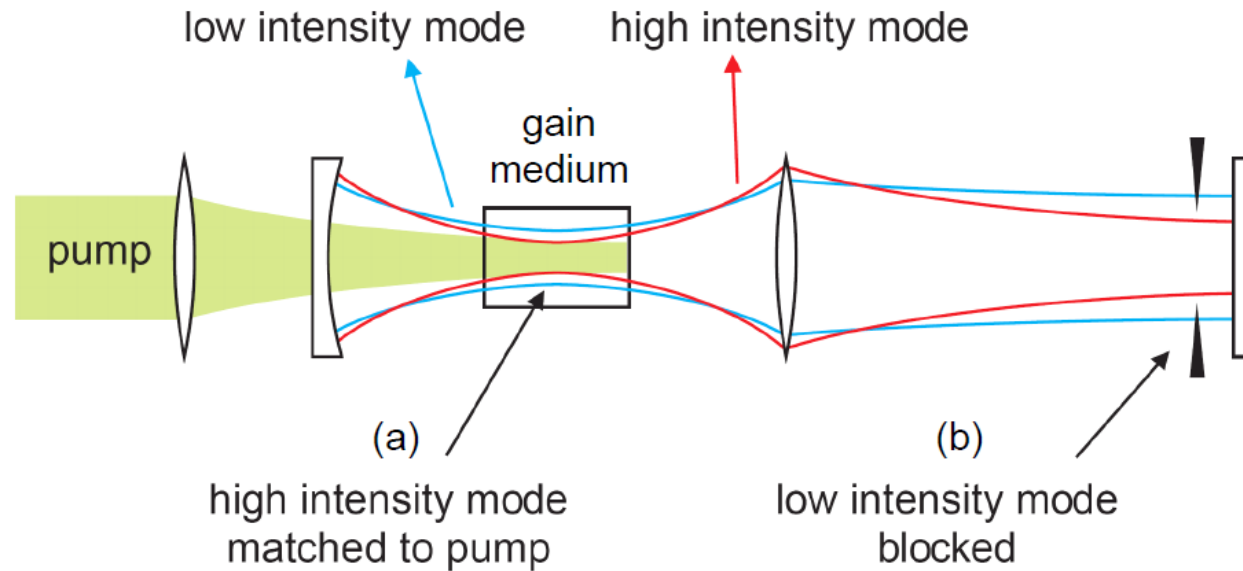


Intensidad alta ML estable

$$P > P_{cr}$$



Kerr Mode locking (tipo pasivo)



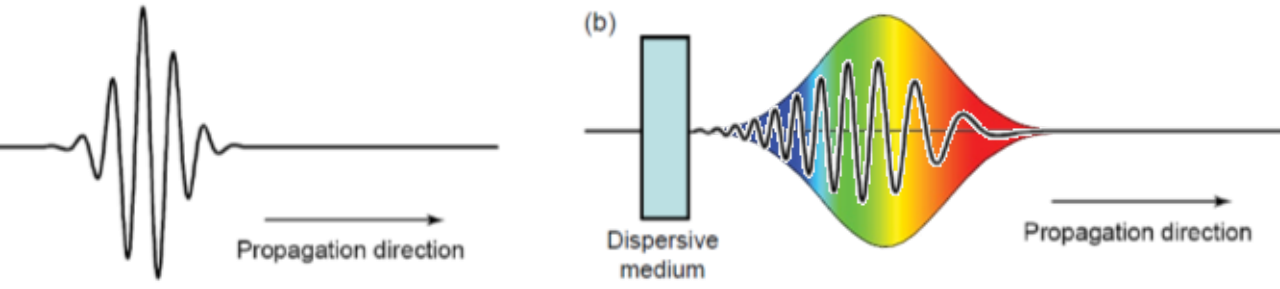
Apertura “blanda”: Guiado de la ganancia
Si acoplo el bombeo al modo de intensidad alta, solo doy ganancia al laser pulsado

Apertura “dura”
Perdidas por difracción grandes para e modo de baja intensidad

Kerr Mode locking (tipo pasivo)



Dispersión de un pulso con $GVD > 0$

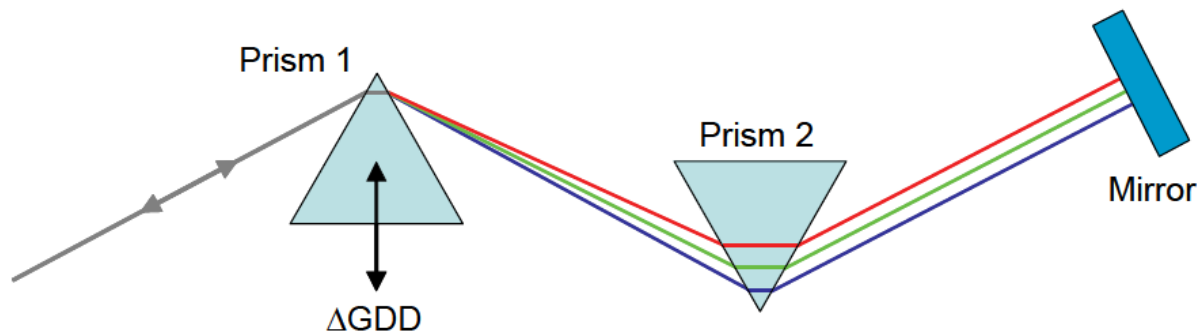


$$GVD = \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$$

$$GDD = \frac{d^2 \phi}{d\omega^2} \rightarrow GVD / L$$

El pulso se ensancha en el tiempo

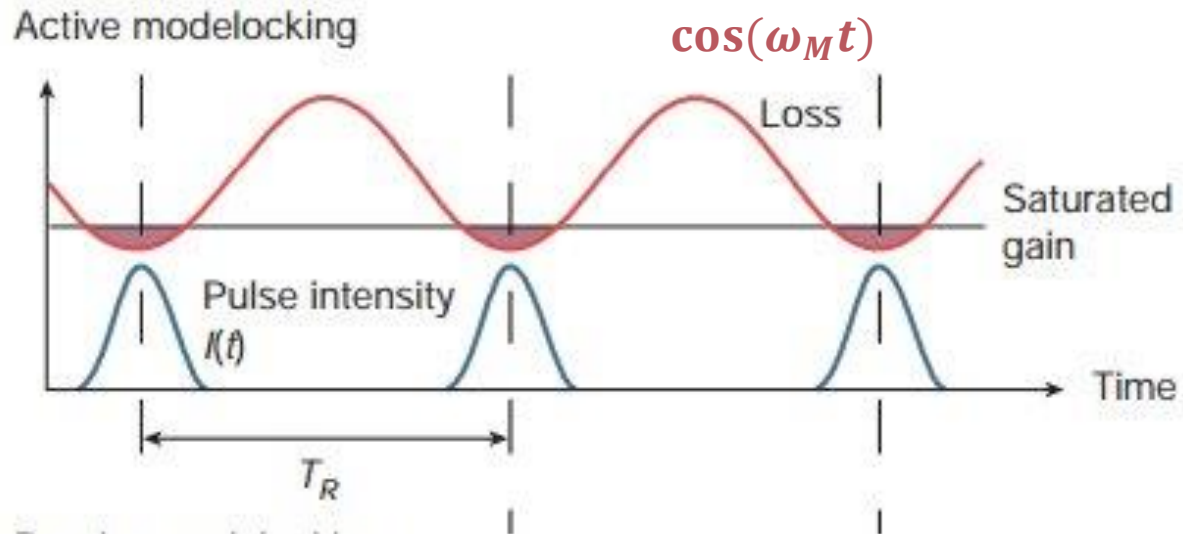
Las frecuencias más chicas (**rojo**) **ADELANTAN** respecto a las más grandes (**azul**)



- Incide en Brewster para la λ central
 - θ_{out} ángulo de desviación mínima
 - disminuye pérdidas para la polarización p

Las frecuencias más chicas (**rojo**) **RETRASAN** respecto a las más grandes (**azul**)

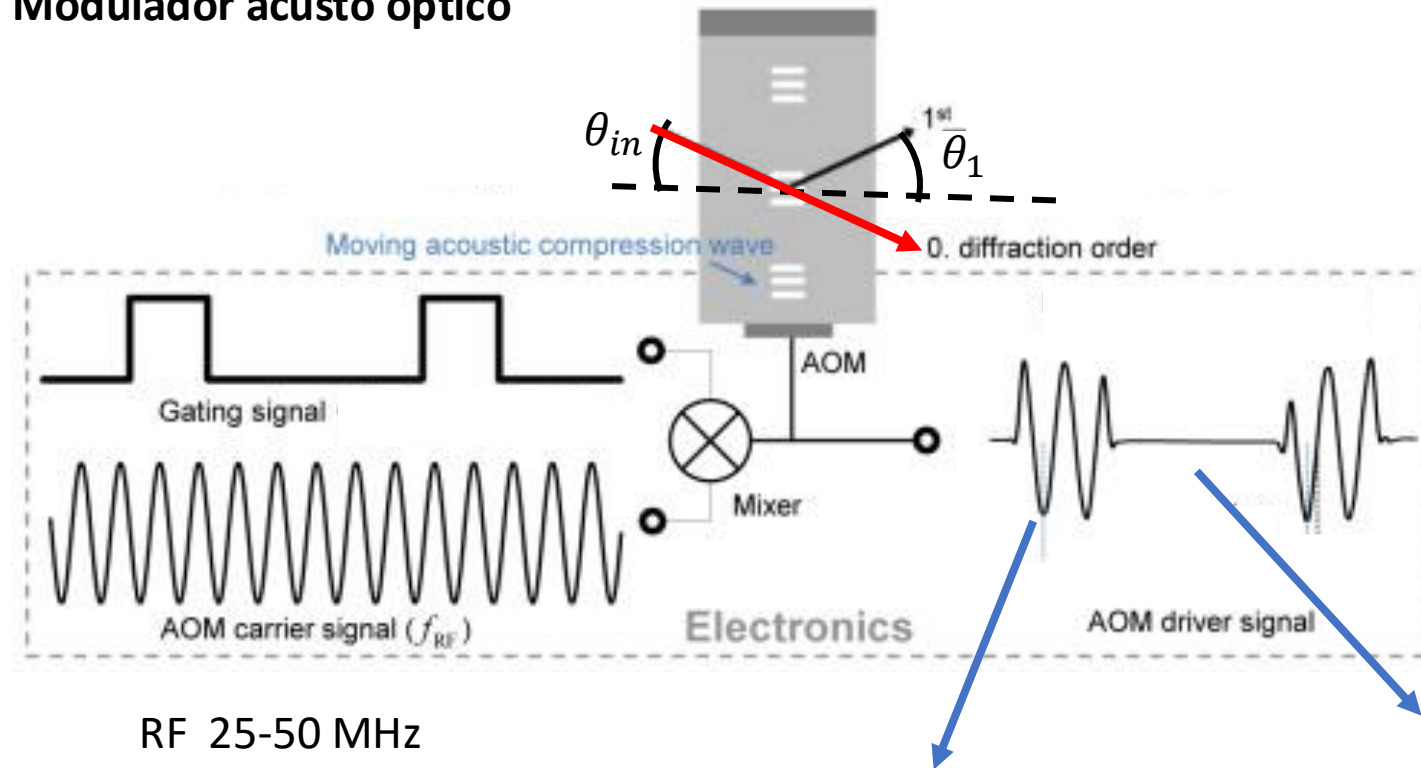
La velocidad de grupo en vidrio en el **rojo** es menor que para el **azul**



Mode locking activo

- Un modulador externo modula las pérdidas y/o ganancia de la cavidad. Eso crea una ventana temporal de bajas pérdidas.
- Los modos compiten por la ganancia, pero están acoplados por las sidebands moduladas senoidalmente

Modulador acusto óptico



RF 25-50 MHz

RF encendida, perdidas muy altas, cavidad abierta

RF baja/apagada: pérdidas bajas. La ventana temporal favorece el pulso sincronizado con T_R .

$$f_M = f_{rep} = \frac{1}{T_R}$$

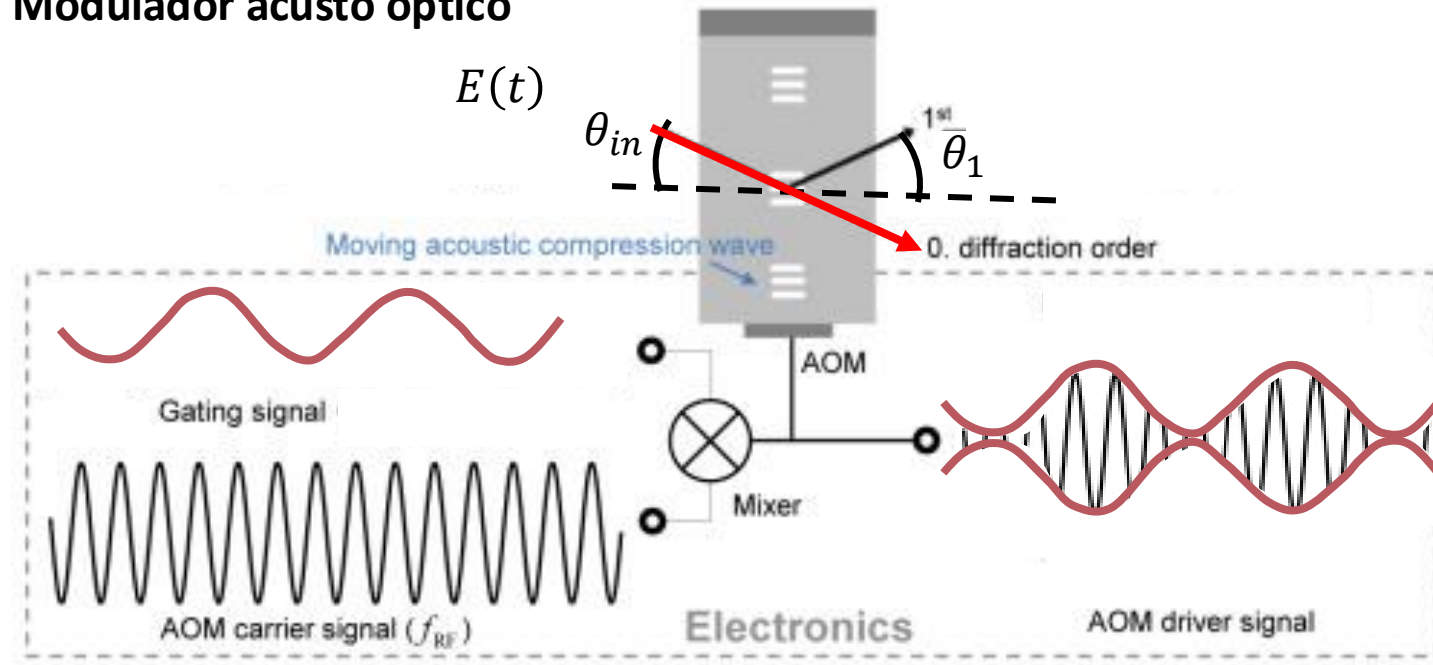
$$\theta_B \sim \sin(\theta_B) = \frac{\lambda}{2\eta\Delta}$$

$$\text{Si } \theta_{inc} = \theta_B \Rightarrow \theta_1 = \theta_B$$

Mode locking activo: Moduladores



Modulador acusto óptico

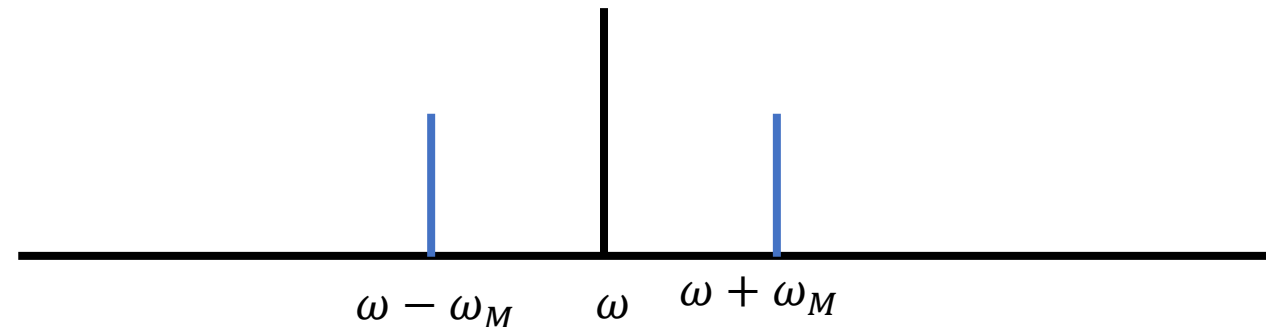


RF 25-50 MHz

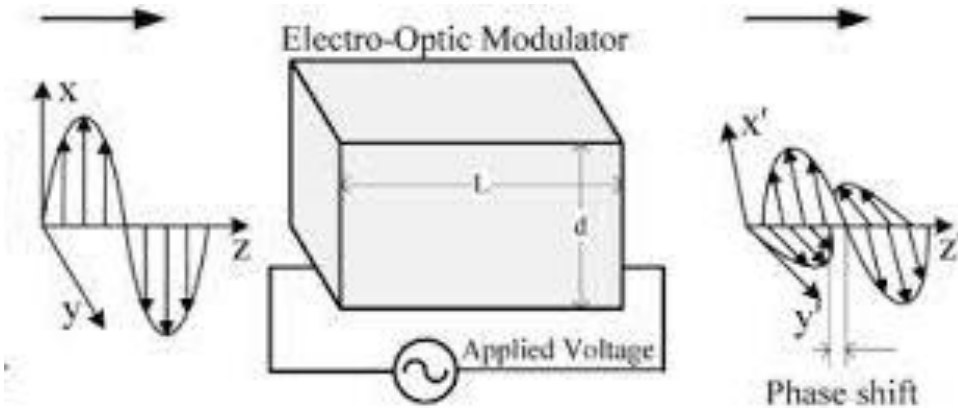
$$E_{out}(t) = E(t)(1 + \cos(\omega_M t))$$

$$\mathcal{F}\{E_{out}(t)\} = \tilde{E}(\omega) + \mathcal{F}\{E(t)\cos(\omega_M t)\}$$

$$\mathcal{F}\{E_{out}(t)\} = \tilde{E}(\omega) + \frac{1}{2}(\tilde{E}(\omega - \omega_M) + \tilde{E}(\omega + \omega_M))$$



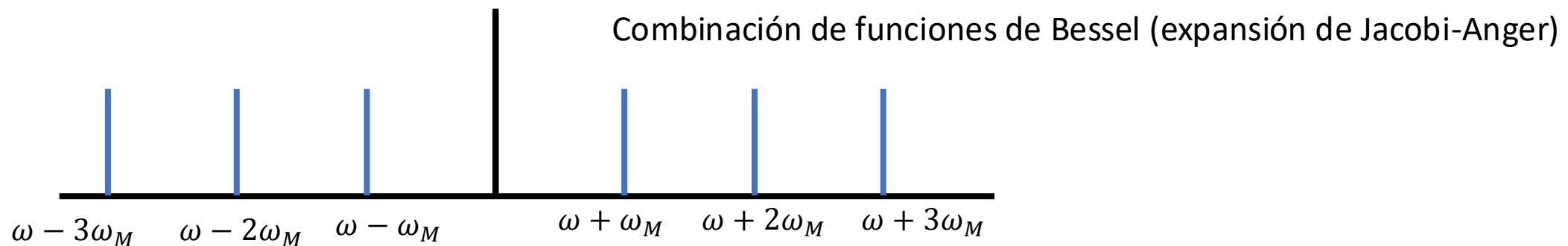
Mode locking activo: Moduladores



- Aplico voltaje a un cristal induciendo birrefringencia
- Tensiones de ~kV pueden transformar al cristal en lámina de media onda o cuarto de onda
- Voltaje senoidal $\rightarrow$ Modulación senoidal de la fase

$$E(t) = E_o e^{i\omega t}$$

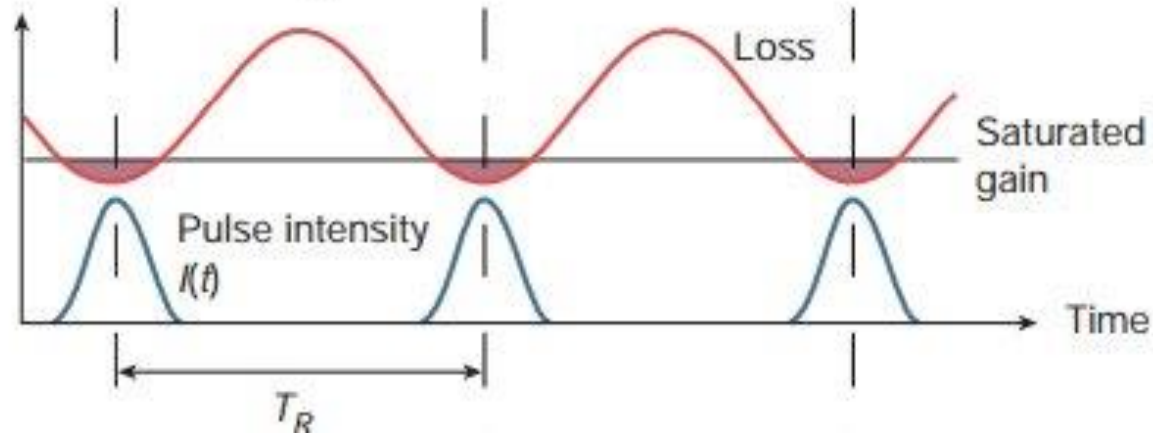
$$E(t) e^{i\beta \sin(\omega_M t)} = E_o e^{i\omega t + i\beta \sin(\omega_M t)} = E_o e^{i\omega t} \left(J_0(\beta) + \sum_k J_k(\beta) e^{ik\omega_M t} + \sum_k (-1)^k J_k(\beta) e^{-ik\omega_M t} \right)$$



Mode locking activo



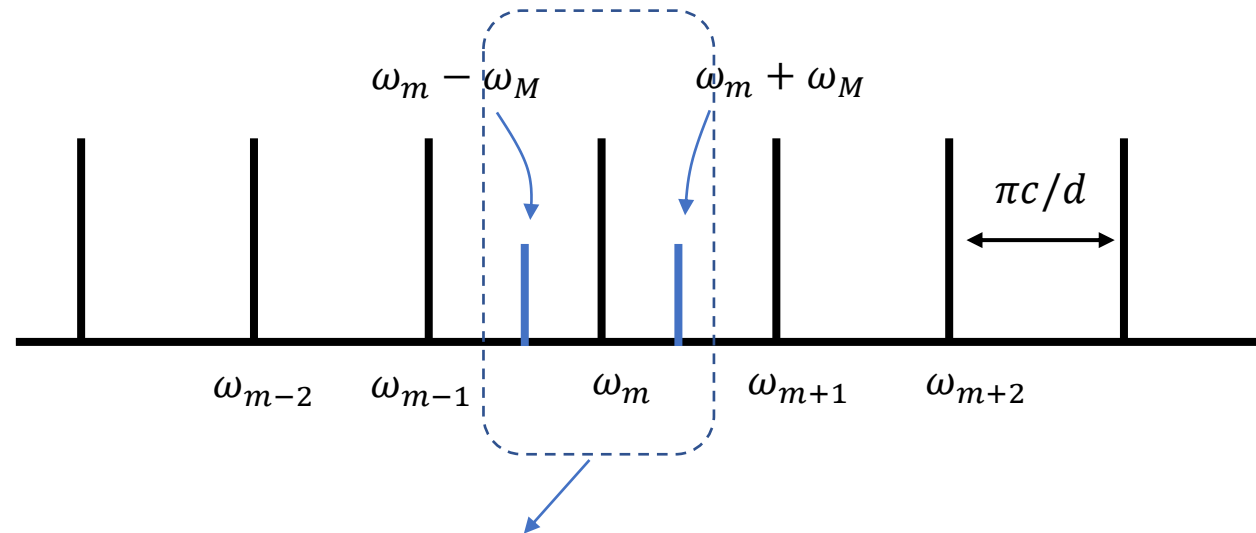
Active modelocking



El modulador abre una ventana temporal de bajas pérdidas una vez por round trip.

La única forma de que el campo pase siempre por esa ventana es que los modos se combinen formando un pulso que llega justo en ese instante.

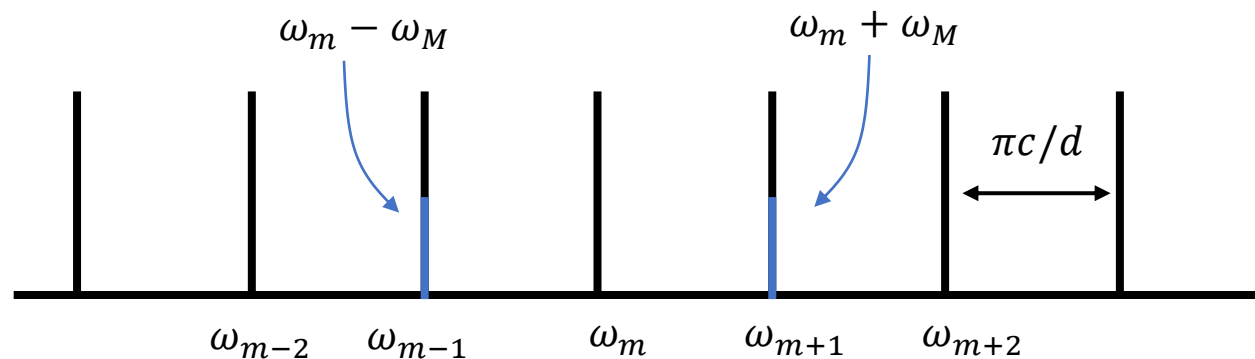
Esa combinación requiere fases fijas entre modos.



Todos los modos tienen estas side-bands

Modulador:

- **mezcla modos vecinos**, mediante sidebands;
- **impone una referencia temporal periódica**



$$E(t) = \sum_m E_m e^{i(\omega_m t + \phi_m)}$$

Si las fases ϕ_m son aleatorias, no hay pulso.

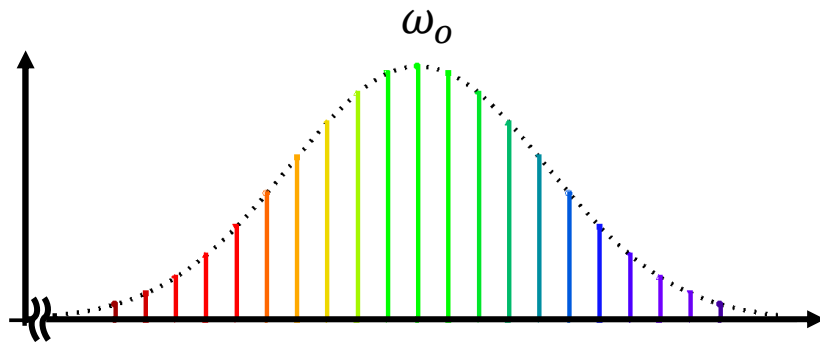
elijo ω_M igual al espaciamiento de los modos

$$\omega_M = \frac{2\pi}{\tau_{RT}} = \frac{\pi c}{d} \quad \Rightarrow \quad \omega_M = \omega_{m+1} - \omega_m$$

Las sidebands tienen una fase definida por el modulador. Al superponerse con modos vecinos, imponen un acoplamiento de fase entre modos longitudinales

- La modulación sobre las sidebands produce sidebands $\omega_m - 2\omega_M$, $\omega_m + 2\omega_M$, en fase con las primeras
- La modulación en distintos modos produce sidebands

Después de muchos round trips, la solución favorecida es aquella en la que los modos tienen una relación de fase fija y que se suman constructivamente en la ventana temporal del modulador



$$\omega_n = \omega_o + n\omega_M$$

Ganancia loretziana para cada modo

$$G(n)a_n = \left[\frac{g}{1 + \frac{(n\omega_M)^2}{\Omega_g^2}} \right] a_n$$

Modulación en cada modo

$$M[1 - \cos(\omega_M t)]a_n e^{i(\omega_o + n\omega_M)t} = \frac{Ma_n}{2} e^{i\omega_o t} [e^{i(n-1)\omega_M t} - 2e^{in\omega_M t} + e^{i(n+1)\omega_M t}]$$

Podemos escribir una ecuación de la amplitud de los N modos en el roundtrip k

$$a_n^{k+1} - a_n^k = G(n)a_n^k - l a_n^k + \frac{M}{2} (a_{n+1}^k - 2a_n^k + a_{n-1}^k)$$

N ecuaciones acopladas

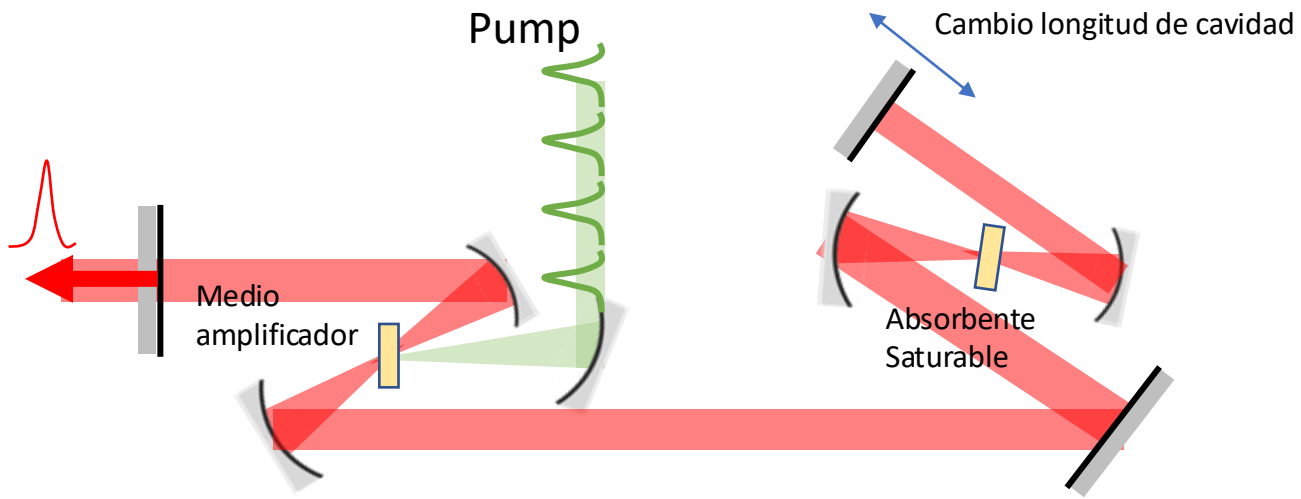
$$(a_{n+1}^k - 2a_n^k + a_{n-1}^k) \rightarrow \omega_M^2 \frac{d^2}{d\omega^2} a(\omega) \quad \omega = n\omega_M$$

Mode locking active: bombeo sincrónico

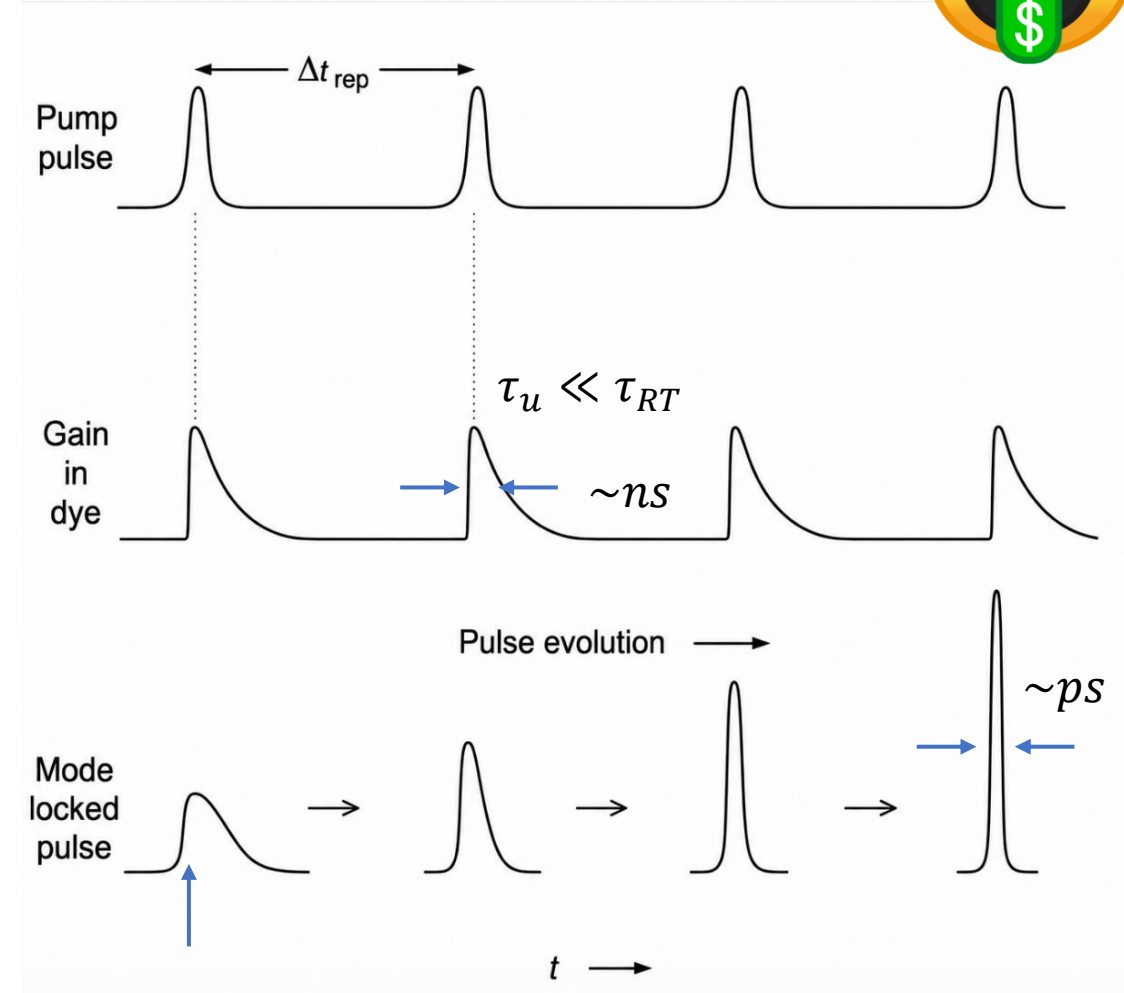


Bombeo Sincrónico: switchear la ganancia usando bombeo pulsado

Ej: Mode locked Ar ion pulsos largos de 1 ns



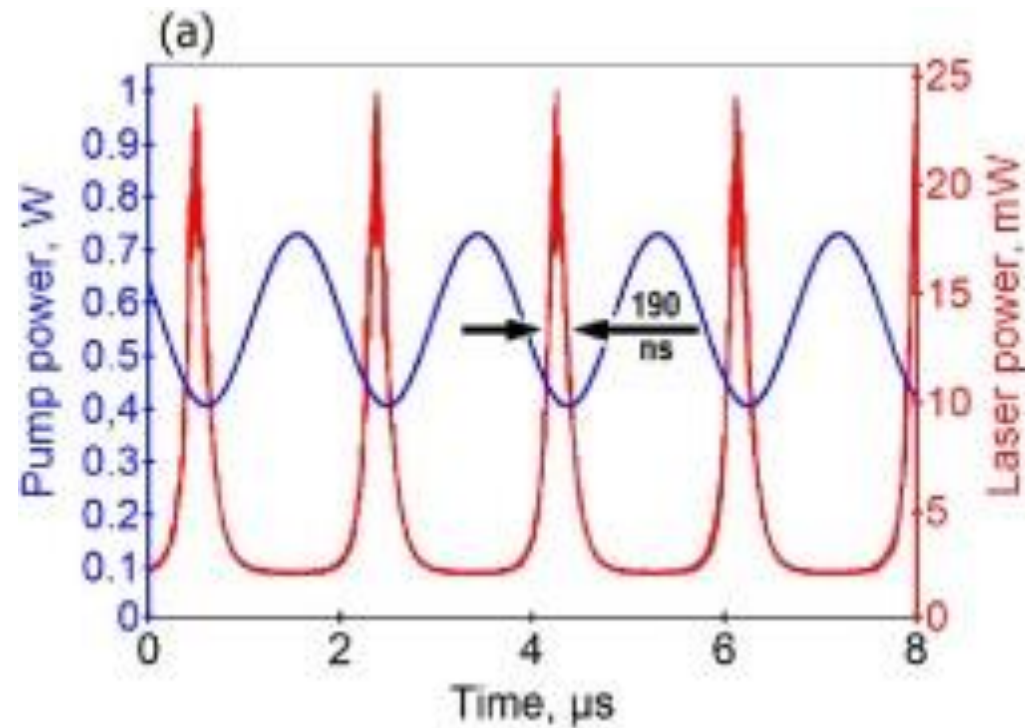
$$\tau_{RT}^{pump} = \tau_{RT}^{laser}$$



El frente del pulso empieza a saturar la ganancia; la cola encuentra menor inversión disponible

Mode locking activo por modulación de corriente del pump

Shaping of nanosecond pulses in ytterbium fiber lasers by synchronous sine-wave pump modulation



Parámetro / condición	Tiende a Q-switch pasivo	Tiende a mode locking pasivo
Qué selecciona	Acumulación de energía en el medio activo	Picos intensos en cada round trip
Resultado	Pulsos grandes, más largos	Tren de pulsos cortos
Escala temporal dominante	Recuperación de ganancia / almacenamiento de inversión	Tiempo de round trip y ancho del pulso
Modulación de pérdidas	Lenta, permite acumular energía	Rápida o efectiva, recorta colas y fondo
Modos longitudinales	Puede ser monomodo o multimodo	Necesita muchos modos en fase
Si no está bien ajustado	Q-switch limpio	Puede aparecer Q-switched mode locking